

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

LIMUSA
NORIEGA EDITORES

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Roald K. Wangsness
Profesor de física en la Universidad de Arizona



MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

Versión autorizada en español de la obra
publicada en inglés con el título:
ELECTROMAGNETIC FIELDS
© John Wiley & Sons, Inc.

Colaborador en la traducción:
JOSÉ RAMÓN ERTZE ENCINAS
Licenciado en ciencias por St. John's University,
Collegeville, Minnesota, Estados Unidos.

Revisión:
ROLANDO V. JIMÉNEZ DOMÍNGUEZ
Catedrático, doctor en física e investigador titular
en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del
Instituto Politécnico Nacional, México.

GRUPO NORIEGA EDITORES
Balderas 95, México, D.F.
C.P. 06040
(5) 521-21-05
01(800) 7-06-91-00
(5) 512-29-03
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CANIEM Núm. 121

Decimocuarta reimpresión

Hecho en México
ISBN 968-18-1316-2



A Cleo

Prólogo

Este texto se escribió para utilizarse en un curso avanzado de un año sobre magnetismo impartido a estudiantes de física. He hecho todo lo posible por escribirlo desde el punto de vista del estudiante, manteniendo un estilo sistemático y directo y evitando explicaciones complicadas y el uso del clásico "Como se podría demostrar. . . " . También traté de poner en claro la justificación para cada paso de las demostraciones y para cada nuevo concepto a medida que aparecieran éstos. En algunos puntos hago referencia a la causa de muchos errores simples que generalmente comete el estudiante, e indico cómo evitarlos. Se usan muchas referencias cruzadas a lo largo del texto para indicar el origen detallado de cualquier resultado específico o su relación con el resto de texto; esto también hará que el libro sea una buena fuente de consulta mucho tiempo después de haber terminado el curso.

Le he dado más importancia a las propiedades y fuentes de los vectores de campo, y espero haber tenido éxito en explicar claramente los cambios en conceptos y puntos de vista que ocurren cuando la noción de acción a distancia se sustituye por la noción de campos. En forma general, se describen los fenómenos en forma macroscópica y empírica, aunque para el estudio de la conductividad en las secciones 12-5 ó 24-8 se adopta un punto de vista microscópico. Sin embargo, el apéndice B trata brevemente sobre los orígenes microscópicos de las propiedades electromagnéticas, y está escrito y organizado de tal manera que, si se desea, se puede ver sección por sección en un punto intermedio adecuado. Así, por ejemplo, la sección **B-1** podría verse después de la sección 10-7, y la mayor parte de la sección **B-2** puede tratarse enseguida de la sección 20-5, mientras que la última parte relacionada con ferromagnetismo podría verse después de la sección 20-7; por último, la sección **B 3** puede tratarse después de que el estudiante haya dominado la sección 24-8 y haya resuelto el problema 27-28. De manera parecida, existe la posibilidad de tener mayor flexibilidad, ya que se puede estudiar por separado las secciones del Apéndice **A** que tratan sobre partículas cargadas en movimiento, en cualquier momento después de obtener del texto los términos aprobados para **E** o **B** referentes a las fuerzas.

En el libro se usan unidades de SI; en la práctica esto significa que se utiliza el sistema MKSA. Sin embargo, en alguna ocasión el estudiante se encontrará con unidades gausianas y requerirá de orientación para manejarlas. Ese es el propósito del capítulo 23, que presenta otros sistemas de unidades pero sólo después de haber descrito sistemáticamente la terоría que resulta de las ecuaciones de Maxwell. Escribí este capítulo principalmente por razones prácticas, para ayudar a reconocer una ecuación dada en otras unidades, para saber transformarla a una forma más conocida si se desea y para saber qué números son los que se precisa sustituir en una ecuación en unidades gausianas para obtener el resultado correcto.

En el capítulo 9 las condiciones de frontera que debe satisfacer un vector *arbitrario* en una superficie de discontinuidad de propiedades se obtienen en forma general en términos de su divergencia y su rotacional. Esto no solamente ayuda al alumno mostrándole la importancia de conocer estas ecuaciones de fuente en particular, sino que también simplifica el estudio de otros temas, ya que a medida que se introduce un nuevo vector se pueden encontrar sus ecuaciones de fuente sin tener que derivarlas cada vez.

El libro contiene más de 130 ejemplos resueltos e incluye todos los ejemplos clásicos, muchos de ellos resueltos en mayor detalle que lo que normalmente se acostumbra, con especial cuidado en la etapa del planteamiento del problema, ya que esto es lo que a menudo causa mayor dificultad a los estudiantes. Incluyo también 555 ejercicios, algunos de ellos numéricos, a fin de formar una idea del orden de magnitud de los resultados, y otros semejantes a los ejemplos. Muchos se refieren a situaciones completamente diferentes, y otros implican una extensión de la teoría vista. Un número considerable de estos ejercicios pueden ser de gran utilidad como ejemplos adicionales a tratarse en el salón de clase. Se dan los resultados de todos los ejercicios impares excepto, desde luego, aquéllos que incluyen la respuesta en el enunciado mismo.

Me he beneficiado mucho a través de los años por medio de pláticas y preguntas de parte de mis alumnos y colegas; estoy muy agradecido por su colaboración en este libro. Las partes sobre relatividad especial, del capítulo 28, fueron tomadas casi al pie de la letra de mi libro *Temas Introductorios a la Física Teórica,* también publicado en inglés por John Wiley & Sons, y agradezco su permiso para utilizarlas.

Roald K. Wangsness

Contenido

Introducción

. . . Faraday visualizaba líneas de fuerza que atravesaban todo el espacio donde los matemáticos sólo veían centros de fuerza que actuaban a distancia: Faraday veía un medio donde ellos únicamente veían distancia: Faraday buscó la fuente de los fenómenos a partir de acciones reales que se llevaban a cabo en el medio, mientras aquéllos quedaron satisfechos con haberla encontrado en el poder de acción a distancia presente en los fluidos eléctricos.

- J. C. Maxwell,
Tratado de Electricidad y Magnetismo

Hace ya más de cien años que Maxwell escribió el párrafo anterior en el prefacio a su actualmente famoso libro. Su propósito era tomar los conceptos de campo que Faraday había desarrollado y ponerlos en formas matemáticas que facilitaran su uso y los hicieran básicos en la descripción coherente de los efectos electromagnéticos. En esa época hacía sólo 50 años que Oersted y Ampere habían demostrado la relación que existe entre la electricidad y el magnetismo -temas que habían sido estudiados y desarrollados en forma completamente independiente por muchos años. Hasta entonces se otorgaba principal importancia a las fuerzas ejercidas entre cargas y corrientes eléctricas, y no se aceptaba que el aspecto central fuera el de los campos electrico y magnético; de hecho, esta idea se veía con mucha hostilidad.

Como se puede apreciar por el título de este libro, los tiempos han cambiado, y hoy nuestro interés principal se centra en los orígenes, propiedades y naturaleza de los campos electromagnéticos, es decir, de las cantidades eléctricas y magnéticas vectoriales que se definen en función del tiempo y de la posición en el espacio. Las fuerzas y sus conceptos relacionados, tales como la energía, no han dejado desde luego de tener importancia y es conveniente iniciar el estudio con las fuerzas y definir los vectores de campo en función de ellas. Sin embargo, muestra intención principal consiste en expresar las descripciones de los fenómenos en función de los campos de una manera tan completa como nos sea posible. Este énfasis sobre los campos ha demostrado ser de gran utilidad, y resulta ahora difícil de imaginar cómo se hubiera podido desarrollar la teoría electromagnética hasta su actual nivel sin el uso ,de los oampos.

Este libro contiene más material del que normalmente se cubre en un curso anual; todo sú contenido, sin embargo, es de gran interés y valor para un estudiante serio de la física.

Generalmente no todos los autores tienen el mismo punto de vista y ningún libro puede cubrir todos los detalles de un tema dado. A continuación se proporciona una lista de libros relativamente recientes sobre el electromagnetismo que están escritos más o menos al mismo nivel que éste.

W. B. Cheston, *Elementary Theory or Electric and Magnetic Fields*, Wiley, Nueva York, 1964.

D. M. Cook, *The Theory of the Electromagnetic Field*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N. J. , 1975.

P. Lorrain y D. R. Corson, *Electromagnetic Fields and Waves,* segunda edición. Freeman, San Francisco, 1970.

J.R. Reitz y F J. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory,* segunda edición, Addison Wesley, Reading, Mass., 1967.

A. Shadowitz, *The Electromagnetic Field,* McGraw–Hill, Nueva York, 1975.

Los siguientes libros estudian el electromagnetismo desde un nivel más avanzado:

J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics,* segunda edición, Wiley, Nueva York, 1975.

W. K. H. Panofsky y M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism,* segunda edición, Addison Wesley, Reading, Mass. , 1962.

J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory,* McGraw–Hill, Nueva York, 1941.

(Por último, una nota sobre notación: en este libro, los símbolos $=$, $\simeq$, $\approx$, $\sim$, $\neq$, significan siempre igual a, aproximadamente igual a, en el orden de magnitud de, proporcional a y diferente de, respectivamente.)

Capítulo 1
Vectores

En el estudio de la electricidad y el magnetismo se utilizan constantemente cantidades que requieren ser descritas en términos tanto de su magnitud como de su dirección. Este tipo de cantidades recibe el nombre de vectores, y resulta de gran utilidad estudiar sus propiedades generales antes de manejar algunos ejemplos específicos. El utilizar la notación y terminología establecida para este propósito permite expresar resultados de manera más concisa, y al mismo tiempo simplificar la comprensión de su significado físico fundamental.

1-1 Definición de un vector

Las propiedades del *desplazamiento de un punto* proporcionan los elementos básicos para la definición de un vector. Para comenzar, tómese un punto, P_1, y muévasele siguiendo una trayectoria arbitraria hasta la posición P_2; como se aprecia en la figura 1-1, el efecto *neto* de este movimiento es el mismo que si el punto hubiera sido trasladado en línea recta, D, desde P_1 a P_2, tal como indica la dirección de la flecha. Esta recta D recibe el nombre de desplazamiento y se caracteriza por una magnitud (su longitud) y una dirección de (P_1 a P_2). Si se desplaza ahora el punto desde la posición P_2 a otra posición, P_3, siguiendo la trayectoria E como se muestra en la figura 1-2, el efecto neto es el mismo que si el punto hubiera sufrido un solo desplazamiento, F, desde P_1 a P_3. De esta manera, se puede decir que F es la resultante o suma de los desplazamientos sucesivos D y E; de tal forma, la figura 1-2 muestra la manera fundamental de combinar o sumar desplazamientos para obtener una resultante.

Un *vector* es una generalización de estas consideraciones ya que se define como una cantidad que posee las mismas propiedades matemáticas que el desplazamiento de un punto. Un vector posee magnitud, dirección y la adición de dos vectores de la misma naturaleza intrínseca sigue la misma regla básica que se ilustra en la figura 1-2. Debido a las primeras dos propiedades, se puede representar un vector por medio de una recta dirigida, tal como la que se utilizó para ilustrar los desplazamientos. Un vector aparece en negrillas, como **A**; su magnitud queda representada por $|\mathbf{A}|$ o por A.

Un *escalar* es una cantidad que únicamente posee magnitud. Por ejemplo, la masa de un cuerpo es una cantidad escalar, mientras que su peso, que es la fuerza gravitacional que actúa sobre el cuerpo, es un vector.

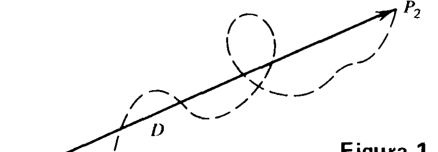


Figura 1-1. D es el desplazamiento del punto de P_1 a P_2.

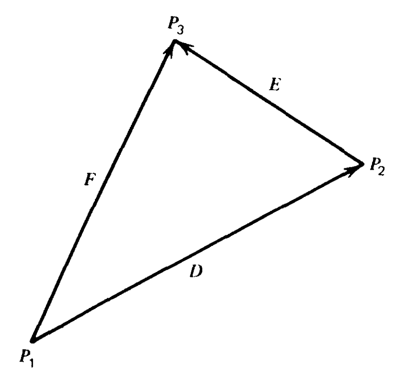


Figura 1-2. F es la resultante de los desplazamientos D y E.

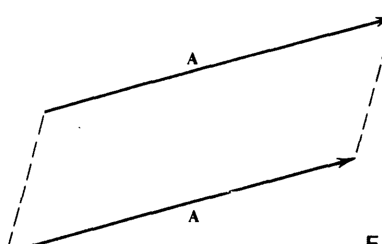


Figura 1-3. Estos dos vectores son iguales.

Debido a la naturaleza del vector como una cantidad con dirección se desprende que no lo altera el desplazamiento a sí mismo de otro vector paralelo; en otras palabras, dos vectores son iguales entre sí si poseen la misma magnitud y la misma dirección. Esto queda ilustrado en la figura 1-3 donde se aprecia que $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. A continuación se investiga qué operaciones matemáticas pueden realizarse con vectores.

1-2 Adición

En la figura 1-4, y de acuerdo con la regla básica, se puede observar que si a **A** se le suma **B** se obtiene la suma **C** que se muestra con línea continua. También se puede ver que si se toma **B** y se le suma **A** se obtiene el mismo vector **C**. Por lo tanto, la suma de vectores tiene la propiedad de que

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{1-1}$$

Procediendo en la misma forma, se puede ver que la suma de vectores es asociativa:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} \tag{1-2}$$

y así sucesivamente.

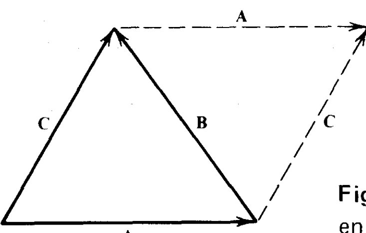


Figura 1-4. La suma de dos vectores no depende del orden en que se sumen.

Si se invierte un desplazamiento, recorriéndolo en la dirección opuesta, tal como se indica por D en la figura 1-1, el efecto neto es un desplazamiento nulo; de esta manera, se puede definir el negativo de un vector como otro de la misma magnitud pero en sentido contrario, ya que de tal manera se obtiene $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$, como cabría esperarse. Así, se podría restar un vector de otro simplemente sumándole su negativo:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \tag{1-3}$$

El producto de un escalar, s, y de un vector, que puede escribirse como $s\mathbf{A}$ o $\mathbf{A}s$, es simplemente la suma de s vectores $\mathbf{A}$, lo cual no es sino un vector cuya magnitud es $|s|$ veces la magnitud de $\mathbf{A}$ y que está en la misma dirección de $\mathbf{A}$ si s es positivo o en dirección contraria a la de $\mathbf{A}$ si s es negativo.

1-3 Vectores unitarios

Un *vector unitario* se define como aquél cuya magnitud es la unidad, y se escribe con un acento circunflejo sobre la letra que lo representa, por ejemplo $\hat{\mathbf{e}}$; dado que al vector unitario siempre se le toma como una cantidad sin dimensiones, se tiene $|\hat{\mathbf{e}}| = 1$. Si, por ejemplo, se escoge un vector unitario, $\hat{\mathbf{a}}$, en la misma dirección de $\mathbf{A}$, se puede escribir

$$\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{a}} \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{A}}{A} \tag{1-4}$$

Este punto se ilustra en la figura 1-5.

Un conjunto de vectores unitarios de gran utilidad pueden asociarse con un sistema de coordenadas rectangulares. Se les escribe como $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ y se les define en las direcciones de los ejes x, y y z respectivamente, como se ilustra en la figura 1-6. En otras palabras, la

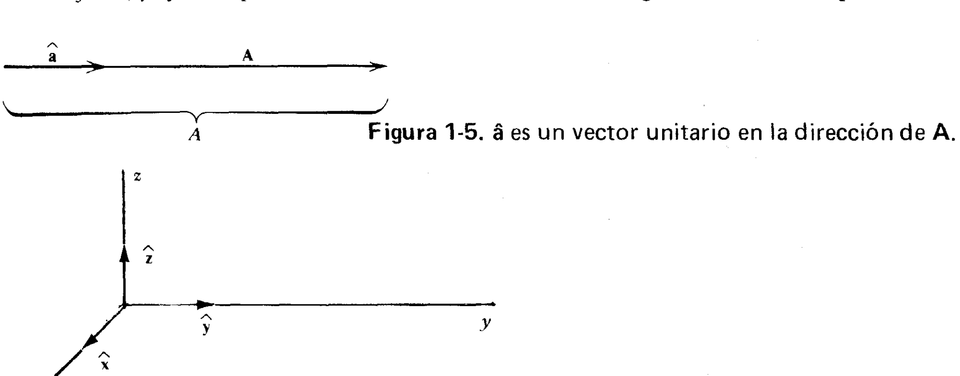


Figura 1-5. $\hat{\mathbf{a}}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{A}$.

Figura 1-6. Vectores unitarios para coordenadas rectangulares.

dirección de cada uno de ellos está determinada por la dirección de incremento de la coordenada rectangular correspondiente. Puede observarse también que cada uno de estos vectores unitarios es perpendicular a los otros dos.

Como se verá más adelante, a menudo es deseable definir otros vectores unitarios.

1-4 Componentes

Para poder seguir adelante, resultaría conveniente referir todos los vectores a sistemas coordenados específicos. En la figura 1-7 se observa que un vector **A** puede escribirse como la suma de tres vectores, cada uno paralelo a uno de los ejes en un sistema coordenado rectangular; es decir, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z$. Pero es más útil aún expresar cada uno de estos términos como el producto de un escalar por el vector unitario correspondiente de la figura 1-6. Así, se puede escribir $\mathbf{A}_x = A_x \hat{\mathbf{x}}$, etc., por lo que la expresión anterior se convierte en

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-5}$$

Los tres escalares A_x, A_y y A_z reciben el nombre de *componentes* de **A**; de esta manera, se ve que cualquier vector puede especificarse con tres números. Las componentes pueden ser positivas o negativas; por ejemplo, si A_x fuese negativa, entonces el vector $\mathbf{A}_x$ de la figura 1-7 tendría una dirección apuntando hacia las x decrecientes.

En la figura 1-7 se aprecia también que la magnitud de un vector puede expresarse en función de sus componentes:

$$A = |\mathbf{A}| = \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{1/2} \tag{1-6}$$

En la figura 1-8 se muestra que **A** forma ángulos específicos con cada uno de los ejes; estos ángulos, α, β, y γ, reciben el nombre de *ángulos directores* de **A** y se miden a partir de la dirección positiva de cada uno de los ejes. La figura 1-9 muestra el plano que contiene a **A** y a $\hat{\mathbf{x}}$, y en ella se aprecia que A_x está dado por $A_x = A\cos\alpha$. Al combinar esta ecuación con la (1-6) se obtiene

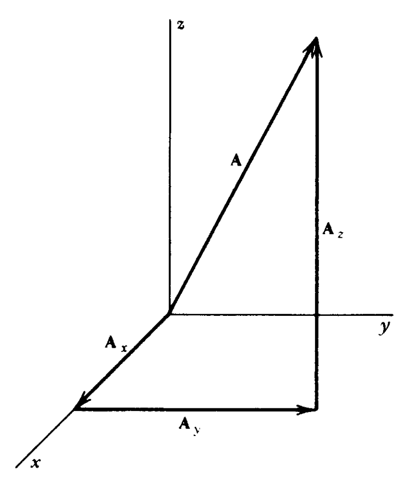


Figura 1-7. **A** es la suma de las componentes vectoriales rectangulares.

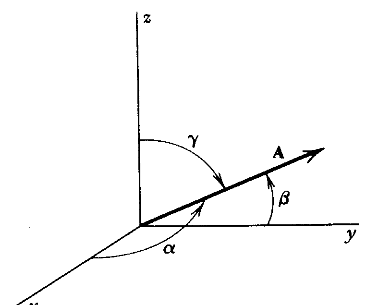


Figura 1-8. Definición de los ángulos directores.

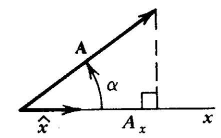


Figura 1-9. A_x es la componente x de A.

$$l_x = \cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{1/2}} \tag{1-7}$$

donde l_x recibe el nombre de *coseno director.* Existen expresiones similares para los otros dos ángulos directores, β y α, y sus cosenos directores asociados, l_y y l_z, de tal manera que se puede concluir, a partir de (1-6) y (1-7) que, si se conocen los componentes rectangulares de un vector, se pueden calcular tanto su magnitud como su dirección.

Si ahora se combinan (1-4), (1-5) y (1-7), se ve que un vector unitario, â, puede también escribirse como

$$\hat{\mathbf{a}} = l_x\hat{\mathbf{x}} + l_y\hat{\mathbf{y}} + l_z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-8}$$

de manera que las componentes de un vector unitario en determinada dirección son simplemente los cosenos directores asociados con esa dirección. Si se le aplica ahora el resultado general dado por (1-6) al vector unitario específico â, se obtiene la importante relación entre los cosenos directores:

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1 \tag{1-9}$$

que también puede obtenerse de (1-7), y sus análogas.

La adición de vectores que se ilustra en la figura 1-4 puede expresarse muy fácilmente en función de las componentes rectangulares. De la figura 1-10 se desprende que una

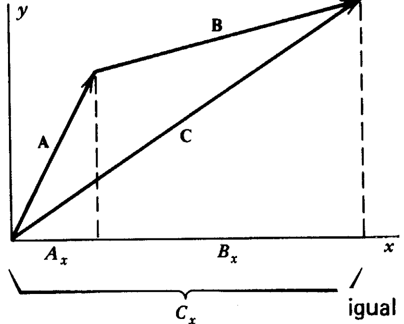


Figura 1-10. La componente de una suma es igual a la suma de las componentes correspondientes.

componente de la suma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ está dada por la suma de las componentes correspondientes, es decir,

$$C_x = A_x + B_x, \qquad C_y = A_y + B_y, \qquad C_z = A_z + B_z \tag{1-10}$$

1-5 Vector de posición

Considérese ahora un ejemplo sencillo de un vector. Como se aprecia en la figura 1-11, la localización de un punto específico, P, en el espacio puede especificarse por medio de un vector, **r**, trazado desde el origen de un sistema coordenado elegido; a este vector **r** se le llama *vector de posición* del punto P. En relación al sistema coordenado rectangular de la figura 1-6, las componentes de **r** son simplemente las coordenadas (x, y, z) del punto; de esta manera, se tiene que

$$r = x\mathbf{x} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-11}$$

De manera similar, otro punto, P', cuyas coordenadas sean (x', y', z') se podrá localizar por medio de su vector de posición $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$ como se muestra en la figura 1-12. Ahora que se tienen localizados los dos puntos por separado, se puede escribir la posición de uno de ellos con respecto al otro dibujando un vector de P' a P; a este vector **R** se le llama el *vector de posición relativa* de P con respecto a P'. De la figura 1.12 se ve que $\mathbf{r}' + \mathbf{R} = \mathbf{r}$, de manera que

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \tag{1-12}$$

Utilizando (1-10) y (1-11) se puede expresar **R** en forma de componentes como

$$\mathbf{R} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}} \tag{1-13}$$

y, por lo tanto,

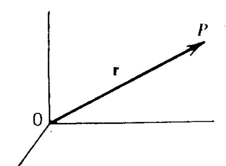


Figura 1-11. **r** es el vector de posición del punto P.

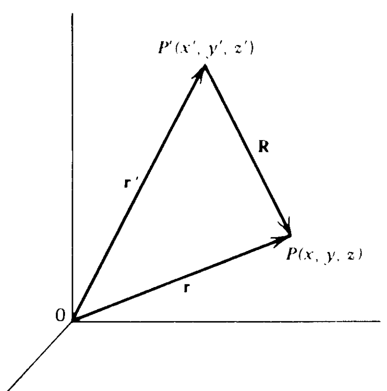


Figura 1-12. **R** es el vector de posición relativa de P con respecto a P'.

$$R=\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2} \tag{1-14}$$

debido a (1-6). Más adelante se utilizarán estos resultados con mucha frecuencia. Nótese que la posición relativa de P' con respecto a P está dada por el vector $\mathbf{R}'$ trazado de P a P' y que, en efecto, $\mathbf{R}'=-\mathbf{R}$.

Aunque no se da mayor especificación respecto al sistema coordenado aparte de decir que éste se eligió convenientemente, una vez que se hace esta elección en un caso particular, se dice que el sistema coordenado está "fijo en el espacio" y que sus vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ son constantes tanto en dirección como en magnitud. En otras palabras, el sistema coordenado fijo que se utiliza es simplemente uno de tantos marcos de referencia inerciales tan conocidos en la mecánica clásica.

Considérese ahora la multiplicación de vectores; se definirán dos tipos de productos.

1-6 Producto escalar

El *producto escalar* de dos vectores se define como el escalar igual al producto de las magnitudes de los vectores y el coseno del ángulo que forman entre sí, o sea.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\Theta \tag{1-15}$$

Debido a su notación particular, el producto escalar también recibe el nombre de *producto punto*.

En la figura 1-13 se muestra una interpretación simple del producto escalar: $(B\cos\Theta)A$ = "componente de **B** en la dirección de **A** por la magnitud de **A**" = $(A\cos\Theta)B$ = "componente de **A** en la dirección de **B** por la magnitud de **B**"

De la ecuación (1-15) resulta obvio que el orden de los factores no altera el producto escalar, es decir,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \tag{1-16}$$

y que si dos vectores son perpendiculares entre sí, entonces $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ y recíprocamente. Más aún, el cuadrado de un vector se puede interpretar como el vector multiplicado escalarmente por sí mismo; el resultado es el cuadrado de su magnitud, por lo que se puede escribir

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=A^2 \tag{1-17}$$

Si únicamente se conocieran las componentes rectangulares de **A** y de **B**, no sería conveniente calcular $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ a partir de (1-15), ya que ello requeriría que se conociera el ángulo que forman entre sí. Afortunadamente, es posible expresar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ directamente en función de las componentes rectangulares. Dado que el ángulo entre cada par de vectores unitarios de los definidos en la figura 1-6 es de 90°, se aprecia fácilmente que, de acuerdo con (1-15),

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{x}}=0 \tag{1-18}$$

y por (1-17)

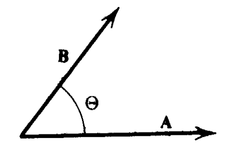


Figura 1-13. El ángulo relativo al producto escalar.

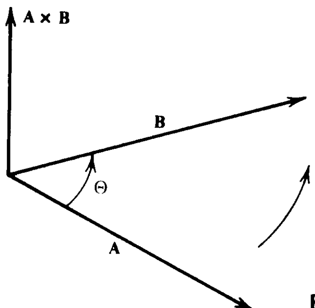


Figura 1-14. Definición de la dirección del producto cruz.

$$\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=1 \tag{1-19}$$

Si se escriben **A** y **B** en la forma (1-5), entonces éstos se pueden multiplicar entre sí término a término para obtener

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=(A_x\hat{\mathbf{x}}+A_y\hat{\mathbf{y}}+A_z\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}}+B_y\hat{\mathbf{y}}+B_z\hat{\mathbf{z}})\\&=A_xB_x\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{x}}+A_xB_y\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}+A_xB_z\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}}+\dots\end{aligned}$$

y, tras usar (1-18) y (1-19) para simplificar los nueve términos resultantes, se obtiene

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1-20}$$

Supóngase ahora que $\hat{\mathbf{e}}$ es un vector unitario que va en una dirección específica. Si $\mathbf{A}_e$ se define como la componente de **A** en esa dirección, se obtiene, usando (1-15), que

$$A_e=\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{e}} \tag{1-21}$$

1-7 Producto vectorial

A éste también se le llama *producto cruz* porque se escribe **A** × **B**. El resultado es un vector perpendicular *tanto* a **A** *como* a **B** y su magnitud se define como

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=A\,B\operatorname{sen}\Theta \tag{1-22}$$

Su dirección se determina según la siguiente regla de la mano derecha: si se doblan los dedos de la mano derecha en el sentido necesario para hacer girar a **A** hacia la misma dirección de **B** siguiendo el ángulo más pequeño entre ellos, el pulgar indicará la dirección de **A**×**B**. Esta regla se ilustra en la figura 1-14.

Si se observa el plano que contiene a **A** y a **B** en la figura 1-15, se tiene una interpretación sencilla del producto cruz. De la figura y de (1-22) se desprende que la magnitud del producto cruz es igual al área del paralelogramo que tiene a **A** y a **B** como lados.

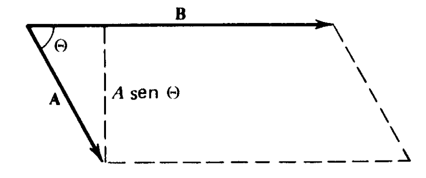


Figura 1-15. Interpretación de la magnitud de un producto cruz como un área.

A partir de la definición de la dirección del producto cruz dada en la figura 1-14, resulta evidente que el orden de los factores sí es importante en este caso, ya que

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A} = -(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{1-23}$$

Si **A** y **B** son paralelos, de (1-122) se desprende que **A** × **B** es igual a cero, y recíprocamente. En particular,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0 \tag{1-24}$$

Para los vectores unitarios en la dirección de los ejes, mostrados en la figura 1-6, si se utilizan (1-22), la regla de la mano derecha, el hecho de que son mutuamente perpendiculares y que el producto cruz es perpendicular a ambos vectores, se obtiene

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}, \qquad \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{x}}, \qquad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \tag{1-25}$$

y, de acuerdo con (1-24)

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}} = 0 \tag{1-26}$$

El producto vectorial se puede escribir también en función de las componentes rectangulares. Siguiendo un desarrollo similar al que se utilizó para obtener (1-20), se escriben **A** y **B** en la forma (1-5) y se multiplican término a término, utilizando después (1-23), (1-25) y (1-26) para simplificar los resultados. Se encuentra así que

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}} \tag{1-27}$$

Esto puede escribirse como un determinante muy fácil de recordar:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1-28}$$

Se deja como ejercicio verificar que

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1-29}$$

y que

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \tag{1-30}$$

En (1-29) se observa que el punto y la cruz se pueden intercambiar sin efectuar el triple producto escalar; por ello, los paréntesis no son realmente necesarios. En el triple producto cruz (1-30), sin embargo, los paréntesis sí son importantes porque $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = -\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$, por (1-23).

La división de vectores no está definida.

1-8 Derivación con respecto a un escalar

Supóngase que **A** es una función continua de una variable escalar, σ, de tal manera que se pueda escribir $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\sigma)$. Esto es equivalente a las tres ecuaciones escalares: $A_x = A_x(\sigma)$, $A_y = A_y(\sigma)$ y $A_z = A_z(\sigma)$. Si σ cambia a $\sigma + \Delta\sigma$, **A** generalmente puede variar tanto en dirección como en magnitud, como se muestra en la figura 1-16. El cambio en **A** es $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(\sigma + \Delta\sigma) - \mathbf{A}(\sigma)$. Se puede entonces definir la derivada del vector **A** con respecto al escalar σ como sigue:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\mathbf{A}(\sigma+\Delta\sigma) - \mathbf{A}(\sigma)}{\Delta\sigma} \tag{1-31}$$

Este proceso produce un vector a partir del otro. Ejemplos comunes de (1-31) son la velocidad y la aceleración de una partícula, que son derivadas sucesivas del vector de posición con respecto al tiempo.

Si **A** se escribe en función de sus componentes rectangulares, como en (1-5), y dado que los vectores unitarios son constantes, entonces de (1-31) se desprende que las componentes de la derivada son las derivadas de las componentes respectivas, por lo que se tiene

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} = \frac{dA_x}{d\sigma}\hat{\mathbf{x}} + \frac{dA_y}{d\sigma}\hat{\mathbf{y}} + \frac{dA_z}{d\sigma}\hat{\mathbf{z}} \tag{1-32}$$

Una vez definida la derivada de **A**, se puede proseguir con su diferencial $d\mathbf{A}$, que viene a representar un cambio infinitesimal de **A**. Esto se logra al multiplicar (1-32) por $d\sigma$ para obtener

$$d\mathbf{A} = dA_x\hat{\mathbf{x}} + dA_y\hat{\mathbf{y}} + dA_z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-33}$$

Aplicando este resultado al vector de posición de (1-11), se obtiene

$$d\mathbf{r} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}} \tag{1-34}$$

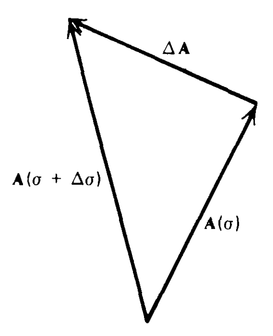


Figura 1-16. ΔA es el cambio en el vector que corresponde al cambio $\Delta\sigma$ del escalar.

1-9 Gradiente de un escalar

Supóngase que se tiene una cantidad escalar, u, que tiene función de posición, de tal manera que se pueda escribir $u = (x, u, z)$. Tal función recibe el nombre de *campo escalar*. Un ejemplo sería la temperatura en cada punto de una habitación. En un punto dado, separado

por ds de otro punto, el valor del escalar habría variado de u a $u + du$ (véase la figura 1-7). De hecho,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz \tag{1-35}$$

debiendo tomarse en cuenta que las derivadas se evalúan en el punto original, es decir, $\partial u/\partial x = (\partial u/\partial x)_P$, y así sucesivamente. Aunque para el desplazamiento se utilizó $d\mathbf{s}$, resulta evidente que en este caso se trata en realidad del cambio $d\mathbf{r}$ en el vector de posición del punto, de manera que

$$d\mathbf{s} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}} \tag{1-36}$$

de acuerdo con (1-34). Al comparar (1-35) y (1-36) con (1-20), se puede ver que du también se puede escribir como el producto de $d\mathbf{s}$ y el vector

$$\nabla u = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1-37}$$

de modo que

$$du = d\mathbf{s}\cdot\nabla u \tag{1-38}$$

El vector obtenido de esta manera y que está expresado en función de sus componentes rectangulares en (1-37), recibe el nombre de *gradiente* de u y se suele escribir como grad u. Se puede considerar a (1-38) como la definición general de ∇u, ya que es independiente de cualquier sistema coordenado en particular. En otras palabras, el gradiente es la cantidad que da el cambio en el escalar cuando se realiza el producto punto con el desplazamiento.

Para entender el significado del gradiente, considérese la figura 1-18, en la que se muestra una serie de superficies, cada una formada por aquellos puntos para los que u tiene el mismo valor; en otras palabras, son superficies de u constante, con sus valores correspondientes de $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Un desplazamiento tal como $d\mathbf{s}_1$, que mueve el punto a otro lugar de la misma superficie, no lo moverá a un punto donde u haya cambiado. Por lo tanto, $du_1 = d\mathbf{s}_1 \cdot \nabla u = 0$. Al comparar esto con (1-5), se ve que ∇u y $d\mathbf{s}_1$ son perpendiculares entre sí; por lo tanto, ∇u es perpendicular a una superficie de u constante, como también se muestra en la figura 1-18.

Considérense ahora desplazamientos de magnitud constante, ds_0, a partir de un punto dado pero con direcciones diferentes, tales como $d\mathbf{s}'$, $d\mathbf{s}''$ y $d\mathbf{s}'''$ que aparecen en la fi-

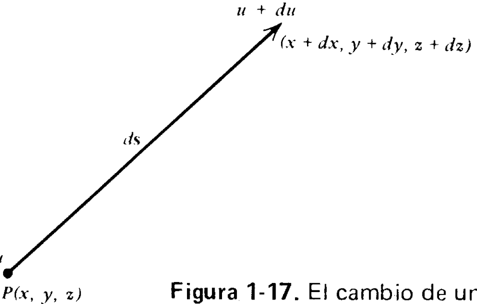


Figura 1-17. El cambio de una función escalar de la posición u como resultado del desplazamiento $d\mathbf{s}$.

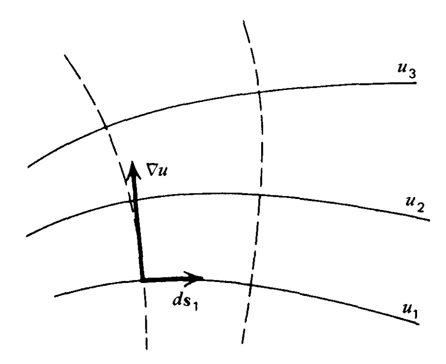


Figura 1-18. Superficies de u constante. El gradiente es perpendicular a tales superficies.

gura 1-19. De acuerdo con (1-38) y (1-15), se puede ver que el cambio en u que resulta de cualquiera de estos desplazamientos es $du = ds_o \; |\Delta u| \cos\Theta$ y que es diferente para cada uno de los desplazamientos únicamente por la diferencia en el valor de Θ, o sea, el ángulo entre el desplazamiento y la dirección misma de ∇u. Puede verse ahora que du será máxima para $\cos\Theta = 1$, es decir, $\Theta = 0$ lo cual corresponde al caso en que ∇u y el desplazamiento correspondiente son paralelos. En otras palabras, la dirección del gradiente es también la dirección en la que el escalar tiene su más alta razón de cambio.

Un vector unitario, $\hat{\mathbf{n}}$, perpendicular a una superficie dada en un punto específico, recibe el nombre de *vertical normal*; la figura 1-20 muestra el vector normal a una superficie u = const. Pero se acaba de ver que ∇u es también perpendicular a la superficie; por lo tanto $\hat{\mathbf{n}}$ y $\nabla \mathbf{u}$ son paralelos. Así, de acuerdo con (1-4), se puede escribir

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \tag{1-39}$$

En este caso $\hat{\mathbf{n}}$ también indica la dirección en la que u está aumentando.

Ejemplo

Considérese un caso bidimensional para que $u = y^2 - kx$, siendo k = cont. Si se escribe $y^2 = kx + u$, se puede ver que las superficies de u constante son curvas en el plano xy. De hecho, son parábolas tales como las que se ilustran en la figura 1-21 para $k = 1$ y algunos valores específicos de u. Al sustituir esta expresión de u ($k = 1$) en (1-37) se obtiene

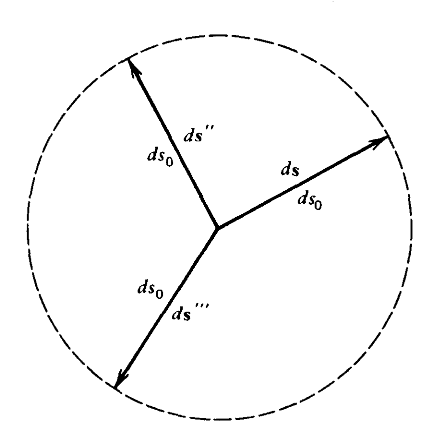


Figura 1-19. Desplazamientos de magnitud constante pero de direcciones diferentes.

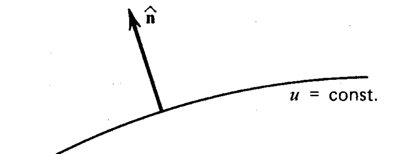


Figura 1-20. Definición del vector normal.

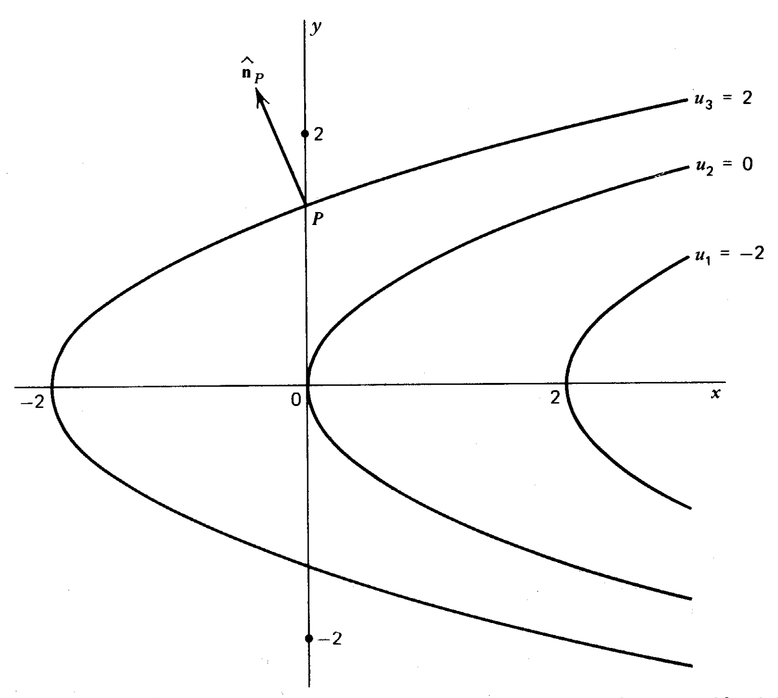


Figura 1-21. Superficies de u constante para el ejemplo de la sección 1-9.

$$\nabla u = -\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}}$$

de manera que, por (1-6), $|\nabla \mathbf{u}| = (1 + 4y^2)^{1/2}$ y, por lo tanto, usando (1-39),

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}}}{(1+4y^2)^{1/2}} \tag{1-40}$$

Al usar este resultado se debe, desde luego, utilizar el valor de y que corresponde a un punto de la curva para la u dada. Por ejemplo, evalúese $\hat{\mathbf{n}}$ para el punto P de la figura 1-21 donde la parábola correspondiente a $u_3 = 2$ cruza el eje y positivo. Aquí, $x_p = 0$ y $y^2{}_p = x_p + u_3 = 2$, de tal manera que $y_p = \sqrt{2}$. Al sustituir este valor en (1-40) se obtiene $\hat{\mathbf{n}}_p = -\frac{1}{3}\hat{\mathbf{x}} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\hat{\mathbf{y}}$. Este vector, con su componente x negativa y una componente y bastante más grande, también se ilustra en la figura.

1-10 Otras operaciones diferenciales

Es muy posible que las componentes de un vector también dependan de su posición, por ejemplo $A_x(x, y, z)$ y así sucesivamente. En este caso $\mathbf{A}$ cambiará con la posición, ya sea en magnitud, en dirección o en ambas, por lo que se puede escribir $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

En este último término se utilizó una notación compacta muy conveniente para expresar que **A** es una función de las coordenadas del punto mediante su vector de posición. Un vector cuyo valor está definido para cada punto del espacio, recibe el nombre de *campo vectorial*. Considérense ahora algunas maneras específicas en que tal vector puede variar con la posición.

Regresando a (1-37), se observa que ∇u puede interpretarse como el producto u y del *operador del* dado por

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-41}$$

Se puede demostrar que este operador un tanto abstracto tiene las mismas propiedades matemáticas que el desplazamiento de un punto, por lo que se le puede considerar como un vector legítimo. Siendo esto así, se pueden realizar dos operaciones diferenciales de interés por medio de las dos formas de multiplicar vectores.

Utilizando (1-20) y (1-41) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-42}$$

A este producto escalar se le da el nombre de *divergencia* de **A** y a menudo se escribe como div A.

Utilizando (1-27) y (1-41) se tiene

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{1-43}$$

A este producto vectorial se le llama el *rotacional* de **A** y a menudo escribe rot **A**. Se pueden usar los determinantes para lograr una expresión más conveniente para el rotacional, como en (1-28):

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1-44}$$

El significado de los nombres "divergencia" y "rotacional" se entenderá mejor a medida que se consideren situaciones donde aparecen de manera natural.

Otro operador de gran interés y utilidad es el *laplaciano*:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1-45}$$

Por ejemplo, si se aplica a un escalar,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1-46}$$

mientras que la expresión ∇^2 **A** representa las tres ecuaciones en que ∇^2 opera sobre cada una de las tres componentes rectangulares de **A**, es decir,

$$\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \tag{1-47}$$

con expresiones similares para las otras dos componentes.

Hay dos resultados muy útiles acerca del operador. De acuerdo con (1-24), el rotacional de un gradiente es cero:

$$\nabla \times \nabla u = 0 \tag{1-48}$$

En forma similar, la divergencia de un rotacional es cero.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{1-49}$$

de acuerdo con (1-29) y (1-24).

Es hora ya de estudiar algunas integrales, donde aparecen vectores. Aunque existen muchísimas posibilidades, hay dos que son de gran interés.

1-11 Integral de línea

Considérese un punto inicialmente en P_i (x_i, y_i, z_i), que se desplaza hacia una posición final P_f (x_f, y_f, z_f) siguiendo una curva específica, C, ("línea" o "trayectoria") tal como se muestra en la figura 1-22. Todo el recorrido a lo largo de esta trayectoria puede ser considerado como la suma vectorial de una sucesión de desplazamientos infinitesimales $d\mathbf{s}$ a lo largo de C. Supóngase que existe un campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que su valor puede encontrarse para cada punto del recorrido. En cada punto intermedio se evalúa $\mathbf{A}$, se multiplica su componente en la dirección de $d\mathbf{s}$ por la magnitud de $d\mathbf{s}$ y se suman todas estas cantidades. El resultado de esta operación recibe el nombre de *integral de línea* de $\mathbf{A}$ a lo largo de C, y está dada por

$$\int_i^f A \cos\Theta\, ds = \int_C A \cos\Theta\, ds = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \tag{1-50}$$

Quizá el ejemplo más conocido de una integral de línea sea el trabajo realizado sobre una partícula; en este caso $\mathbf{A}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula.

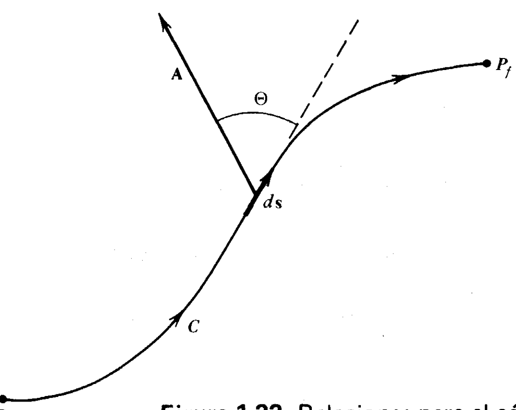


Figura 1-22. Relaciones para el cálculo de una integral de línea.

Si la trayectoria de integración siguiera una curva cerrada, por ejemplo un círculo, los puntos inicial y final coincidirían. En este caso la integral de línea se escribe así:

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$$

A esta integral a veces se le llama la circulación de **A**; dependiendo de la naturaleza de **A**, ésta puede o no ser igual a cero, tal como se verá más adelante.

Si **r** es el vector de posición de cada uno de los puntos C, entonces $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$, por lo que se pueden usar (1-20) y (1-34) para tener

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_C (A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz) \tag{1-51}$$

Al usar (1-51) se debe tener cuidado de tomar en cuenta que dx, dy y dz no se pueden variar independientemente debido a que las coordenadas x, y, y z están relacionadas entre sí por la ecuación de la curva. De manera similar, las expresiones para $A_x = A_x\,(x, y, z)$, etc., deben ser escritas tomando en cuenta esta interdependencia. Estas consideraciones quedarán mejor ilustradas al considerar el siguiente ejemplo específico.

Ejemplo

Sea $\mathbf{A} = x^2\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}} + z^2\hat{\mathbf{z}}$ y escójase como trayectoria aquella parte de la parábola $y^2 = x$ que se encuentra entre el origen $(0,0,0)$ y el punto $(2, \sqrt{2}, 0)$; esta curva es exactamente la parábola ilustrada como $u_2 = 0$ en la figura 1-21. Aquí $z =$ const., de manera que $dz = 0$ y el integrando de (1-51) resulta simplemente

$$A_x\,dx + A_y\,dy = x^2\,dx + y^2\,dy$$

Se puede escribir esto en función de una sola variable por medio de la ecuación de la curva. Dado que $y^2 = x$, $2y$, $dy = dx$ o $dy = dx/2\sqrt{x}$ y $y^2\ dy = 1/2\sqrt{x}\ dx$; así se obtiene

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^2 \left(x^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}x^{3/2}\right]_0^2 = \tfrac{2}{3}(4 + \sqrt{2})$$

1-12 Elemento vectorial de una superficie

Antes de estudiar integrales similares a las anteriores pero que representan sumas sobre áreas dadas, resulta de gran utilidad estudiar en detalle la representación vectorial de una superficie. En la figura 1-23 se muestra un elemento infinitesimal de una superficie, da, que tiene una orientación particular con respecto a los ejes coordenados. También se puede observar que es posible asociar una dirección a esta área, es decir, el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ que es normal a la superficie. Por tanto, es posible asociar un vector $d\mathbf{a}$ a este elemento de superficie y escribirlo como

$$d\mathbf{a} = da\,\hat{\mathbf{n}} \tag{1-52}$$

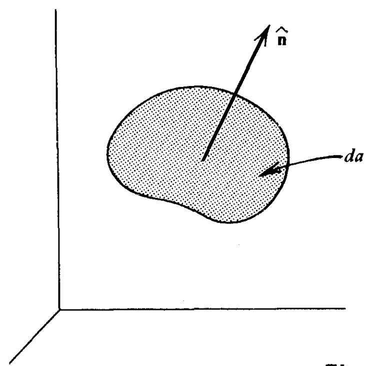


Figura 1-23. El vector normal de un elemento de superficie.

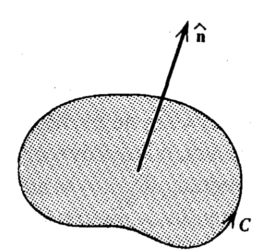


Figura 1-24. Definición de la dirección del vector normal.

de acuerdo con la forma general de (1-4). Sin embargo, queda alguna ambigüedad en esta definición, ya que se pudo haber elegido a $\hat{\mathbf{n}}$ en la dirección opuesta y sería también perpendicular al elemento de superficie *da*. Por ello se requiere completar (1-52) con alguna convención para definir el criterio a seguir; existen dos casos a considerar.

Primero, *da* puede ser parte de una superficie abierta, es decir, limitada por una curva cerrada, *C*; una página de este libro es un ejemplo de una superficie abierta. En este caso, el primer paso es *escoger* un sentido para la trayectoria de la curva que la limita; una vez hecho esto, dóblense los dedos de la mano derecha en el sentido asignado a esta trayectoria y, por convención, la dirección del pulgar será la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$. Esta regla de la mano derecha se ilustra en la figura 1-24; nótese que la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ quedaría invertida si el sentido de la trayectoria *C*, fuera el opuesto.

Segundo, *da* podría ser parte de una superficie cerrada. En este caso no existe una curva limitante *C*, sino que la superficie divide un volumen en dos partes: la interior y la exterior. La superficie de una pelota es un buen ejemplo de este tipo de superficies. En estos casos, la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ se elige de manera tal que siempre apunta *de* adentro *hacia* afuera. La figura 1-25 muestra las direcciones de la normal exterior para varios puntos de una de estas superficies.

Cuando se combina (1-52) con una expresión para $\hat{\mathbf{n}}$ de la forma (1-8), se puede escribir $d\mathbf{a}$ en forma de componentes:

$$d\mathbf{a} = da_x\hat{\mathbf{x}} + da_y\hat{\mathbf{y}} + da_z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-53}$$

donde

$$da_x = l_x da \qquad da_y = l_y da \qquad da_z = l_z da \tag{1-54}$$

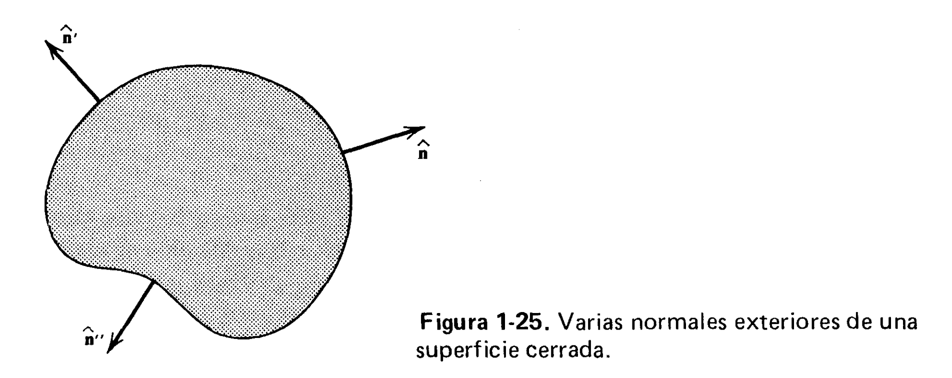


Figura 1-25. Varias normales exteriores de una superficie cerrada.

siendo ℓ_x, ℓ_y y ℓ_z las componentes de $\hat{\mathbf{n}}$, es decir, sus cosenos directores. Después de usar integrales múltiples con frecuencia, resulta obvio que el término $dxdy$ puede representar un elemento de superficie en el plano xy, y ello sugiere que debe haber alguna relación entre esta expresión y las componentes de $d\mathbf{a}$. Para poder encontrar esta relación considérese la figura 1-26, que ilustra un elemento de superficie rectangular, da, cuyos lados son b y c, de manera que $da = bc$. El plano de la superficie es paralelo al eje y por lo que $\hat{\mathbf{n}}$ es paralelo al plano xz y forma un ángulo γ con el eje z; la figura 1-27 muestra una vista de perfil mirando hacia el origen a lo largo del eje y. En las figuras también se aprecian las proyecciones de la superficie sobre los planos xy y yz; estas proyecciones dan rectángulos cuyas áreas son $dxdy$ y $dydz$ respectivamente; resulta evidente también, mirando la figura, que $dy = c$. La proyección de da sobre el plano xz es la recta marcada como b en la figura 1-27. Los otros dos ángulos directores de $\hat{\mathbf{n}}$ se pueden obtener si se comparan estas dos figuras con la figura 1-8, y así se ve que $\alpha = 90° - \gamma$ y que $\beta = 90°$, de tal manera que los cosenos directores son $l_x = \operatorname{sen} \gamma$, $l_y = 0$ y $l_z = \cos \gamma$. Al sustituir estos valores en (1-54), y de acuerdo con la figura 1-27, se encuentra que $da_z = da \cos \gamma = (b \cos \gamma)\, c = dxdy$, que es justamente la proyección del área da sobre el plano xy, es decir, la proyección perpen-

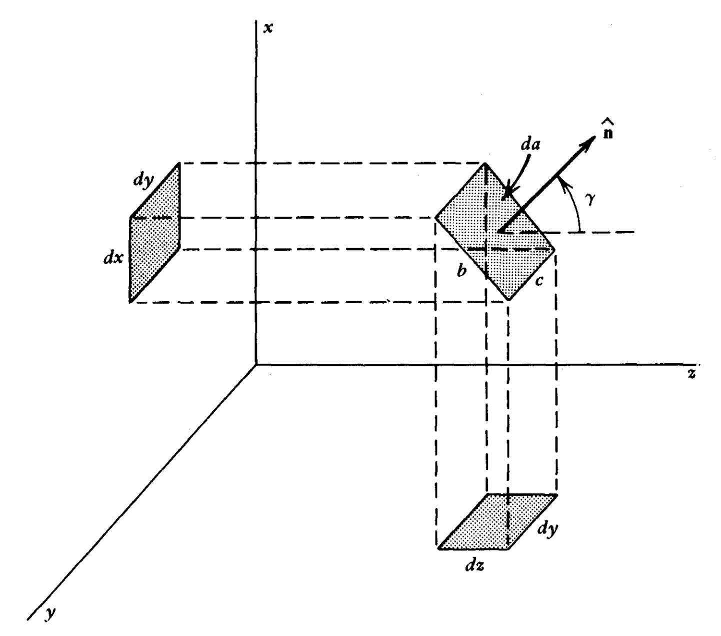


Figura 1-26. Determinación de las componentes de un elemento de superficie vectorial.

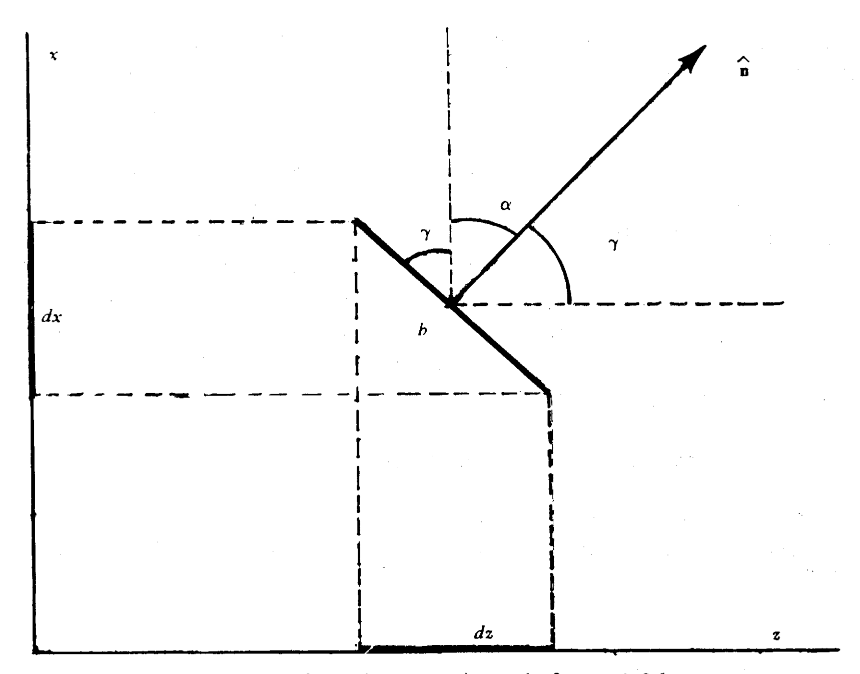


Figura 1-27. Vista de perfil de la situación de la figura 1-26.

dicular al eje coordenado correspondiente. De manera similar se encuentra que $da_x = dydz$ mientras que $da_y = 0$ para este caso particular.

Supongase ahora que n_z fuera negativo, de manera que $\gamma > 90°$, mientras que todo lo demás quedara igual; este caso queda ilustrado en la figura 1-28. Al compararla con la figura 1-26, se observa que las proyecciones sobre los planos xy y yz seguirán siendo los

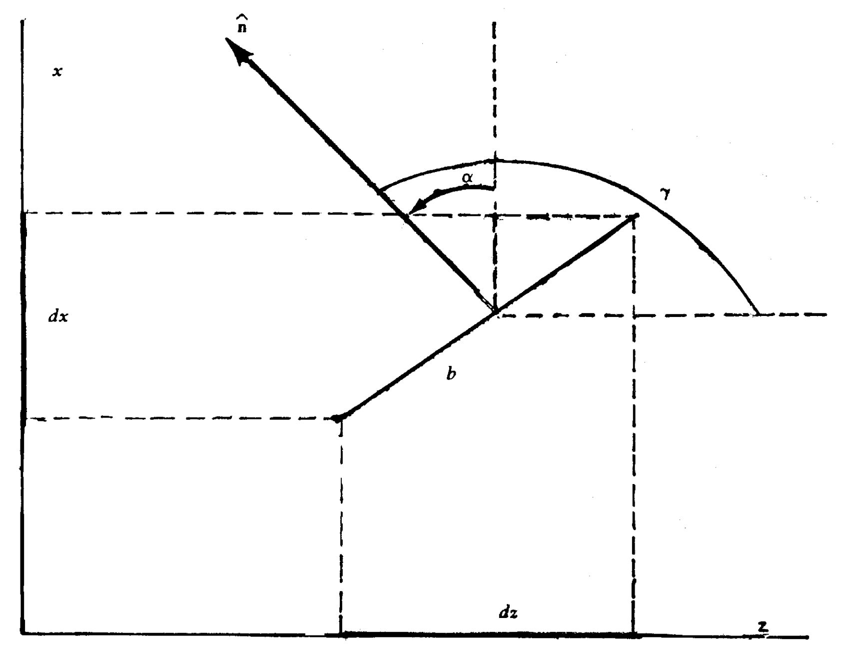


Figura 1-28. Un elemento de superficie con componente z negativa.

rectángulos de áreas $dxdy$ y $dydz$ respectivamente; sin embargo, ahora el coseno de γ es negativo, por lo que $da_z = da \cos \gamma = -dxdy$. Por otra parte, dado que $\alpha = \gamma - 90°$, el coseno α será positivo y $da_x = dydz$, igual que antes, da_y sigue siendo cero.

Estas consideraciones pueden generalizarse para el caso en que **n** forme ángulos arbitrarios con todos los ejes. La magnitud de una componente dada de $d\mathbf{a}$ en la dirección de un eje dado será igual a su proyección sobre el plano coordenado perpendicular al eje, y estará dada en coordenadas rectangulares, por el producto de las diferenciales correspondientes. Puesto que siempre se consideran estas diferenciales como positivas tal como se escriben, la componente correcta se obtiene multiplicando el producto por un signo ya sea positivo o negativo, dependiendo del signo de la componente correspondiente de $\hat{\mathbf{n}}$. De esta manera se encuentra una representación de las componentes rectangulares de un elemento de superficie, y se puede escribir

$$da_x = \pm\, dydz \qquad da_y = \pm\, dzdx \qquad da_z = \pm\, dxdy \tag{1-55}$$

donde se usa el signo positivo para una componente si el ángulo director de $\hat{\mathbf{n}}$ con respecto al eje correspondiente es menor de 90° y el signo menos cuando el ángulo director es mayor de 90°.

1-13 Integral de superficie

Considérese una superficie S; como se indica en la figura 1-29, se puede dividir a S en elementos de área $d\mathbf{a}$ tal como se estudió en la sección que precede. Supóngase que existe un campo vectorial **A** tal que su valor quede definido para todos los puntos de S. Para cada elemento de área se evalúa **A**, se multiplica su componente en la dirección de $d\mathbf{a}$ por la magnitud de $d\mathbf{a}$ y se suman todas estas cantidades. Al resultado así obtenido se le denomina la *integral de superficie* de **A** sobre S, y está dada por

$$\int_S A \cos \Theta\, da = \int_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \tag{1-56}$$

A esta integral también se le llama el *flujo* del vector **A** a través de la superficie S. Se ha escrito (1-56) con un solo signo de integral por conveniencia aunque se trata de una integral doble.

Si la superficie es cerrada, resulta de utilidad indicar este hecho en forma explícita escribiendo la integral como

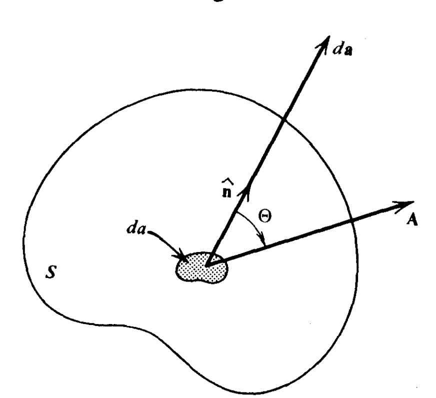


Figura 1-29. Relaciones para el cálculo de una integral de superficie.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

El valor de la misma puede ser o no igual a cero, dependiendo de la naturaleza misma de **A**, como se verá más adelante.

Si se utilizan (1-20) y (1-53), se puede escribir (1-56) en función de las coordenadas rectangulares en la forma

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (A_x da_x + A_y da_y + A_z da_z) \tag{1-57}$$

Para poder usar (1-57) se requiere utilizar también (1-55) y tener muy en cuenta que dx, dy y dz no pueden ser variadas en forma independiente porque las coordenadas x, y y z están relacionadas entre sí por la ecuación que describe la superficie S. Esta interdependencia debe también tomarse en cuenta para determinar los límites de la integración, y al escribir las componentes tales como $A_x = A_x(x, y, z)$. Considérese un caso específico para ilustrar estos conceptos.

EJEMPLO

Sea $\mathbf{A} = yz\hat{\mathbf{x}} + zx\hat{\mathbf{y}} + xy\hat{\mathbf{z}}$ y escójase como superficie S aquélla parte del círculo de radio a centrada en el origen que se encuentra en el primer cuadrante del plano xy, tal como se muestra en la figura 1-30; la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = a^2$. Aquí la superficie es perpendicular al eje z de manera que $\hat{\mathbf{n}}$ puede tomarse ya sea como $\hat{\mathbf{z}}$ o como $-\hat{\mathbf{z}}$. Elíjase arbitrariamente $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$; así, la única componente de $d\mathbf{a}$ es $da_z = dxdy$, calculada según (1-55) con signo positivo ya que el ángulo director es $\gamma = 0$ ahora (1-57) se convierte en

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_S xy\, dx\, dy \tag{1-58}$$

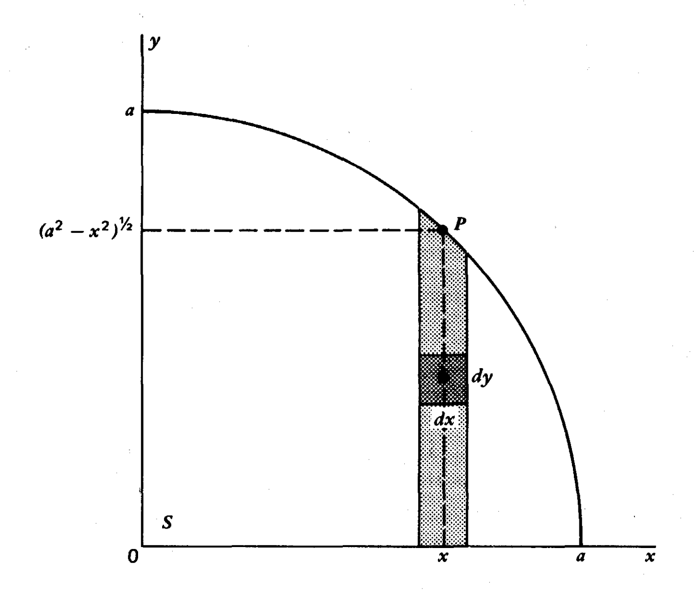


Figura 1-30. Area de integración para el ejemplo de la sección 1-13.

El elemento de superficie se muestra en la figura con sombreado más oscuro. Para evaluar la integral, escójase integrar primero sobre y, manteniendo x constante; esto dará las contribuciones de la franja de sombreado claro. El límite superior de la integración sobre y es el punto P, que se encuentra a partir de la ecuación de la circunferencia para este valor dado de x, es decir, $y_P = (a^2 - x^2)^{1/2}$. Después de esto se integra sobre todos los valores posibles de x, sumando las contribuciones de franjas similares y, por lo tanto, cubriendo toda la superficie S. Así, la ecuación (1-58) queda

$$\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} = \int_0^a x\,dx \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} y\,dy = \int_0^a x\,dx\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{(a^2-x^2)^{1/2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^a x(a^2-x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}a^2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^a = \tfrac{1}{8}a^4$$

A continuación se ven dos importantes teoremas relativos a los tipos de integrales recién discutidos.

1-14 Teorema de la divergencia

Considérese un volumen, V, encerrado por una superficie, S. El *teorema de la divergencia de Gauss* dice que

$$\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau \tag{1-59}$$

Las integrales se evalúan sobre toda la superficie S y para todo el volumen V, cuyo elemento de volumen es $d\tau$. Por simple conveniencia se ha vuelto a escribir la integral de volumen con un solo signo de integración, aunque en realidad se trata de una integral triple. Dado que S es una superficie cerrada, la normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$ que se usa para $d\mathbf{a}$ es la normal exterior, según la convención de la sección 1-12 y como se muestra en la figura 1-25.

Este teorema relaciona la integral de superficie de un vector con la integral de volumen de su divergencia. La integral de superficie depende solamente de los valores de $\mathbf{A}$ en la superficie, mientras que la integral de volumen requiere del conocimiento de $\nabla\cdot\mathbf{A}$ (pero no de $\mathbf{A}$ mismo) en todo el volumen.

La demostración de este teorema se da por evaluación directa. En coordenadas rectangulares el elemento de volumen es

$$d\tau = dx\,dy\,dz \tag{1-60}$$

y, de acuerdo con (1-42), se puede escribir la integral de volumen como una suma:

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau = \int_V \frac{\partial A_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \int_V \frac{\partial A_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + \int_V \frac{\partial A_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz \tag{1-61}$$

Considérese la primera integral. El primer paso será evaluar la integral sobre x, manteniendo constantes a y y a z con valores y_0 y z_0, respectivamente. De esta manera, se suman las contribuciones de una varilla cuya sección es $dydz$. La figura 1-31 muestra esta varilla, indicando también su proyección sobre el plano yz. La varilla intersecta la superficie S en los puntos P_1 y P_2, definiendo así los elementos de superficie $d\mathbf{a}_1$ y $d\mathbf{a}_2$ de S, cuyas direcciones son las que se muestran. (Para mayor claridad, el resto de V y de S no se muestran en la

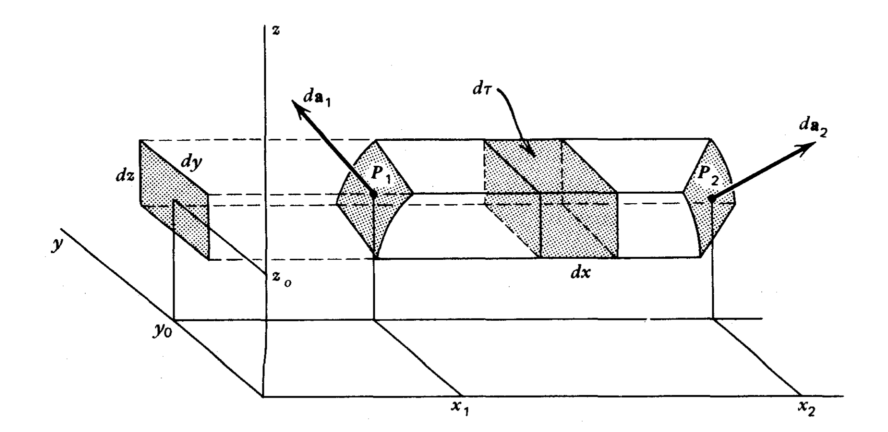


Figura 1-31. Volumen utilizado para demostrar el teorema de la divergencia.

figura.) Las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 son (x_1, x_0, z_0) y (x_2, y_0, z_0) respectivamente, donde x_1 y x_2 son los valores que satisfacen la ecuación de la superficie S; así, x_1 y x_2 son los límites de integración para x. Así, en este paso, $\partial A_x/\partial x$ es función solamente de x, dado que y y z se mantienen constantes, de manera que $(\partial A_x/\partial x)dx = dA_x$.

Por lo tanto, la primera integral de (1-61) es

$$\int\int dy\,dz\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial A_x}{\partial x}dx=\int\int\left[A_x(x_2,y_0,z_0)-A_x(x_1,y_0,z_0)\right]dy\,dz \qquad (1\text{-}62)$$

En el integrando de este resultado, el término que está entre corchetes es la diferencia entre los valores de A_x calculados en los puntos P_1 y P_2, por lo que lo podemos escribir como $A_x(P_2) - A_x(P_1)$. De acuerdo con (1-55) y la figura 1-31, se ve que $da_{2x} = dydz$ mientras que $da_{1x} = -\,dydz$, debido a que los ángulos entre estas superficies y el eje x son menor y mayor de 90°, respectivamente. El integrando de (1-62) puede escribirse como

$$A_x(P_2)da_{2x}-A_x(P_1)(-da_{1x})=A_{x2}da_{2x}+A_{x1}da_{1x} \qquad (1\text{-}63)$$

que es igual a la contribución total de la integral de superficie de $A_x da_x$ proveniente de los elementos de superficie da_2 y da_1 formados por la intersección de la varilla con la superficie S. Así, cuando se evalúa la integral sobre y y sobre z en (1-62), se están sumando las contribuciones de todas las varillas de este tipo; la contribución de cada varilla será $A_x da_x$ por la parte que le corresponde del área total, de manera que el resultado final será la integral de superficie de $A_x da_x$ sobre toda la superficie S. En otras palabras, se ha encontrado que:

$$\int_V\frac{\partial A_x}{\partial x}dx\,dy\,dz=\oint_S A_x\,da_x \qquad (1\text{-}64)$$

De manera similar, las dos últimas integrales (1-61) resultan ser

$$\oint_S A_y\,da_y \qquad \text{y} \qquad \oint_S A_z\,da_z$$

respectivamente, de tal manera que si se suman éstas a (1-64), se sustituye en (1-61) y se usa (1-20), se obtiene

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \oint_S (A_x da_x + A_y da_y + A_z da_z) = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

que es exactamente (1-59), con lo que queda demostrado el teorema.

La demostración se hizo para un volumen limitado por una sola superficie, pero se podría fácilmente extender esta demostración a una región limitada por varias superficies, por ejemplo, una esfera hueca. La figura 1-32 muestra un volumen, V, limitado por dos superficies, S_1 y S_2; se muestran también dos normales exteriores características referidas al volumen y marcadas como $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$. Supóngase ahora que un plano intersecta el volumen dividiéndolo en dos volúmenes, V_2 y V_1; las líneas punteadas AB y CD muestran la traza de este plano. Ahora el volumen V_2 queda encerrado por una sola superficie formada por las porciones de S_2 y de S_1 a la izquierda del plano, más las superficies planas de intersección indicadas por AB y CD; la normal exterior de esta nueva porción de la superficie limitante se ha marcado como $\hat{\mathbf{n}}_2$. Para V_1 se aplican consideraciones similares; la normal correspondiente a este volumen es $\hat{\mathbf{n}}_1$. Al aplicar (1-59) a cada uno de estos volúmenes y después sumar los resultados, queda

$$\int_{V_1+V_2} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} + \int_{ABCD} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 da + \int_{ABCD} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 da$$

En las últimas dos integrales las normales son opuestas, por lo que para cada punto de $ABCD$, $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}_1$, mientras que los valores de A y da son los mismos; así, estas integrales se cancelan mutuamente, quedando

$$\int_{V_1+V_2} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_{S_1+S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$$

que es lo mismo que (1-59) porque el volumen total es $V_1 + V_2$ y la superficie limitante es $S_1 + S_2$.

Es obvio que esta demostración puede generalizarse a un número cualquiera de superficies introduciendo limitantes, cuantos planos de intersección iguales a $ABCD$ como sean necesarios.

Al aplicar el teorema de la divergencia a una situación específica sencilla, se obtiene un resultado muy útil e ilustrativo. Considérese un punto, P, en el centro de un pequeño volumen, ΔV. Si ΔV es suficientemente pequeño, $\nabla \cdot \mathbf{A}$ será casi constante para todo el volumen, de manera que es fácil observar que la integral de volumen de (1-59) puede escribirse

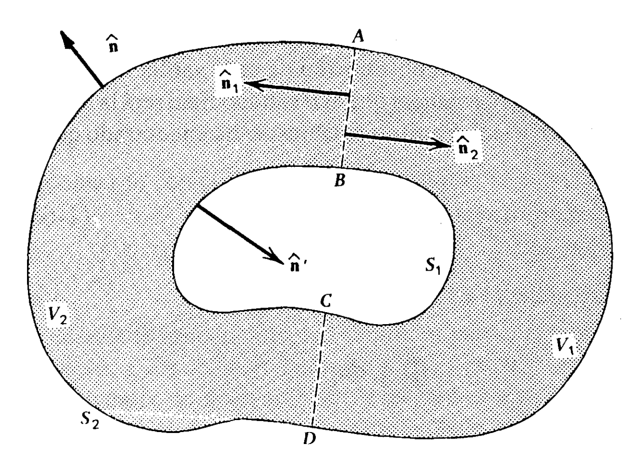


Figura 1-32. Un volumen limitado por dos superficies.

$$\int_{\Delta V} \nabla \cdot \mathbf{A}\, d\tau = \langle \nabla \cdot \mathbf{A} \rangle_P \Delta V$$

donde $\langle \nabla \cdot \mathbf{A} \rangle_P$ es el valor promedio de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en la vecindad de P. Sustituyendo en (1-59) y dividiendo entre ΔV, se obtiene

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{A} \rangle_P = \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \tag{1-65}$$

Si ahora se hace que $\Delta V \to 0$, mientra que P se mantiene en el centro, el valor promedio de $\nabla \cdot A$ en la vecindad de P llega a ser el valor de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ *en P*; si esto se escribe simplemente como $\nabla \cdot \mathbf{A}$, se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} : d\mathbf{a} \tag{1-66}$$

Esta expresión para $\nabla \cdot \mathbf{A}$ tiene una forma que es independiente de cualquier sistema coordenado particular, en contraste con (1-42), y por ello puede tomarse como la definición general de la divergencia de un vector en el mismo sentido que (1-38) es la definición general del gradiente. El resultado (1-66) también permite comprender mejor el significado de la divergencia, ya que se le puede interpretar como una medida del flujo (hacia afuera) del vector a través de una superficie pequeña que contiene al punto en cuestión.

Es posible partir de la definición (1-66) y, al evaluar el flujo de A a través de la superficie que encierra un volumen $\Delta_x\ \Delta_y\ \Delta_z$, encontrar la expresión en coordenadas rectangulares para $\nabla \cdot \mathbf{A}$; el resultado es, desde luego, (1-42)

1-15 Teorema de Stokes

Considérese una superficie, S, limitada por una curva, C. El *teorema de Stokes* dice que

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} \tag{1-67}$$

y relaciona así la integral de línea de un vector sobre una curva cerrada con la integral de superficie de su rotacional sobre la superficie encerrada. Dado que S es una superficie abierta, la dirección de $d\mathbf{a}$ en (1-67) queda determinada por el sentido que se haya elegido para la trayectoria C de acuerdo con (1-52) y la regla de la mano derecha que se ilustra en la figura 1-24; es *esencial* que esta convención de signos se utilice para todas las aplicaciones de (1-67).

Es interesante notar que (1-67) no requiere que S tenga una forma particular, siempre que esté delimitada por C; por eso hay tantas posibilidades para escoger la superficie. En general, los valores del integrando $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}$ serán diferentes para los puntos de todas estas superficies, pero (1-67) indica que la suma de todos estos términos siempre será la misma, dado que la integral de línea depende solamente de los valores de A a lo largo del perímetro común. Este punto se ilustra de una manera esquemática en la figura 1-33. Supóngase, por simplicidad, que C es una curva cerrada que descansa sobre un plano, como por ejemplo, una circunferencia. S podría tomarse como la superficie plana encerrada por la circunferencia; vistas de perfil, C y S aparecen como la recta que se indica. Las líneas punteadas representan otras posibles superficies, S', S'' y así sucesivamente, todas las cuales tienen como frontera a C, y la integral de $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}$ sobre cualquiera de éstas es la misma en todos los casos.

Este teorema se demuestra por evaluación directa de la integral de superficie, utilizando las expresiones previas en coordenadas rectangulares. De (1-20) y (1-43) se obtiene que

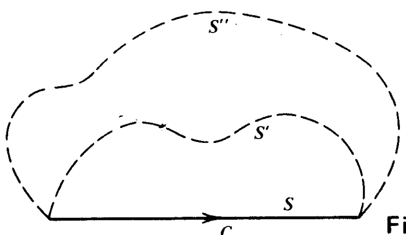


Figura 1-33. Superficies con la misma curva limitante.

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \int_S \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} da_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} da_z \right) + \int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} da_z - \frac{\partial A_y}{\partial z} da_x \right)$$
$$+ \int_S \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} da_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} da_y \right) \tag{1-68}$$

donde se han agrupado los términos por componentes de **A**. Considérese la primera integral y desígnesele con I_x. Se evalúa integrando primero sobre una franja de anchura dx, la cual es paralela al plano yz y se encuentra a una distancia x del mismo. Al integrar sobre x, se suman las contribuciones de todas las franjas similares en las que se puede dividir a S. Para empezar, debe suponerse que S es lo suficientemente simple para que se pueda elegir una orientación de los ejes de tal manera que y y z aumenten según se va del principio al final de la franja. Esta situación queda ilustrada en la figura 1-34, la cual también indica las proyecciones de la franja sobre los planos xz y xy como una ayuda para entender mejor la orientación de la superficie. P_1 y P_2 son los puntos inicial y final, respectivamente, de la integración; es decir, son los puntos de intersección de la franja con la curva limitante C, y sus coordenadas deben, por tanto, satisfacer la ecuación que describe a C. El elemento de superficie $d\mathbf{a}$ se encuentra en un punto intermedio de la integración; se puede observar que los ángulos directores de $d\mathbf{a}$ tienen valores tales que α y γ son menores de 90°, mientras que $\beta > 90°$. (Si se sostiene un lápiz perpendicular sobre un pedazo de cartón orientado en la misma dirección de la franja sombreada, este punto quedará suficientemente claro). Así, de acuerdo con (1-55), $da_y = -dxdz$ y $da_z = dxdy$, y se puede escribir

$$I_x = -\int_{\text{franjas}} dx \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \right) \tag{1-69}$$

En el término que está entre paréntesis, dy y dz no son independientes, dado que y y z están relacionadas por la ecuación de S y el valor tomado para x. Ya que este integrando se evalúa para una franja en la que $x = \text{const.}$, por lo que $dx = 0$, se le puede sumar $(\partial A_x/\partial x)dx = 0$ para proporcionarle una forma más fácil de reconocer:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz = dA_x$$

Por esto, (1-69) queda

$$I_x = -\int_{\text{franjas}} dx \int_{P_1}^{P_2} dA_x = -\int_{\text{franjas}} [A_x(P_2) - A_x(P_1)]\, dx \tag{1-70}$$

Si en la figura 1-34 se consideran los desplazamientos ds_1 y ds_2 a lo largo de C en los puntos límite correspondientes, se observa que, en P_1, ds_1 tiene una componente x positiva

por lo que se puede escribir que $ds_{1x} = dx$, mientras que, en P_2, ds_2 tiene una componente x negativa, lo cual hace que $ds_{2x} = -dx$. En consecuencia, el integrando de (1-70) puede escribirse como

$$-A_x(P_2)(-ds_{2x}) + A_x(P_1)(ds_{1x}) = A_{x2}ds_{2x} + A_{x1}ds_{1x} \tag{1-71}$$

que es justamente la contribución total a la integral de línea de $A_x ds_x$ que proviene de los desplazamientos ds_2 y ds_1 recortados sobre la curva C por la franja. Así, cuando se lleva a cabo la integración final sobre x en (1-70), es decir, la suma de las contribuciones de todas las franjas, la contribución de cada franja es $A_x ds_x$ por la parte de curva que le corresponde; el resultado final será la integral de línea de $A_x ds_x$ sobre toda la curva C. En otras palabras, se ha encontrado que

$$\int_S \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} da_y - \frac{\partial A_x}{\partial y} da_z \right) = \oint_C A_x ds_x \tag{1-72}$$

De manera similar, las dos últimas integrales de (1-68) tienen, respectivamente, los valores

$$\oint_C A_y ds_y \quad \text{y} \quad \oint_C A_z ds_z$$

Al sustituir estos valores, junto con (1-62), se encuentra en (1-68):

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C (A_x ds_x + A_y ds_y + A_z ds_z) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

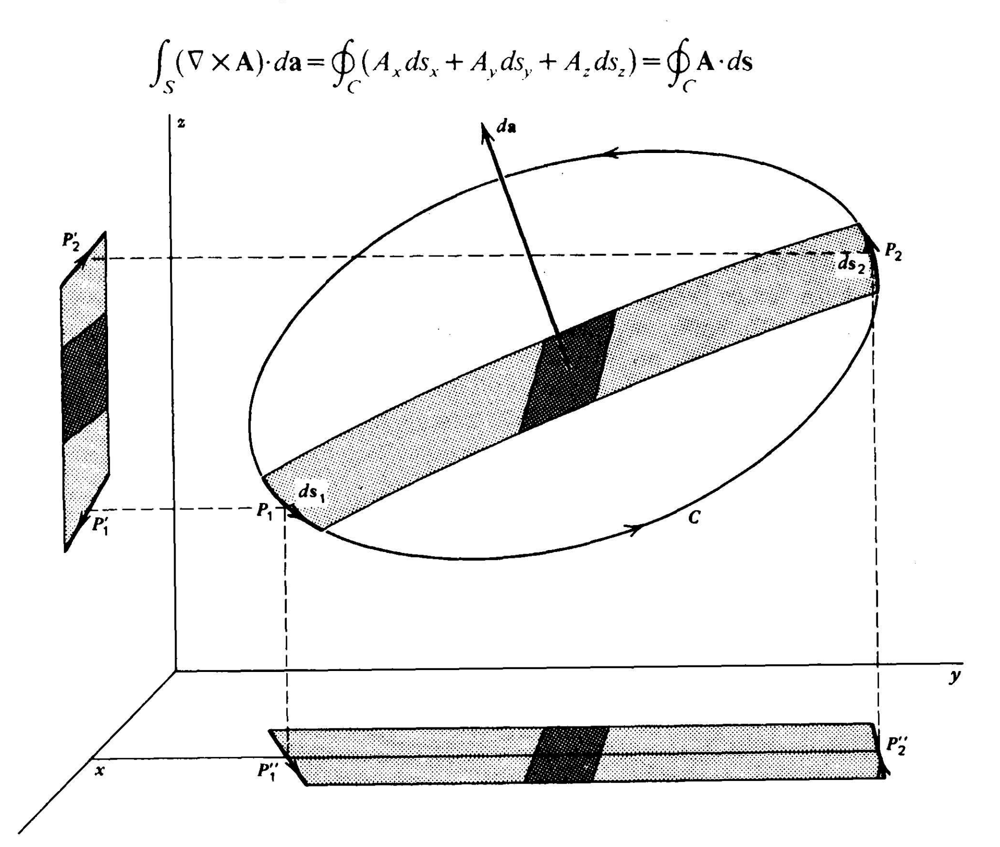


Figura 1-34. Superficie utilizada para demostrar el teorema de Stokes.

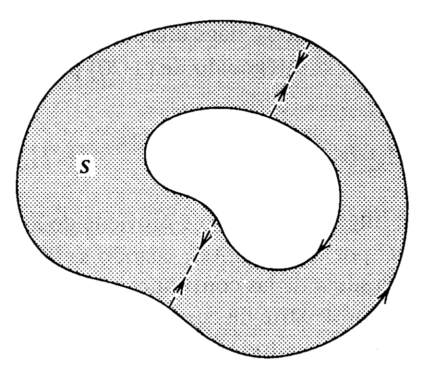


Figura 1-35. Una superficie limitada por dos curvas.

que es exactamente (1-67), con lo que queda demostrado el teorema.

El teorema puede aplicarse igualmente a una superficie limitada por más de una curva, por medio de un método similar al que se utilizó para el teorema de la divergencia. La figura 1-35 muestra un ejemplo de tal situación. Nótese que el sentido de recorrido de la curva interior se ha escogido de manera tal que la superficie de interés queda a la izquierda a medida que se recorre la trayectoria, y se puede observar que esto es equivalente a la regla de la mano derecha que se ilustra en la figura 1-24. S se divide en varias superficies, cada una encerrada por una sola curva, al introducir cuantos pares de líneas coincidentes se necesiten; dos de tales pares se muestran en la figura con línea punteada. Una vez hecho lo anterior, se aplica el teorema de Stokes a cada una de estas superficies, sumando después los resultados. Se cancelan las contribuciones a las integrales de línea por parte de cada par de rectas coincidentes que se hayan introducido, ya que se recorren en sentido contrario para cada una de las superficies, quedando como resultado final (1-67). Un procedimiento similar podría también resolver cualquier duda que se tuviera en cuanto a la suposición de que la superficie de la figura 1-34 fuera "lo suficientemente plana" para poder orientar los ejes de manera tal que y y z aumentaran a medida que se integraba la franja. Si la superficie es muy intrincada, puede dividirse en pequeñas porciones lo suficientemente planas para elegir, si fuera necesario, una orientación de los ejes diferentes para cada porción, de manera que quedara satisfecho el requerimiento de la figura 1-34; un ejemplo de tal tipo de división se da en la figura 1-36. Cuando se aplica el teorema a cada porción y se suman los resultados, las contribuciones de las rectas divisorias se cancelan mutuamente, por lo que se vuelven a obtener (1-67).

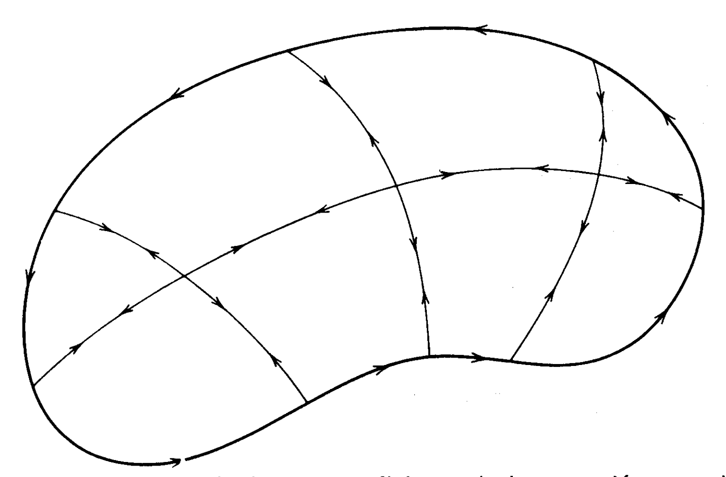


Figura 1-36. División de una superficie para la demostración general del teorema de Stokes.

Considérese un punto, P, en el centro de una pequeña superficie $\Delta a\hat{\mathbf{n}}$. Cuando se aplica (1-67) a este caso, $(\nabla \times \mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}$ será casi constante sobre esta superficie, de manera que, tal como se hizo en la sección previa, se puede escribir

$$\langle(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}}\rangle_P = \frac{1}{\Delta a}\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$$

donde el miembro izquierdo, en la cercanía de P es el valor promedio de la componente de $\nabla \times \mathbf{A}$ en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$, de acuerdo con (1-21). Si ahora se supone que $\Delta a \to 0$, el valor promedio cerca de P se convierte en el valor en P, o sea,

$$(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} \qquad (1\text{-}73)$$

lo cual da la componente de $\nabla \times \mathbf{A}$ en una dirección dada, en función de la integral de línea de $\mathbf{A}$ en torno a una pequeña superficie normal a esta dirección. De esta manera se puede decir que (1-73) es una definición general de la componente del rotacional en una dirección dada. Si se obtiene esto para tres direcciones mutuamente perpendiculares, (tales como $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$), se obtendrán las componentes de $\nabla \times \mathbf{A}$ en cada una de estas direcciones y, por lo tanto, se obtiene el vector $\nabla \times \mathbf{A}$. Cuando se realiza este procedimiento para las coordenadas rectangulares, el resultado es, desde luego, (1-43).

1-16 Coordenadas cilíndricas

Hasta ahora solamente se han utilizado coordenadas rectangulares con sus vectores unitarios constantes. Sin embargo, hay muchos problemas que se pueden enunciar y resolver mejor por medio de otros sistemas coordenados. Al utilizar éstos, hay que ver qué sucede a los resultados hasta aquí obtenidos. Sólo se verán dos de los sistemas de mayor importancia.

El primero de ellos es el de las *coordenadas cilíndricas*, en las cuales la localización de un punto, P, se especifica por medio de tres cantidades, ρ, φ, z, cuyas definiciones se ilustran en la figura 1-37; esta figura también muestra el vector de posición, $\mathbf{r}$, del punto, así como tres nuevos vectores unitarios que se definirán en breve. Se puede observar que cuando $\mathbf{r}$ se proyecta sobre el plano xy, ρ es la longitud de esta proyección, mientras que φ es el ángulo que dicha proyección forma con el eje x positivo; z es la misma que su correspondiente coordenada en el sistema rectangular. La relación entre las coordenadas cilíndricas y las rectangulares para un punto P son, de acuerdo con la figura,

$$x=\rho\cos\varphi \qquad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad z=z \qquad (1\text{-}74)$$

de manera que

$$\rho=(x^2+y^2)^{1/2} \qquad \tan\varphi=\frac{y}{x} \qquad (1\text{-}75)$$

Ahora se puede definir un conjunto de tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares, como sigue: primero, $\hat{\mathbf{z}}$ es el mismo que el $\hat{\mathbf{z}}$ rectangular; segundo $\hat{\rho}$, se escoge de manera tal que esté en la dirección en que ρ aumenta y sea perpendicular a $\hat{\mathbf{z}}$, de modo que $\hat{\rho}$ es paralelo al plano xy. Por último, $\hat{\varphi}$ se define como perpendicular a los dos anteriores y en la dirección indicada. Se puede ver que $\hat{\varphi}$ es perpendicular al plano seminfinito

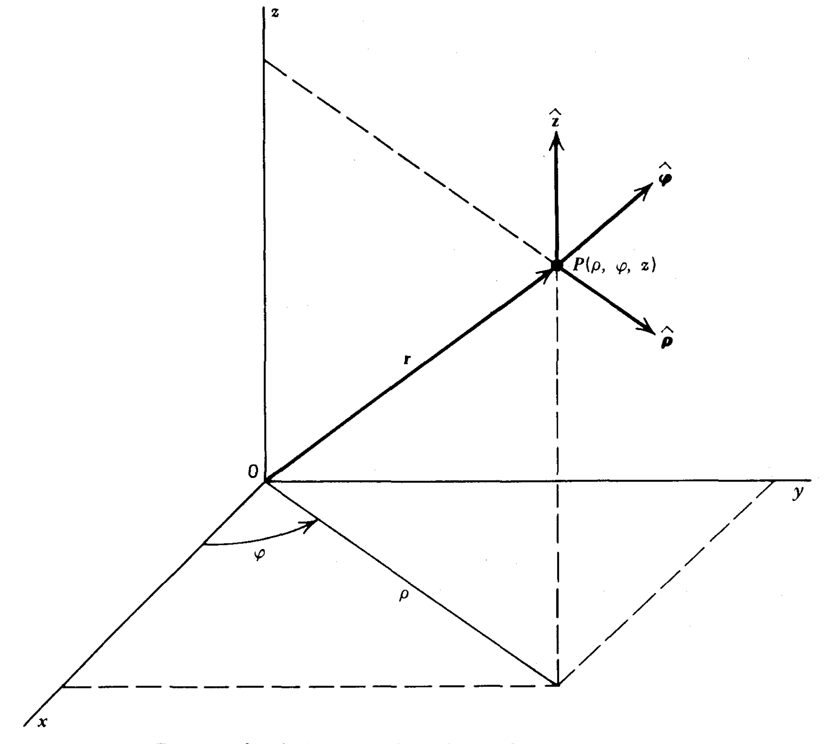


Figura 1-37. Definición de las coordenadas cilíndricas.

φ = const., y su dirección es, por tanto, la, misma en que φ crece. Los tres vectores unitarios se muestran en el punto P para enfatizar el hecho de que son función de P; es decir, si P se desplaza, tanto $\hat{\rho}$ como $\hat{\varphi}$ cambian sus direcciones; aunque $\hat{\mathbf{z}}$ no cambia. Así, se observa que estos tres vectores unitarios no son constantes, en contraste con los de las coordenadas rectangulares $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, y $\hat{\mathbf{z}}$.

Dado que $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares, deben satisfacer relaciones análogas a las (1-18), (1-19) y (1-25):

$$\begin{gathered}\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}=\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi}=\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}=1\\ \hat{\rho}\cdot\hat{\varphi}=\hat{\varphi}\cdot\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\rho}=0\\ \hat{\rho}\times\hat{\varphi}=\hat{\mathbf{z}}\qquad \hat{\varphi}\times\hat{\mathbf{z}}=\hat{\rho}\qquad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\rho}=\hat{\varphi}\end{gathered} \tag{1-76}$$

Las componentes rectangulares de $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ se pueden encontrar inspeccionando la figura 1-37; resulta de gran utilidad imaginarlas como proyectándose en el plano xy, y así se obtienen los resultados.

$$\hat{\rho}=\cos\varphi\hat{\mathbf{x}}+\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{y}}\qquad \hat{\varphi}=-\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{x}}+\cos\varphi\hat{\mathbf{y}} \tag{1-77}$$

Se pueden despejar $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{y}}$ de estas ecuaciones para obtener sus componentes en coordenadas cilíndricas:

$$\hat{\mathbf{x}}=\cos\varphi\hat{\rho}-\operatorname{sen}\varphi\hat{\varphi}\qquad \hat{\mathbf{y}}=\operatorname{sen}\varphi\hat{\rho}+\cos\varphi\hat{\varphi} \tag{1-78}$$

Al derivar (1-77), se encuentra una expresión explícita de la forma en que $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ varían a medida que P se desplaza:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{d\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{d\varphi}=-\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{1-79}$$

Dado que $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ y $\hat{\mathbf{z}}$ son mutuamente perpendiculares, se puede expresar cualquier vector **A** en función de sus componentes a lo largo de estas direcciones; por analogía con (1-5), se puede escribir **A** en la forma

$$\mathbf{A}=A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+A_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}+A_z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-80}$$

Para el caso particular del vector de posición **r**, se puede ver que, de acuerdo con la figura 1-37,

$$\mathbf{r}=\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+z\hat{\mathbf{z}} \tag{1-81}$$

que puede obtenerse también a partir de (1-11) después de sustituir (1-74) y usar (1-77). También se puede obtener la diferencial $d\mathbf{r}$ a partir de (1-81) y (1-79):

$$d\mathbf{r}=d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho\, d\hat{\boldsymbol{\rho}}+dz\hat{\mathbf{z}}=d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho\, d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}+dz\hat{\mathbf{z}} \tag{1-82}$$

de manera que sus componentes en las direcciones positivas de ρ, φ y z son $d\rho$, $\rho d\varphi$ y dz, respectivamente. Estos desplazamientos componentes se muestran en la figura 1-38, y se puede observar que corresponden a la distancia recorrida por P al cambiar cualquiera de sus coordenadas, mientras las otras dos permanecen constantes. El elemento de volumen

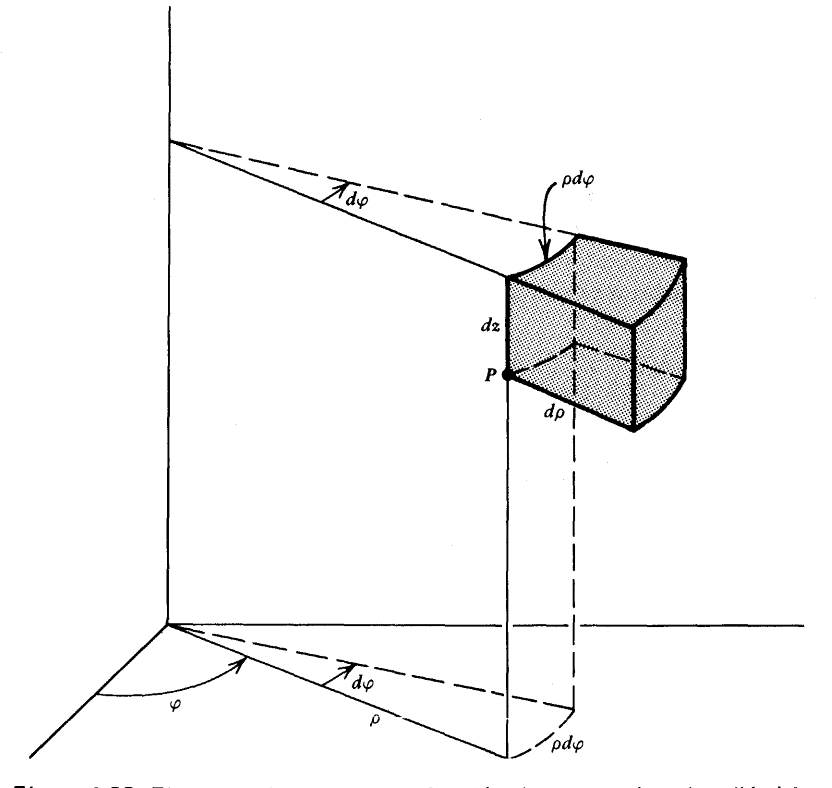


Figura 1-38. Elemento de volumen en función de las coordenadas cilíndricas.

sombreado tiene como lados a las componentes de $d\mathbf{r}$ dadas en (1-82). Por lo tanto, el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas está dado por

$$d\tau = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \tag{1-83}$$

También puede observarse en esta figura que las superficies perpendiculares a los vectores unitarios son $\rho d\varphi dz$, $d\rho dz$, y $\rho d\rho d\varphi$, de manera que las componentes de un elemento de superficie $d\mathbf{a}$ son

$$da_\rho = \pm \rho\, d\varphi\, dz \qquad da_\varphi = \pm\, d\rho\, dz \qquad da_z = \pm \rho\, d\rho\, d\varphi \tag{1-84}$$

donde el signo correcto debe elegirse con el mismo criterio que para (1-55).

Ahora se verá cómo se expresan los operadores diferenciales en este sistema. Si $u = u(\rho, \varphi, z)$, entonces

$$du = \frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

al comparar este resultado con (1-82) y con la definición general del gradiente dada en (1-38), y notando que en este caso $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$, se obtiene que la expresión en coordenadas cilíndricas para el gradiente es

$$\nabla u = \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1-85}$$

de manera que el operador del queda

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \tag{1-86}$$

Al aplicar (1-86) a (1-80), se obtienen las expresiones correspondientes para la divergencia y el rotacional. Sin embargo, al hacer esto debe recordarse que los vectores unitarios no son constantes, y que se debe tomar en cuenta (1-79); además, debe usarse también (1-76). A continuación se muestra este procedimiento para $\nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_z \hat{\mathbf{z}}) \\
&= \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \hat{\mathbf{z}} \right) \\
&\quad + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\rho \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + A_\varphi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{z}} \right) \\
&\quad + \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \\
&= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

que se suele escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1-87}$$

De la misma manera, la expresión para el rotacional se convierte en

$$\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right] \tag{1-88}$$

mientras que $\nabla \cdot \nabla u$ queda como

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1-89}$$

siendo u una función escalar de la posición.

Es muy importante recordar que (1-86), (1-87), (1-88) y (1-89) no se pueden obtener de sus correspondientes expresiones en coordenadas rectangulares, o sea, (1-41), (1-42), (1-43) y (1-46), por simple remplazamiento de x, y y z por ρ, φ y z. De manera similar, (1-44) y (1-47) sólo pueden usarse para coordenadas rectangulares; véase (1-22) para la definición de $\nabla^2 \mathbf{A}$ en otros sistemas coordenados. Es sorprendente observar la frecuencia con que se cometen estos errores.

1-17 Coordenadas esféricas

En este sistema, la localización de un punto, P, está especificada por las tres cantidades r, θ, φ que se muestran en la figura 1-39. Se puede observar que r es la distancia desde el origen y, por lo tanto, la magnitud del vector de posición $\mathbf{r}$; que θ es el ángulo formado por $\mathbf{r}$ con el eje z positivo, y que φ es, otra vez, el ángulo formado entre el eje x positivo y la proyección de r sobre el plano xy. Las relaciones entre las coordenadas rectangulares y las esféricas son, como se puede observar,

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \qquad z = r\cos\theta \tag{1-90}$$

de manera que

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \qquad \tan\theta = \frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{z} \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \tag{1-91}$$

Se define un conjunto de vectores unitarios mutuamente perpendiculares $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}$ en el sentido en que $\mathbf{r}$, θ y φ aumentan, respectivamente, tal como se muestra en la figura 1-39; se puede observar que a medida que la localización de P cambia, los tres vectores también varían. Estos satisfacen las relaciones análogas a las (1-76):

$$\begin{gathered} \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = 1 \\ \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 0 \\ \hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\mathbf{r}} \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}}\times\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{gathered} \tag{1-92}$$

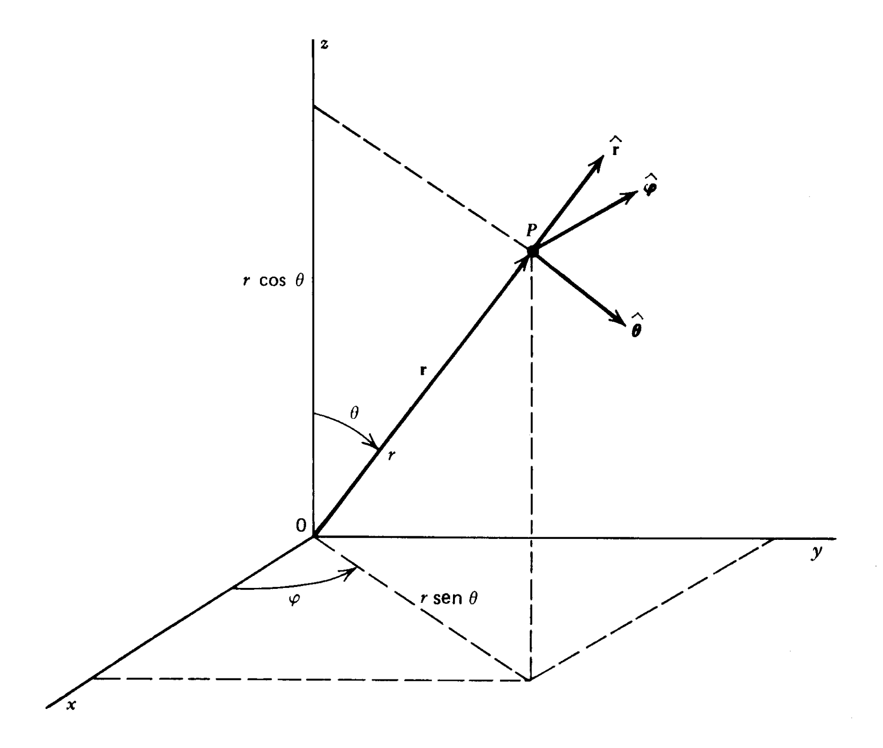


Figura 1-39. Definición de las coordenadas esféricas.

Sus componentes rectangulares se encuentran al observar la figura, y son

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}\\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \cos\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{y}} - \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{z}}\\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= -\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{y}}\end{aligned} \tag{1-93}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{\theta}} - \operatorname{sen}\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \hat{\mathbf{y}} &= \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \hat{\mathbf{z}} &= \cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{1-94}$$

Al derivar (1-33) se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\theta} &= \hat{\boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial\hat{\mathbf{r}}}{\partial\varphi} &= \operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\theta} &= -\hat{\mathbf{r}} & \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial\varphi} &= \cos\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\ \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\theta} &= 0 & \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\varphi} &= -\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{r}} - \cos\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned} \tag{1-95}$$

Un vector **A** se escribe, en forma de componentes, como

$$\mathbf{A} = A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1-96}$$

El vector de posición es

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} \tag{1-97}$$

y su diferencial se encuentra con ayuda de (1-93) y (1-95):

$$d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\operatorname{sen}\theta\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1-98}$$

Estos desplazamientos componentes se ilustran en la figura 1-40. Dado que el elemento de volumen tiene como lados a las componentes de (1-98), dicho elemento de volumen es

$$d\tau = r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \tag{1-99}$$

mientras que las componentes de un elemento de superficie $d\mathbf{a}$ están dadas por

$$da_r = \pm r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi \qquad da_\theta = \pm r\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\varphi \qquad da_\varphi = \pm r\,dr\,d\theta \tag{1-100}$$

Si $u = u(r, \theta, \varphi)$, entonces

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi$$

de manera que el gradiente, de acuerdo con (1-38) y (1-98), es

$$\nabla u = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial u}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{1-101}$$

por lo que el operador del es

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{1-102}$$

Si ahora se procede a usar (1-102) y (1-96) de la misma manera que en la sección previa, tomando en cuenta a (1-92) y (1-95), se tiene:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1-103}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]$$
$$+ \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] \tag{1-104}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{1-105}$$

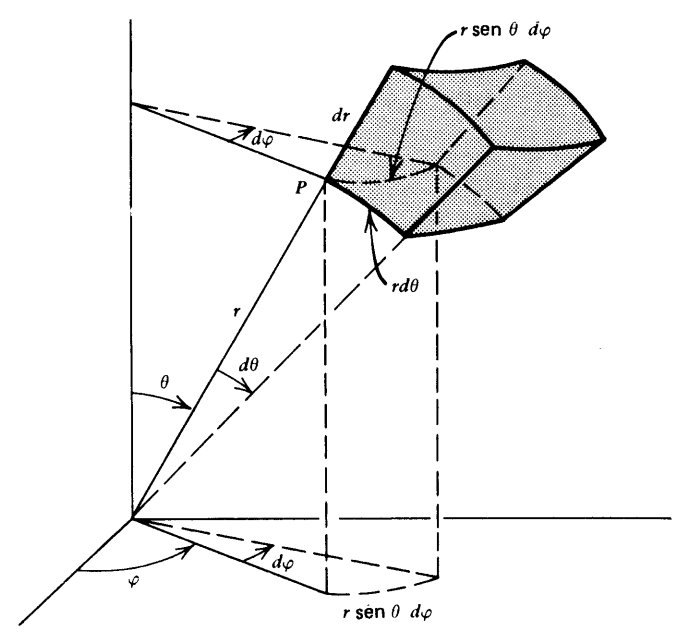


Figura 1-40. Elemento de volumen en función de las coordenadas esféricas.

Aquí pueden hacerse observaciones similares a las que se hicieron después de (1-89). *No* se pueden obtener las expresiones correctas en coordenadas esféricas para las ecuaciones (1-102) a (1-105) a partir de sus correspondientes expresiones en coordenadas rectangulares por el simple remplazamiento de los símbolos x, y, z por r, θ, φ.

1-18 Teorema de Helmholtz

No se demostrará aquí este teorema, sino que simplemente se enunciará como un auxiliar para comprender la motivación de muchos de los procedimientos que se utilizarán más adelante. De hecho quedará demostrado más adelante, pero parte por parte.

El teorema trata sobre la cuestión de qué información se requiere para calcular un campo vectorial. Básicamente, la respuesta es que si se conocen la divergencia y el rotacional del campo vectorial en todos los puntos de una región finita, entonces el campo vectorial puede ser encontrado en forma única. Considérese un campo vectorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ y supóngase que las funciones $\nabla \cdot \mathbf{F} = b(\mathbf{r})$ y $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{c}(\mathbf{r})$ están dadas para todos los puntos de un volumen finito V; es decir, que son funciones conocidas de la posición. Entonces, si se definen las siguientes dos funciones,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{b(\mathbf{r}')\,d\tau'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1-106}$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{c}(\mathbf{r}')\,d\tau'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1-107}$$

el teorema indica que se puede encontrar $\mathbf{F}$ a partir de

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathcal{A} \tag{1-108}$$

En estas expresiones, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ es la magnitud del vector de posición relativa dado por (1-12) y que se muestra en la figura 1-12.

Dado que **F** puede encontrarse a partir de ellas, su divergencia y su rotacional a menudo reciben el nombre de *fuentes* del campo. El punto **r** para el que se evalúa **F** recibe el nombre de *punto de campo*, mientras que el punto $\mathbf{r}'$ en el que se evalúan las fuentes para propósitos de integración, recibe el nombre de *punto fuente; $d\tau$* es entonces un elemento de volumen en la posición del punto fuente. De manera similar, las derivadas en (1-108) involucran a las componentes del punto de campo **r**.

Si hay fuentes al infinito, es decir, que no todas ellas estén restringidas a un volumen finito, este teorema no es absolutamente correcto debido a que se deben también incluir ciertas integrales de superficie que involucran a **F**. Tales situaciones serán manejadas por métodos especiales a medida que surjan en el texto.

Mucho del contenido del electromagnetismo moderno tiene que ver con diversos campos vectoriales eléctricos y magnéticos. En consecuencia, mucho del esfuerzo debe concentrarse en encontrar las expresiones para sus divergencias y sus rotacionales a partir de resultados experimentales fundamentales; este teorema demuestra por qué es importante conocerlas. Cuando se conoce el conjunto completo de estas ecuaciones fuentes, se les da el nombre de *ecuaciones de Maxwell* y, de hecho, constituyen la descripción fundamental del campo electromagnético.

1-19 Algunas relaciones vectoriales

A continuación se enlistan algunos resultados generales que son de gran utilidad para evaluar y simplificar muchas de las expresiones que se encuentran al usar vectores; ya se ha visto algún ejemplo en (1-29) y (1-30). El primer conjunto de estas expresiones puede comprobarse en forma directa, pero algunas veces resulta tedioso; tal comprobación es más fácil de realizar en coordenadas rectangulares, dado que los vectores unitarios involucrados son constantes. Para completar, nótese que $\nabla^2 \mathbf{A}$ en (1-122) solamente puede resolverse, como se hizo con (1-47), en caso de componenetes rectangulares, para otros sistemas coordenados, (1-122) debe tomarse como la definición de $\nabla^2 \mathbf{A}$ y evaluarse a partir del resto de la identidad

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) \tag{1-109}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(u\mathbf{A})=\frac{du}{d\sigma}\mathbf{A}+u\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma} \tag{1-110}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{d\sigma} \tag{1-111}$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\frac{d\mathbf{A}}{d\sigma}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{d\sigma} \tag{1-112}$$

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v \tag{1-113}$$

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u \tag{1-114}$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{1-115}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\cdot\mathbf{A}+\nabla\cdot\mathbf{B} \tag{1-116}$$

$$\nabla\cdot(u\mathbf{A})=\mathbf{A}\cdot(\nabla u)+u(\nabla\cdot\mathbf{A}) \tag{1-117}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{1-118}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\nabla\times\mathbf{A}+\nabla\times\mathbf{B} \tag{1-119}$$

$$\nabla\times(u\mathbf{A})=(\nabla u)\times\mathbf{A}+u(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{1-120}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{1-121}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A} \tag{1-122}$$

donde

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}=&\hat{\mathbf{x}}\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\\&+\hat{\mathbf{y}}\left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_y}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\\&+\hat{\mathbf{z}}\left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{1-123}$$

Si se toma a **A** como constante, aunque arbitrario, para efecto de (1-117) y (1-120), y a **B** como constante para efecto de (1-118), y además se utilizan (1-59) y (1-67), se obtienen tres teoremas de integración muy interesantes y a veces de gran utilidad:

$$\oint_S u\,d\mathbf{a}=\int_V \nabla u\,d\tau \tag{1-124}$$

$$\oint_S \mathbf{A}\times d\mathbf{a}=-\int_V(\nabla\times\mathbf{A})\,d\tau \tag{1-125}$$

$$\oint_C u\,d\mathbf{s}=-\int_S \nabla u\times d\mathbf{a} \tag{1-126}$$

Otra manera de interpretar el significado del gradiente y del rotacional resulta de (1-124) y (1-125), si se considera un volumen pequeño, ΔV, y se procede como se hizo para obtener (1-66); se encontrará que

$$\nabla u=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S u\,d\mathbf{a} \tag{1-127}$$

$$\nabla\times\mathbf{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S d\mathbf{a}\times\mathbf{A} \tag{1-128}$$

Por último, si se integra (1-117) sobre un volumen y se usa (1-59), se tiene

$$\oint_S u\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}=\int_V[\mathbf{A}\cdot(\nabla u)+u(\nabla\cdot\mathbf{A})]\,d\tau \tag{1-129}$$

Considérese el caso particular en que $u=B_x$; aquí (1-129) queda como

$$\oint_S B_x(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}) = \int_V [\mathbf{A}\cdot\nabla B_x + B_x(\nabla\cdot\mathbf{A})]\,d\tau \qquad (1\text{-}130)$$

Dado que existen expresiones similares para las otras dos componentes de **B**, se puede pre ver que (1-130) conducirá a

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}) = \int_V [(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})]\,d\tau \qquad (1\text{-}131)$$

1-20 Funciones de coordenadas relativas

A medida que se avanza en el estudio de este texto, constantemente se encuentran funciones que dependen *exclusivamente* de las diferencias entre coordenadas, es decir, que son funciones exclusivamente de las combinaciones $x - x'$, $y - y'$ y $z - z'$. De acuerdo con (1-13), se puede ver que estas combinaciones son simplemente las componentes del vector de posición relativa, **R**, de ahí el nombre de "coordenadas relativas" para $x - x'$, etc. Las funciones de este tipo tienen propiedades que permiten simplificar muchas de las expresiones que aparecerán posteriormente, por lo que es muy conveniente considerarlas en este punto.

Sea f una función de este tipo; f podría ser un escalar o la componente de un vector. Dado que f es función únicamente de las coordenadas relativas, se puede expresar como $f(\mathbf{R}) = f(x - x', y - y', z - z') = f(X, Y, Z)$, donde $X = x - x'$, $Y = y - y'$, $Z = z - z'$. Usando la regla de la cadena de la derivación, se encuentra que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x'} = -\frac{\partial f}{\partial X}$$

de manera que

$$\frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial x} = -\frac{\partial f(\mathbf{R})}{\partial x'} \qquad (1\text{-}132)$$

Existen expresiones similares para las derivadas en y y en z. A partir de (1-14) se puede definir un operador del, ∇', en función de las coordenadas primas, tal como

$$\nabla' = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x'} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y'} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z'} \qquad (1\text{-}133)$$

Si ahora se calcula el gradiente de f según (1-37) y se usan (1-132) y (1-133), se obtiene

$$\nabla f(\mathbf{R}) = -\nabla' f(\mathbf{R}) \qquad (1\text{-}134)$$

lo que demuestra que cuando se manejan funciones de coordenadas relativas, los operadores ∇ y ∇' pueden intercambiarse siempre y cuando el signo también se cambie.

Si el vector **A** es función solamente de las coordenadas relativas, **A** (**R**), y en esta manera A_x (**R**), A_y (**R**) y A_z (**R**), entonces se pueden aplicar (1-32) y sus análogas a (1-42) y (1-43) para obtener resultados similares a (1-134):

$$\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\nabla'\cdot\mathbf{A}(\mathbf{R}) \qquad (1\text{-}135)$$

$$\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\nabla'\times\mathbf{A}(\mathbf{R}) \qquad (1\text{-}136)$$

El operador laplaciano que se definió en (1-45) no cambia:

$$\nabla^2 f(\mathbf{R}) = \nabla'^2 f(\mathbf{R}) \tag{1-137}$$

Ejemplo

La magnitud del vector de posición relativa, **R**, dada por (1-14), es un importante ejemplo del tipo de función que se está estudiando. Por derivación directa de (1-14) se encuentra que

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x - x'}{R} = -\frac{\partial R}{\partial x'} \tag{1-138}$$

con expresiones similares para las derivadas en y y en z. Si se combinan estos resultados con (1-41), (1-133) y (1-13), se tiene

$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \hat{\mathbf{R}} \tag{1-139}$$

donde $\hat{\mathbf{R}}$ es el vector unitario en la dirección del vector de posición relativa. Se encontrarán resultados similares para funciones de R:

$$\frac{\partial g(R)}{\partial x} = \frac{dg}{dR}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{dg}{dR}\hat{R}_x \tag{1-140}$$

de manera que

$$\nabla g(R) = -\nabla' g(R) = \frac{dg(R)}{dR}\hat{\mathbf{R}} \tag{1-141}$$

y, en particular,

$$\nabla(R^n) = -\nabla'(R^n) = nR^{n-1}\hat{\mathbf{R}} \tag{1-142}$$

Un caso especialmente importante de la ecuación (1-142) corresponden a $n = -1$:

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \tag{1-143}$$

La componente x de (1-143) es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{(x - x')}{R^3} \tag{1-144}$$

Al derivar otra vez se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R^3} + \frac{3(x - x')^2}{R^5} \tag{1-145}$$

debido a (1-138). Se pueden encontrar expresiones similares para las segundas derivadas en y y en z, si se suman esas expresiones a (1-145), y si se usan (1-14) y (1-45), se obtiene

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{3}{R^3} + \frac{3R^2}{R^5} = 0$$

de manera que, recordando (1-137),

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right)=0 \qquad (R\neq 0) \tag{1-146}$$

(1-146) se le añade el último término entre paréntesis como recordatorio de que todos los cálculos efectuados a partir de (1-143) se realizan con la suposición implícita de que $\mathbf{R}\neq 0$, de manera que se están manejando cantidades finitas. Al recordar que $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$, se puede observar a partir de (1-143) que (1-146) también puede escribirse como

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)=0 \qquad (R\neq 0) \tag{1-147}$$

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)=\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3}\right)=0 \qquad (R\neq 0) \tag{1-148}$$

Ejercicios

Yo sí entiendo la teoría, sólo que
no puedo resolver los problemas.
—Anónimo

1-1 Comprobar la ecuación (1-2) por métodos gráficos.
1-2 Dados los dos vectores $\mathbf{A}=2\hat{\mathbf{x}}-3\hat{\mathbf{x}}-4\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{B}=6\hat{\mathbf{x}}+5\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}$, encontrar las magnitudes y los ángulos que forman con los ejes, x, y, y z, para $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.
1-3 Encontrar el vector de posición relativa, $\mathbf{R}$, del punto $P\,(2,-2,3)$ con respecto a $P'\,(-3,1,4)$. ¿Cuáles son los ángulos directores de $\mathbf{R}$?
1-4 Dados los dos vectores $\mathbf{A}=\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}+3\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{B}=4\hat{\mathbf{x}}-5\hat{\mathbf{y}}+6\hat{\mathbf{z}}$, encontrar el ángulo formado entre ellos. Encontrar la componente de $\mathbf{A}$ en la dirección de $\mathbf{B}$.
1-5 Dados los vectores $\mathbf{A}=2\hat{\mathbf{x}}+3\hat{\mathbf{y}}-4\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{B}=-6\hat{\mathbf{x}}-4\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}$, encontrar la componente de $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ en la dirección de $\mathbf{C}=\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}$.
1-6 Comprobar (1-29) y (1-30).
1-7 Demostrar que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ es igual al volumen de un paralelepípedo si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son vectores que representan tres aristas con un vértice común.
1-8 Una familia de hipérbolas sobre el plano xy está dada por $u=xy$. Encontrar Δu. Dado el vector $\mathbf{A}=3\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}+4\hat{\mathbf{z}}$, encontrar la componente de $\mathbf{A}$ en la dirección de ∇u en el punto sobre la curva para la cual $u=3$ y en el que $x=2$.
1-9 La ecuación de una familia de elipsoides es

$$u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

Encontrar el vector unitario normal a cada punto de la superficie de estas elipsoides.
1-10 Comprobar (1-48) y (1-49) por cálculo directo.
1-11 Resolver el ejemplo de la sección 1-11 integrando sobre y en lugar de x, y de esta manera demostrar que se obtiene el mismo resultado.
1-12 Encontrar la integral de superficie de $\mathbf{r}$ sobre la superficie de una esfera de radio a y centro en el origen. Encontrar también la integral de volumen de $\nabla\cdot\mathbf{r}$ y comparar resultados.
1-13 Dado el campo vectorial $\mathbf{A}=xy\hat{\mathbf{x}}+yz\hat{\mathbf{y}}+zx\hat{\mathbf{z}}$, evaluar el flujo de $\mathbf{A}$ a través de la superficie de un paralelepípedo rectangular de lados a, b, c con el origen de uno de los vértices y las aristas a lo largo de las direcciones positivas de los ejes rectangulares, tal como se muestra en la figura 1-41. Evaluar $\int\nabla\cdot\mathbf{A}\,d\tau$ sobre el volumen de este mismo paralelepípedo y comparar resultados.

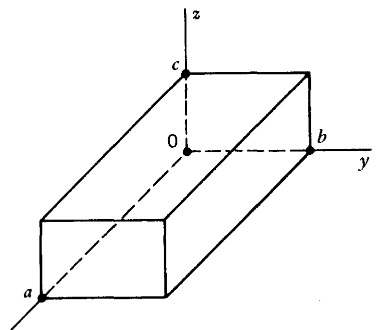


Figura 1-14 . Paralelepípedo rectangular con uno de sus vértices en el origen.

1-14 Calcular directamente la integral de línea $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$ del vector $\mathbf{A} = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$ para la trayectoria cerrada en el plano xy con lados rectos dados por: $(0,0) \to (3,0) \to (3\text{-}4) \to (0,4) \to (0,0)$. Calcular también la integral de superficie de $\nabla \times \mathbf{A}$ sobre la superficie encerrada y demostrar que se satisface (1-67).

1-15 Dado el campo vectorial $\mathbf{A} = x^2 y\hat{\mathbf{x}} + xy^2\hat{\mathbf{y}} + a^3 e^{-\beta y} \cos \alpha x\hat{\mathbf{z}}$, donde a $\alpha\beta$ son constantes, evaluar directamente la integral de línea de $\mathbf{A}$ sobre la trayectoria cerrada en el plano xy que se muestra en la figura 1-42. Las porciones rectas son paralelas a los ejes y la porción curva es la parábola $y^2 = kx$, donde $k = \text{const}$. Evaluar la integral de superficie de $\nabla \times \mathbf{A}$ sobre la superficie S encerrada por C y comparar resultados.

1-16 Comprobar (1-88) y (1-89).

1-17 Comprobar (1-103), (1-104) y (1-105).

1-18 Sea $\mathbf{A} = a\hat{\mathbf{x}} + b\hat{\mathbf{y}} + c\hat{\mathbf{z}}$, donde a, b, c son constantes. ¿Es $\mathbf{A}$ un vector constante? Encontrar las componentes cilíndricas y esféricas de $\mathbf{A}$, expresadas en función de ρ, φ, z y r, θ, φ respectivamente.

1-19 Sea $\mathbf{A} = a\hat{\boldsymbol{\rho}} + b\hat{\varphi} + c\hat{\mathbf{z}}$, donde a, b, c son constantes. ¿Es $\mathbf{A}$ un vector constante? Encontrar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ y $\nabla \times \mathbf{A}$. Encontrar las componentes rectangulares y esféricas de $\mathbf{A}$ en función de x, y, z y r, θ, φ, respectivamente.

1-20 Sea $\mathbf{A} = a\hat{\mathbf{r}} + b\hat{\theta} + c\hat{\varphi}$, donde a, b, c son constantes, ¿Es $\mathbf{A}$ un vector constante? Encontrar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ y $\nabla \times \mathbf{A}$. Encontrar las componentes rectangulares y cilíndricas de $\mathbf{A}$ en función de x, y, z y ρ, φ, z respectivamente.

1-21 Encontrar $\nabla \cdot \mathbf{r}$ para el vector de posición $\mathbf{r}$ expresado en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas, demostrando así que se obtiene el mismo resultado en tolos los casos.

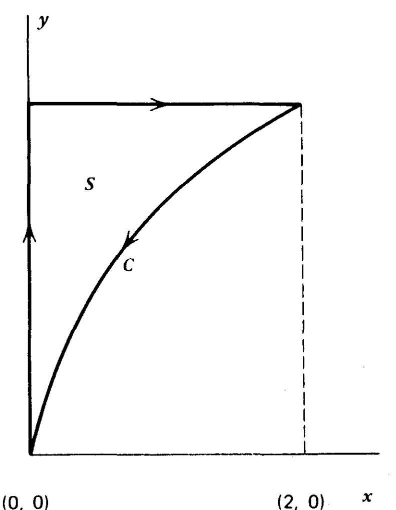


Figura 1-42. Trayectoria de integración para el ejercicio 1-15.

1-22 Sea $\mathbf{A} = a\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + b\hat{\boldsymbol{\varphi}} + cz\hat{\mathbf{z}}$, donde a, b, c son constantes. Encontrar $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$ sobre la superficie de un cilindro recto circular de longitud L y radio ρ_0. El eje del cilindro está a lo largo del eje z positivo y el origen es el centro de la cara circular inferior. Encontrar también $\int \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$ sobre el volumen encerrado por el cilindro y comparar resultados.

1-23 Dado el vector $\mathbf{A} = 4\hat{\mathbf{r}} + 3\hat{\boldsymbol{\theta}} - 2\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, encontrar su integral de línea sobre la trayectoria cerrada que se muestra en la figura 1-43. La porción curva es el arco de una circunferencia de radio r_0 centrada en el origen. Encontrar también la integral de superficie de $\nabla \times \mathbf{A}$ sobre el área encerrada y comparar resultados.

1-24 Comprobar (1-117) y (1-120).

1-25 Aplicar el teorema de la divergencia al caso especial en el cual $\mathbf{A}$ es constante pero arbitraria, y demostrar que el área vectorial total de una superficie cerrada es cero, es decir, $\oint d\mathbf{a} = 0$. De manera similar, demostrar que $\oint d\mathbf{s} = 0$. ¿Son estos resultados sorprendentes?

1-26 Comprobar (1-124), (1-125) y (1-126) por medio del método sugerido en el texto.

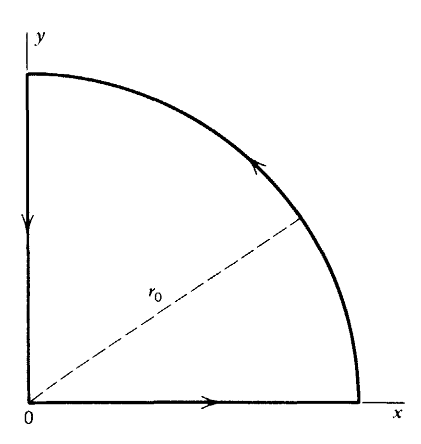


Figura 1-43. Trayectoria de integración para el ejercicio 1-23.

Capítulo 2
Ley de Coulomb

Los fenómenos que hoy en día se asocian al término "electricidad", tienen su origen en la observación, hecha hace muchos siglos, de que cuando ciertos materiales son frotados contra otros, adquieren la propiedad de atraer otros objetos. Uno de estos materiales es el ámbar (*elektron* en griego). El proceso se denomina "electrificación por frotamiento" y para describir la alteración en las propiedades del material se dice que ha sido "cargado" o que ha adquirido "carga eléctrica".

Después de muchos experimentos y estudios, se ha llegado a la conclusión de que la electrificación por rozamiento no representa un proceso de creación de carga eléctrica, sino más bien una *separación* de dos tipos de carga que ya se encontraban presentes en cantidades iguales en el material "neutro". Estos tipos de carga reciben el nombre arbitrario de "positiva" y "negativa". La carga positiva se *define* como aquélla que queda en una barra de vidrio después de que ésta ha sido frotada con un paño de seda; dado que el proceso es de separación, la seda queda cargada negativamente con una carga igual en magnitud a la de la barra de vidrio. Como ya se implica en estas observaciones y como fue confirmado después por la experimentación, la carga eléctrica se *conserva,* en el sentido de que la carga neta total no puede ser creada ni destruida; este resultado experimental básico se expresa en forma cuantitativa en el capítulo 12.

La fuerzas entre cargas eléctricas pueden ser de repulsión o de atracción. La primera investigación cuantitativa de la dependencia de estas fuerzas con respecto a las magnitudes de las cargas y la distancia entre ellas fue realizada por Coulomb 1785, y el resultado se conoce como la Ley de Coulomb.

2-1 Cargas puntuales

Se utiliza el símbolo q para representar a la carga eléctrica. En una situación general, la carga de un objeto se distribuye de una cierta manera, ya sea sobre su superficie o en todo su volumen, y la fuerza entre dos objetos depende tanto de esta distribución como de la cantidad total de cada carga. Como resultado, se ha encontrado conveniente tomar como caso inicial el de una *carga puntual,* para la que se supone que toda la carga está localizada en un punto geométrico del espacio. Obviamente, esto es una idealización, pero puede ser aproximada en condiciones de laboratorio haciendo que la distancia de separación sean muy grandes comparadas con las dimensiones de los cuerpos cargados.

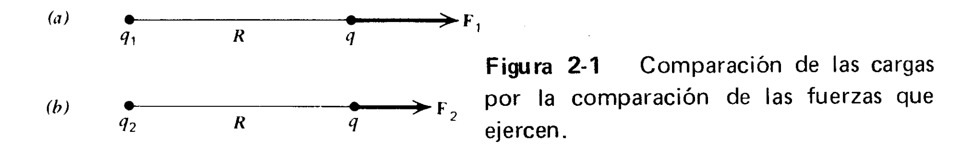


Figura 2-1 Comparación de las cargas por la comparación de las fuerzas que ejercen.

Para seguir adelante, es necesario poder comparar las magnitudes de dos cargas puntuales, q_1 y q_2. Esto puede lograrse si se introduce una tercera carga puntual arbitraria, q, y se le coloca a una distancia fija R de q_1, midiendo la fuerza resultante, $\mathbf{F}_1$, sobre q; esta situación se ilustra en la figura 2-1*a*. A continuación se quita q_1 y se remplaza por q_2 a la misma distancia R de q; la nueva fuerza, $\mathbf{F}_2$, sobre q puede medirse como se muestra en la figura 2-1*b*. Dado que tanto q como R son las mismas en ambos casos, la diferencia entre las fuerzas puede deberse únicamente a la diferencia en el valor numérico de las cargas q_1 y q_2, por lo que resulta lógico pensar que las magnitudes de las fuerzas son directamente proporcionales a las magnitudes de q_1 y q_2. De esta manera, se puede *definir* la relación de sus magnitudes como igual a la relación de las magnitudes de las fuerzas producidas por ellas sobre una carga arbitraria q; así, se tiene

$$\frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{|\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_2|} \tag{2-1}$$

siendo q y R constantes.

Una vez establecido este procedimiento para comparar magnitudes, se puede proceder al estudio de cómo la fuerza entre dos cargas puntuales depende de su distancia relativa. Además, se pueden ahora asignar valores absolutos a las cargas *eligiendo* una carga de magnitud unitaria de alguna manera arbitraria pero conveniente, y utilizando (2-1) con el valor numérico $|q_{\text{unitaria}}| = 1$.

2-2 Ley de Coulomb

Esta ley experimental básica se refiere a la situación ilustrada en la figura 2-2, en la que se tienen dos cargas puntuales, q y q', separadas por una distancia R; supóngase que las cargas están en posiciones fijas y que no hay materia circundante, es decir, que las cargas se encuentran en el vacío. La fuerza *sobre* q *debida a* q' se escribe $\mathbf{F}_{q' \to q}$. Así, se considera a q'

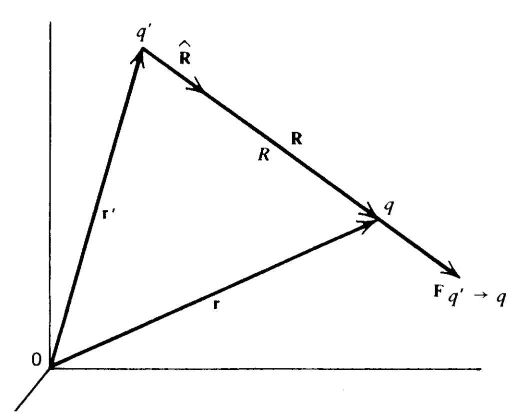


Figura 2-2 Vectores de posición de la ley de Coulomb.

como fuente de la fuerza y, de hecho, se puede decir que q' es la "fuente" y que su posición, dada por $\mathbf{r}'$, es el "punto de fuente". Dado que q es la carga para la cual se va a encontrar la fuerza, se dice que se encuentra en el "punto de campo" localizado por $\mathbf{r}$. Así, de acuerdo con (1-12), $\mathbf{R}$ es el vector de posición relativa de q con respecto a q' y se ve que su dirección va del punto de fuente al punto de campo, lo mismo que el vector unitario correspondiente, $\hat{\mathbf{R}}$. De esta manera, por (1-12) y (1-4) se tiene

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}' \qquad R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \qquad \hat{\mathbf{R}}=\frac{\mathbf{R}}{R} \tag{2-2}$$

En términos de estas cantidades, la *Ley de Coulomb* establece que

$$\mathbf{F}_{q'\to q}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{R^2}\hat{\mathbf{R}} \tag{2-3}$$

de manera que la fuerza es proporcional al producto de las cargas y al inverso del cuadrado de la distancia que las separa; se puede apreciar la gran similitud que tiene esta fórmula con la de la gravitación.

El factor $1/4\pi\epsilon_0$ es una costante de proporcionalidad cuyo valor numérico depende del sistema de unidades que se utilice; se escribe de esta manera por simple conveniencia. En este libro se utiliza exclusivamente el Sistema Internacional de unidades (SI), que es esencialmente el mismo que el sistema MKSA. Esto significa que la distancia se mide en metros, la masa en kilogramos, el tiempo en segundos, la fuerza en newtons, la energía en joules y así sucesivamente. En el SI la carga se define en función de la corriente eléctrica, ya que ésta es una medida del flujo de carga. La unidad de corriente recibe el nombre de *ampere*, mientras que la unidad de carga recibe el nombre de *coulomb* y se define como 1 coulomb = 1 ampere-segundo. Se dejará la definición precisa del ampere (en función de las fuerzas magnéticas entre corrientes) para la sección 13-2; por lo pronto, se puede tomar al coulomb como una unidad conocida de carga, para el propósito de los cálculos necesarios. En el capítulo 23 se discuten otros sistemas de unidades que suelen usarse en electromagnetismo.

El significado de todo esto es que las unidades de todas las cantidades físicas que aparecen en (2-3) han sido ya elegidas, de manera que la constante de proporcionalidad debe encontrarse *experimentalmente;* esta necesidad es análoga a la de encontrar la constante de gravitación que aparece en la ley de gravitación. El resultado es

$$\begin{aligned}\epsilon_0&=8.85\times10^{-12}\ (\text{coulomb})^2/\text{newton-(metro)}^2\\&=8.85\times10^{-12}\ \text{farad/metro}\end{aligned} \tag{2-4}$$

La constante ϵ_0 recibe el nombre de *capacidad inductiva específica del espacio libre,* y generalmente se escribe como en la última notación; se puede observar, por comparación de las dos formas de escribir ϵ_0, que 1 farad = 1 (coulomb)^2/joule. Es conveniente notar que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=9\times10^9\,\frac{\text{metro}}{\text{farad}} \tag{2-5}$$

con un grado de exactitud suficiente para los propósitos de este libro.

De acuerdo con (2-3), se observa que si $qq'>0$, de manera que ambas cargas son del mismo signo, entonces $\mathbf{F}_{q'\to q}$ está en la dirección de $\hat{\mathbf{R}}$, es decir, que la fuerza es de repulsión, como se puede observar en la figura 2-2. Por otro lado, si $qq'<0$, de manera que las cargas son de signos opuestos, $\mathbf{F}_{q'\to q}$ está en la dirección opuesta a $\hat{\mathbf{R}}$, es decir, que

la fuerza sobre q es de atracción hacia q'. Esto se suele resumir diciendo que cargas del mismo signo se repelen, mientras que cargas de signos opuestos se atraen.

Se puede escribir también la ley de Coulomb enteramente como una función de $\mathbf{R}$ si se combina (2-2) y (2-3):

$$\mathbf{F}_{q'\to q}=\frac{qq'\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \tag{2-6}$$

Si se desea obtener la fuerza de q sobre q', que escribe como $\mathbf{F}_{q\to q'}$ lo único que se necesita es utilizar el vector de posición relativa de q' con respecto a q, es decir, $\mathbf{R}'=\mathbf{r}'-\mathbf{r}$, de manera que

$$\mathbf{F}_{q\to q'}=\frac{q'q\mathbf{R}'}{4\pi\epsilon_0 R'^3} \tag{2-7}$$

Se puede observar en (2-2) que $\mathbf{R}'=-\mathbf{R}$, y dado que la magnitud de cada uno de ellos es igual a $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, se tendrá por (2-6) y (2-7),

$$\mathbf{F}_{q\to q'}=-\mathbf{F}_{q'\to q} \tag{2-8}$$

lo que muestra que las fuerzas de Coulomb son iguales y opuestas aun cuando las cargas individuales puedan ser muy diferentes en magnitud.

Se ha supuesto una situación estática, es decir, que las cargas se encuentran en reposo en posiciones fijas. Esto significa que para que q esté en equilibrio debe existir sobre ella una fuerza mecánica adicional, $\mathbf{F}_{q,m}$, de modo que la fuerza neta sea igual a cero; en otras palabras, se debe tener

$$\mathbf{F}_{q'\to q}+\mathbf{F}_{q,m}=0 \tag{2-9}$$

Lo mismo se aplica para q'.

2-3 Sistemas de cargas puntuales

Supóngase ahora que además de q existe un número N de cargas puntuales distribuidas en posiciones fijas en el espacio antes vacío. A cada una de estas cargas se le denomina q_i y su vector de posición es $\mathbf{r}_i$, donde $i=1, 2, \ldots, N$. Esta situación se ilustra en la figura 2-3; por claridad, no se muestran los vectores de posición individuales, pero sí los vectores unitarios, $\hat{\mathbf{R}}_i$, que corresponden a las posiciones relativas de q con respecto a las q_i. Cada una de estas cargas puede ejercer una fuerza sobre q, $\mathbf{F}_{qi\to q}$, que será de la forma general dada por (2-3) o (2-6). Las propiedades de superposición de las fuerzas ya son conocidas por la mecánica; así, la fuerza total sobre q, $\mathbf{F}_q$, estará dada por la suma vectorial de las fuerzas individuales, de manera que

$$\mathbf{F}_q=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_{q_i\to q}=\sum_{i=1}^{N}\frac{qq_i\hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{qq_i\mathbf{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \tag{2-10}$$

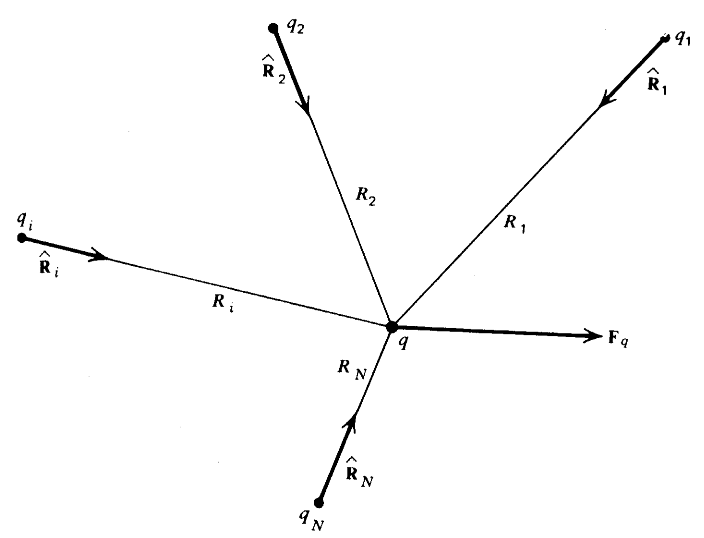


Figura 2-3 Cálculo de la fuerza total debida a más de una carga.

donde

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i \qquad R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \qquad \hat{\mathbf{R}}_i = \frac{\mathbf{R}_i}{R_i} \tag{2-11}$$

La última forma de (2-10) resulta de gran utilidad como punto de partida para resolver problemas, mientras que la expresión en función de los vectores unitarios es más conveniente para el tratamiento general. La ecuación (2-10) expresa el hecho de que la fuerza total puede encontrarse como la suma de las fuerzas individuales entre pares de cargas, y éstas se calculan a partir de la ley de Coulomb como si no existieran las demás cargas. Se supone otra vez que las cargas individuales se encuentran en reposo y se mantienen en reposo por fuerzas mecánicas de algún tipo, según se requiera.

Ejemplo

Si se expresan todas las expresiones en coordenadas rectangulares, es fácil escribir una forma explícita para (2-10). De acuerdo con (1-13) y (1-14) y observando que las diversas cargas se designan con subíndices i en lugar de primas se encuentra que (2-10) es

$$\mathbf{F}_q = \sum_{i=1}^{N} \frac{qq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x-x_i)\hat{\mathbf{x}} + (y-y_i)\hat{\mathbf{y}} + (z-z_i)\hat{\mathbf{z}}]}{\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right]^{3/2}} \tag{2-12}$$

En cierto sentido, (2-12) resulta ser una receta simple para resolver problemas, dado que una vez que se dan los valores de todas las cargas y sus posiciones en coordenadas rectangulares, únicamente resta sustituir estos números en (2-12) y simplificar el resultado tanto como sea posible.

2-4 Distribuciones continuas de carga

A menudo se encuentran casos en los que las cargas están cerca unas de otras, en comparación con las demás distancias de interés, que se les puede considerar como distribuidas unifor-

memente, tal como se podría considerar un vaso de agua, a escala de laboratorio, como una distribución uniforme de masa al despreciar su estructura molecular. Se puede manejar dicho caso considerando una región de la distribución de carga que sea tan pequeña que la carga contenida en ella pueda escribirse como dq' y ser tratada como una carga puntual; esto queda ilustrado en la figura 2-4. Todavía se puede utilizar (2-10), pero en este caso la suma será la integral sobre toda la distribución de carga, de manera que

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{2-13}$$

y en la que (2-2) sigue siendo aplicable.

Si las cargas se encuentran distribuidas en un volumen, se puede introducir una *densidad de carga volumétrica,* ρ, que se define como la carga por unidad de volumen y, por tanto, está medida en coulombs/(metro)^3. (Se utiliza el símbolo ρ_{ch} para esta densidad de carga en los pocos casos en que pudiera confundirse con la ρ de las coordenadas cilíndricas.) Así, la carga contenida en un volumen pequeño, $d\tau'$, estará por

$$dq' = \rho(\mathbf{r}')\, d\tau' \tag{2-14}$$

tal como se muestra en la figura 2-5a, por lo que (2-13) queda

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, d\tau'}{R^2} \tag{2-15}$$

Se ha escrito $\rho = \rho(\mathbf{r}')$ porque, en general, la densidad de volumen puede variar con la localización del punto de fuente; la integral de (2-15) debe tomarse sobre todo el volumen, V', que contiene a la distribución de carga.

Cuando se dice que $d\tau'$ es un volumen "pequeño", se quiere decir que es pequeño a nivel macroscópico (de laboratorio). Por otro lado, debe ser grande a escala microscópica (atómica), de manera que pueda contener muchos átomos y/o moléculas. Sólo de esta ma-

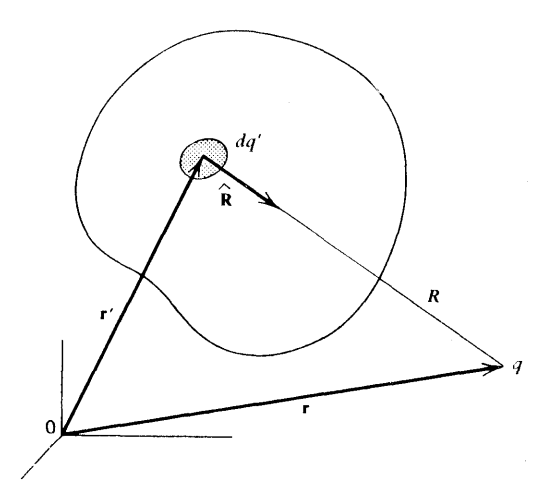


Figura 2-4 Elemento de carga de una distribución continua.

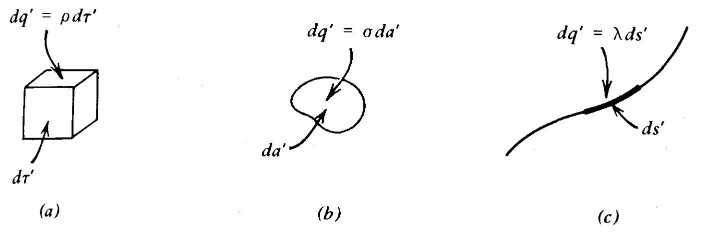


Figura 2-5 Definición de las diversas densidades de carga.

nera puede tratarse a ρ como una función que varía en forma continua con respecto a la posición. Si $d\tau'$ fuera similar o menor a los tamaños atómicos, entonces en la mayoría de las posiciones $d\tau'$ no contendría carga, por lo que ρ casi siempre sería cero. La densidad de carga sólo podría ser diferente de cero cuando $d\tau'$ incluyera una carga electrónica o nuclear, la cual llevaría a fluctuaciones tan grandes en los valores de ρ que ésta dejaría de representar un concepto útil.

De manera similar, las cargas pueden idealizarse sobre una superficie o sobre una línea. Para tal propósito se introducen densidades de carga análogas: la *densidad de carga superficial,* σ, definida como la carga por unidad de superficie, y la *densidad de carga lineal,* λ, definida como la carga por unidad de longitud; sus unidades son el coulomb/(metro)^2 y el coulomb/metro, respectivamente, y generalmente pueden también variar con la posición. A partir de estas definiciones se tiene que

$$dq' = \sigma(\mathbf{r}')\,da' \qquad \text{ó} \qquad dq' = \lambda(\mathbf{r}')\,ds' \tag{2-16}$$

como se indica en la figura 2-5*b* y *c*. Para tales casos (2-13) se convierte en

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,da'}{R^2} \tag{2-17}$$

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'}\frac{\lambda(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,ds'}{R^2} \tag{2-18}$$

donde (2-17) se integra en toda la superficie, S', sobre la que hay distribución superficial, mientras que (2-18) cubre la línea, L', ocupada por la distribución lineal de carga.

Por último, si todos los casos discutidos se encuentran presentes de manera simultánea, la fuerza total sobre q se obtendrá como la suma de todas las fuerzas debidas a las diversas distribuciones de carga, es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_q &= \mathbf{F}_q(\text{de los puntos}) + \mathbf{F}_q(\text{de los volúmenes})\\ &\quad + \mathbf{F}_q(\text{de las superficies}) + \mathbf{F}_q(\text{de las líneas})\end{aligned} \tag{2-19}$$

Una advertencia: se pueden evitar muchas dificultades, tiempo perdido y respuestas equivocadas si se recuerdan y *se siguen* estas dos simples y hasta aparentemente triviales reglas–(1) *siempre* dibújese el vector de posición relativa, y por tanto $\hat{\mathbf{R}}$, *desde* el punto de fuente *hasta* el punto de campo; (2) *nunca* se escriba la posición del punto de fuente como $\mathbf{r}$ o $(x,y,z,)$, sino más bien úsese $\mathbf{r}'$ o (x',y',z') u otro tipo de símbolo, tal como se hizo en (2-10) y (2-11).

2-5 Carga puntual fuera de una distribución esférica uniforme de carga

Como un ejemplo del efecto de una distribución continua de carga, evalúese (2-15) para el caso en el que q se localiza fuera de una esfera que contiene una distribución uniforme de carga, es decir, para la que $\rho = \text{const}$. Escójase el origen en el centro de la esfera de radio a y colóquese a q sobre el eje z, de manera que $z > a$; la figura 2-6 muestra esta situación, en la que solamente se ha dibujado un octante de la esfera. Se utilizan las coordenadas esféricas para describir el punto fuente, $\mathbf{r}'$, y para llevar a cabo la integración. La figura 2-7 ilustra el plano que contiene el eje z, $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{R}$. Puede verse que $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$ y que $\mathbf{r}' = r'\hat{\mathbf{r}}'$, de acuerdo con (1-11) y (1-97) y, por lo tanto, $\mathbf{R} = z\hat{\mathbf{z}} - r'\hat{\mathbf{r}}'$, de acuerdo con (2-2); de esto se desprende que, usando (1-17), (1-19), (1-92), (1-15) y la figura 2-7,

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr'\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}}' = z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta'$$

Se observa que, de hecho, este valor de R^2 es exactamente el mismo que se obtiene por la ley de los cosenos según se aplica en la figura 2-7. Si se obtiene $\hat{\mathbf{R}}$ a partir de estos resultados, se encuentra que (2-15) se convierte en

$$\mathbf{F}_q = \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{esfera}\frac{(z\hat{\mathbf{z}} - r'\hat{\mathbf{r}}')\,d\tau'}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta')^{3/2}} \tag{2-20}$$

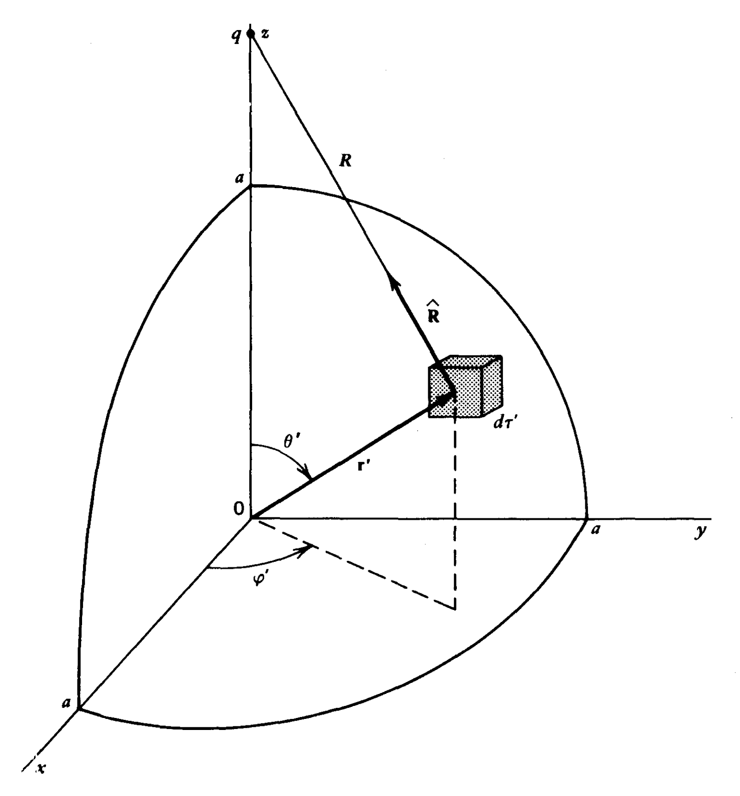


Figura 2-6 Carga puntual fuera de una distribución esférica uniforme de carga.

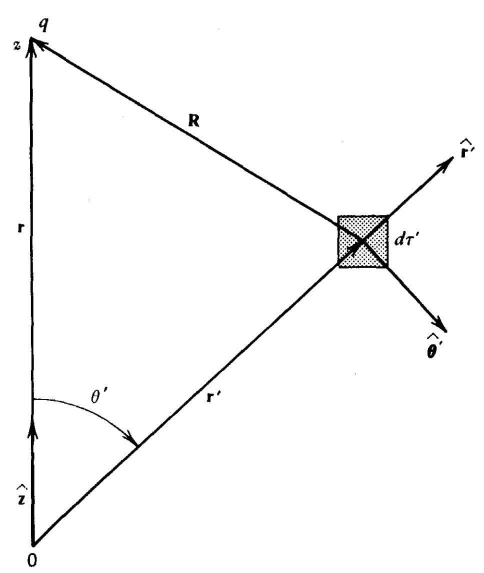


Figura 2-7 Otro punto de vista de la situación de la figura 2-6.

donde ρ se ha sacado de la integral porque es constante.

Debido a que $\hat{\mathbf{r}}'$ no es constante durante la integración, es conveniente encontrar $\mathbf{F}_q$ en función de sus componentes rectangulares. De acuerdo con (1-21), se realiza un producto punto de ambos miembros de (2-20) con $\hat{\mathbf{z}}$ y se utilizan (1-19), (1-93) y (1-18); así después de poner $d\tau'$ en la forma (1-99), se obtiene

$$F_{qz} = \frac{q\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} \frac{(z - r'\cos\theta')r'^2 \operatorname{sen}\theta' \, dr' \, d\theta' \, d\varphi'}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta')^{3/2}} \tag{2-21}$$

La integración sobre $d\varphi'$ puede ya realizarse, obteniéndose 2π. En seguida se integra sobre $d\theta'$. Para ello es conveniente introducir la nueva variable $\mu = \cos\theta'$. De esta manera $d\mu = -\operatorname{sen}\theta' \, d\theta'$ y, si $f = f(\cos\theta')$ es una función de $\cos\theta'$, se realizan las sustituciones indicadas para obtener un resultado general y útil.

$$\int_0^{\pi} f(\cos\theta') \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' = \int_{-1}^{1} f(\mu) \, d\mu \tag{2-22}$$

Una vez realizado esto, incluyendo el 2π de la integración sobre $d\varphi'$, (2-21) queda como

$$F_{qz} = \frac{q\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{a} r'^2 dr' \int_{-1}^{1} \frac{(z - r'\mu)\, d\mu}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\mu)^{3/2}} \tag{2-23}$$

La integral sobre μ se consulta en las tablas; el resultado es:

$$\left. -\frac{(z\mu - r')}{z^2(z^2 + r'^2 - 2zr'\mu)^{1/2}} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{z^2} \left[\frac{z - r'}{|z - r'|} + \frac{z + r'}{|z + r'|} \right] \tag{2-24}$$

donde se han escrito los términos $[(z \pm r')^2]^{1/2}$ como $|z \pm r'|$ para puntualizar que se debe estar seguro de obtener un número positivo para la raíz cuadrada. En el presente caso se ha supuesto que q se encuentra fuera de la esfera, de manera que $z > a$; dado que $r' \leqslant a$, siempre se tendrá que $z > r''$ por lo que $|z - r'| = z - r'$. También $|z + r'| = z + r'$, ya que se ha tomado a z como positiva y r' siempre lo es. Cuando esto se sustituye en (2-24), la integral sobre μ en (2-23) queda como $2/z^2$, que es constante por lo que toca a la integración sobre r', por lo que (2-23) queda como

$$F_{qz} = \frac{q\rho}{\epsilon_0 z^2} \int_0^a r'^2 dr' = \frac{q\rho a^3}{3\epsilon_0 z^2} \tag{2-25}$$

Antes de analizar este resultado, encuéntrense las demás componentes.

Al realizar el producto punto de (2-20) con $\hat{\mathbf{x}}$ y utilizar (1-93), se puede apreciar que el integrando resultante es proporcional a $\cos\varphi'$ y, por lo tanto,

$$F_{qx} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}_q \sim \int_0^{2\pi} \cos\varphi' \, d\varphi' = 0$$

De manera similar,

$$F_{qy} = \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{F}_q \sim \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi' \, d\varphi' = 0$$

El hecho de que estas dos componentes se anulen es consecuencia de la simetría del caso, ya que, como se puede observar en la figura 2-7, para cada elemento de carga igual al contenido en $d\tau'$ (que produce una contribución horizontal a la fuerza total), existe otro elemento de volumen, $d\tau''$, que es la reflexión de $d\tau'$ con respecto a la línea $\mathbf{r}$, por lo que está a la misma distancia, R de q. La carga contenida en $d\tau''$ produce una fuerza horizontal igual y opuesta, de modo que cuando se suman las contribuciones de este par, las fuerzas horizontales se cancelan pero las verticales no. Dado que todos los elementos de carga de la esfera se pueden aparejar de esta manera, la fuerza total no tendrá componentes horizontales netas, $\mathbf{F}_{qx}$ y $\mathbf{F}_{qy}$, tal como se encontró previamente.

Puesto que únicamente la componente z no es igual a cero, la fuerza total se encuentra en la dirección z y es

$$\mathbf{F}_q = \frac{q\rho a^3 \hat{\mathbf{z}}}{3\epsilon_0 z^2} \tag{2-26}$$

de acuerdo con (2-25) y (1-5). Se puede ver que si $q > 0$ y $\rho > 0$, entonces $\mathbf{F}_q$ estará dirigida hacia afuera de la esfera, tal como se podría esperar al ser repelida q por todas las cargas positivas; de manera similar, si $\rho < 0$, $\mathbf{F}_q$ se dirige hacia la esfera, es decir, que la fuerza sobre q es de atracción. Si se expresa en función de la carga total, Q', contenida en la esfera, (2-26) adquiere una forma muy interesante y reveladora. De acuerdo con (2-14) se tiene

$$Q' = \int dq' = \int \rho \, d\tau' = \rho \int_{\text{esfera}} d\tau' = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \rho \tag{2-27}$$

donde ρ es constante; al usar este resultado para eliminar ρ de (2-26), se encuentra que

$$\mathbf{F}_q = \frac{qQ'\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0 z^2} \tag{2-28}$$

Se puede ver en la figura 2-7 que z es la distancia del centro de la esfera a q; entonces, al comparar (2-28) con (2-3) se observa que esta esfera de carga uniforme actúa *como si* fuera una sola carga puntual localizada en el centro de la esfera, en lo que respecta a sus efectos sobre una carga situada fuera de la esfera. Como se verá más adelante, no ocurre lo mismo si el punto de interés se encuentra dentro de la esfera.

De hecho, el resultado obtenido es todavía más general de lo que aparenta a primera instancia. La localización de q se tomó sobre el eje z para simplicidad en la integración. Pero como ya se encontró a partir de la figura 2-7, el vector de posición de q con respecto al centro de la esfera es $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$, de modo que $|\mathbf{r}| = r = z$ y $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$, lo que permite escribir (2-28), para cualquier localización de q, en función de sus coordenadas esféricas como

$$\mathbf{F}_q = \frac{qQ'\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{2-29}$$

[Esto también se desprende de (1-90) y (1-93) ya que la localización de q en la figura 2-7 corresponde al caso especial para el que $\theta = 0$.]

Ejercicios

2-1 Dos cargas puntuales, q' y $-q'$, se localizan sobre el eje x con coordenadas a y $-a$ respectivamente. Encontrar la fuerza total ejercida sobre una carga puntual, q, que se localiza en un punto arbitrario del plano xy.

2-2 Cuatro cargas puntuales iguales, q', se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado a. El cuadrado descansa sobre el plano yz con uno de sus vértices en el origen y sus lados paralelos a los ejes positivos. Otra carga puntual, q, se coloca sobre el eje x a una distancia b del origen. Encontrar la fuerza total sobre q.

2-3 Ocho cargas puntuales iguales, q, se encuentran en los vértices de un cubo de lado a, cuya localización y orientación se muestra en la figura 1-41. Encontrar la fuerza total ejercida sobre una carga en el origen.

2-4 Repítanse los cálculos realizados en la sección 2-5 para el caso en que q está fuera de la esfera pero debajo de ella, es decir, z es negativo y $|z| > a$. Demostrar que el resultado es consistente con (2-26) y (2-29).

2-5 Repetir los cálculos de la sección 2-5 para el caso en que q se encuentra dentro de la esfera ($z < a$), para demostrar que $\mathbf{F}_q = (q\rho z/3\epsilon_0)\mathbf{Z}$.

2-6 Una esfera de radio a contiene carga distribuida con densidad volumétrica constante, ρ. Su centro se encuentra sobre el eje z a una distancia b del origen, siendo $b > a$. Una carga puntual, q, se coloca sobre el eje y a una distancia c del origen, siendo $c > b$. Encontrar la fuerza sobre q.

2-7 Una línea de carga de longitud L y $\lambda =$ const. está sobre el eje z positivo con sus extremos colocados en $z = z_0$ y $z_0 + L$. Encontrar la fuerza total ejercida sobre esta línea de carga por una distribución de carga, esférica y uniforme, con centro en el origen y radio $a < z_0$.

2-8 La superficie de una esfera de radio a se encuentra cargada con una densidad superficial constante, σ ¿Cuál es la carga total, Q', de la esfera? Encontrar la fuerza ejercida por esta distribución de carga sobre una carga puntual, q, situada sobre el eje z para el caso en que $z > a$ y para el caso en que $z < a$.

2-9 Dos líneas de carga de la misma longitud, L, son paralelas entre sí y descansan sobre el plano xy como se muestra en la figura 2-8. Ambas tienen la misma densidad de carga lineal $\lambda =$ const. Encontrar la fuerza total sobre II debida a I.

2-10 La línea de carga I de la figura 2-8 tiene ahora una densidad de carga líneal $\lambda = Ay^2$, siendo A una constante. ¿Cuáles son las unidades de A? ¿Cuál es la carga total de I? Encontrar la fuerza total que I ejerce sobre una carga puntual, q, situada sobre el eje x en $x = a$.

2-11 Existe carga distribuida sobre la superficie de un círculo de radio a que descansa sobre el plano xy y cuyo centro está en el origen. La densidad superficial de carga está dada por $\vartheta = A\ \rho^2$ en coordenadas cilíndricas, siendo A una constante. ¿Cuáles son las unidades de A? ¿Cuál es la carga total del círculo? Encontrar la fuerza ejercida por está distribución de carga sobre una carga puntual situada sobre el eje z.

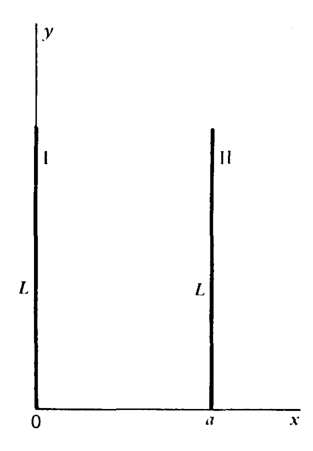


Figura 2-8 Las dos líneas de carga del ejercicio 2-9.

Capítulo

3

El campo eléctrico

La ley de Coulomb es un ejemplo de lo que se conoce como una ley de "acción a distancia". Proporciona una manera directa de calcular la fuerza sobre una carga dada cuando se conoce su posoción relativa con respecto a la carga fuente. La ley de Coulomb no incluye la descripción de cómo "sabe" la primera carga que la otra se encuentra ahí. Por ejemplo, si se varía la posición de la carga fuente, la fuerza ejercida sobre la otra carga también varía y se obtiene nuevamente por la ley de Coulomb. Esto implica que la variación ocurre instantáneamente, pero no hay indicación de cómo se pasa a este estado alterado. Como resultado de estas y otras consideraciones similares, se ha encontrado conveniente y útil realizar una división mental de la interacción entre ambas cargas, para presentar dos aspectos: primero, se asume que la carga fuente produce "algo" sobre el punto de campo y, segundo, que este "algo" actúa sobre la carga que se encuentra en el punto de campo, produciendo de esta manera la fuerza que actúa sobre ella. Este "algo", que funciona como una especie de intermediario entre las dos cargas, recibe el nombre de campo eléctrico y es lo que se estudia a continuación.

3-1 Definición del campo eléctrico

Si se analiza de nuevo (2-10), se puede observar que q es factor común a todos los términos, de tal manera que $\mathbf{F}_q$ puede escribirse como el producto de q y una cantidad que es independiente de q pero dependiente de los valores de todas las demás cargas y de sus posiciones con respecto a q. Esta cantidad recibe el nombre de *campo eléctrico,* **E**; así, se puede escribir (2-10) en la forma

$$\mathbf{F}_q = q\mathbf{E} \tag{3-1}$$

donde

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} \tag{3-2}$$

La ecuación 3-1 viene a ser la definición del campo eléctrico y puede interpretarse como una cantidad tal que, cuando se le multiplica por una carga puntual, el resultado es la fuer-

za sobre esa carga puntual. También se desprende de (3-1) que **E** se mide en newtons/Coulombs. La ecuación 3-2 constituye una fórmula para calcular **E** en la posición **r** (el "punto de campo") para una distribución dada de cargas puntuales; desde luego que (2-11) se sigue utilizando. Se debe notar que q no está incluida entre las cargas fuente en (3-2), es decir, que no se concibe una carga que ejerza una fuerza sobre sí misma.

Si las cargas fuente están distribuidas de manera continua, se puede combinar (3-1) y los resultados obtenidos en (2-15), (2-17) y (2-18) para obtener las expresiones correspondientes para **E**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,d\tau'}{R^2} \tag{3-3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,da'}{R^2} \tag{3-4}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\,ds'}{R^2} \tag{3-5}$$

Si todas las localizaciones se dan en coordenadas rectangulares, se obtiene una expresión explícita para **E** a partir de (2-12):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[(x-x_i)\hat{\mathbf{x}} + (y-y_i)\hat{\mathbf{y}} + (z-z_i)\hat{\mathbf{z}}\right]}{\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right]^{3/2}} \tag{3-6}$$

Por último, si todas las posibilidades que se han estudiado se encontraran presentes simultáneamente, se puede ver de (3-1) y (2-19) que **E** total en un punto dado se obtiene como la suma vectorial de las contribuciones de todas y cada una de las distribuciones de carga que producen el campo.

Si la distribución de carga es lo suficientemente simple, **E** puede calcularse por integración simple y directa. Aquí se estudian dos ejemplos de tal situación; la primera es una distribución lineal de carga y la segunda es una distribución superficial de carga. Después de ensayar sobre estos dos ejemplos, se trata con más detalle el significado de las operaciones efectuadas.

3.2 Campo de una línea infinita de carga uniforme

Supóngase que λ = const. y hágase que la distribución de carga coincida con el eje z, tal como se muestra en la figura 3-1. Se toma el origen de manera tal que el punto de campo, **P**, quede por conveniencia sobre el plano xy; así se tiene que $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho}$ y $\mathbf{r}' = z'\hat{\mathbf{z}}$ de modo que $\mathbf{R} = \rho\hat{\rho} - z'\hat{\mathbf{z}}$ y $R^2 = \rho^2 + z'^2$. De la figura se desprende también que $ds' = dz'$ para este caso, por lo que (3-5) queda como

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\rho\hat{\rho} - z'\hat{\mathbf{z}})\,dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\rho\hat{\rho}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{3-7}$$

La última forma se obtiene por la desaparición del componente $\hat{\mathbf{z}}$ de la integral, debido a que el integrando es una función impar de z' y $\hat{\rho}$ es constante con respecto a la variable de integración z'. La integral en (3-7) es

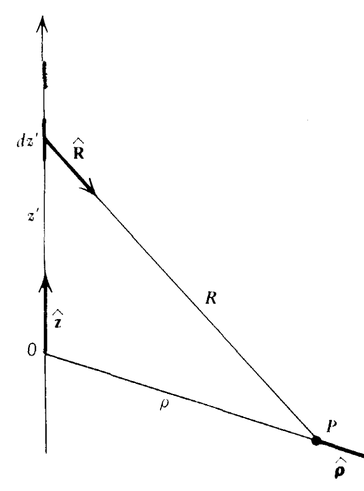


Figura 3-1. Cálculo del campo debido a una línea infinita de carga uniforme.

$$\left. \frac{z'}{\rho^2(\rho^2+z'^2)^{1/2}} \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\rho^2}[(1)-(-1)] = \frac{2}{\rho^2} \tag{3-8}$$

de manera que el resultado final viene a ser

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{3-9}$$

Así, el campo eléctrico tiene tan sólo una componente radial. Está dirigido hacia afuera (alejándose) de la línea de carga si $\lambda > 0$, como cabría esperar, porque una carga positiva q sería repelida, pero estaría dirigida radialmente hacia el centro sí λ fuera negativa. La magnitud de **E** varía inversamente con la distancia, ρ, a la línea de carga.

Dado que (3-9) es independiente del ángulo φ, se puede observar que una superficie de **E** constante en magnitud será un cilindro de radio ρ con la línea de carga como eje. La figura 3-2 muestra una porción de este cilindro, indicando también algunas direcciones de **E** para $\lambda > 0$ sobre un círculo formado por la intersección del cilindro y un plano perpendicular al eje z.

3-3 Campo de un plano infinito uniformemente cargado

Supóngase que existe una densidad de carga superficial σ, constante sobre un plano infinito que descansa sobre el plano xy. Resulta de utilidad hacer que el eje z pase por el punto de campo, P. Para la integración se usan coordenadas rectangulares. En la figura 3-3 se puede observar que $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}}$. Dado que el elemento de superficie es $da' = dx'\,dy'$, (3-4) queda, de acuerdo con (2-2), (1-13) y (1-14):

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-x'\hat{\mathbf{x}} - y'\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})\,dx'\,dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}} \tag{3-10}$$

Es fácil observar que $E_x = E_y = 0$, ya que los términos del integrando en $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{y}}$ son funciones impares de x' y y', respectivamente. Por lo tanto, (3-10) se reduce a

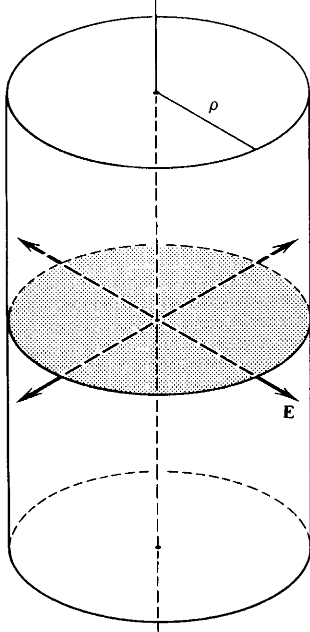


Figura 3-2. Cilindro de campo eléctrico de magnitud constante para una línea infinita de carga uniforme.

$$\mathbf{E}=\frac{\sigma\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} z\,dx'\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{3/2}} \tag{3-11}$$

La integral sobre y' es idéntica *en forma* a la de (3-7) y, por (3-8), es igual a $2/(x'^2+z^2)$; así, (3-11) queda como

$$\mathbf{E}=\frac{\sigma\hat{\mathbf{z}}}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\,dx'}{x'^2+z^2}=\pm\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \tag{3-12}$$

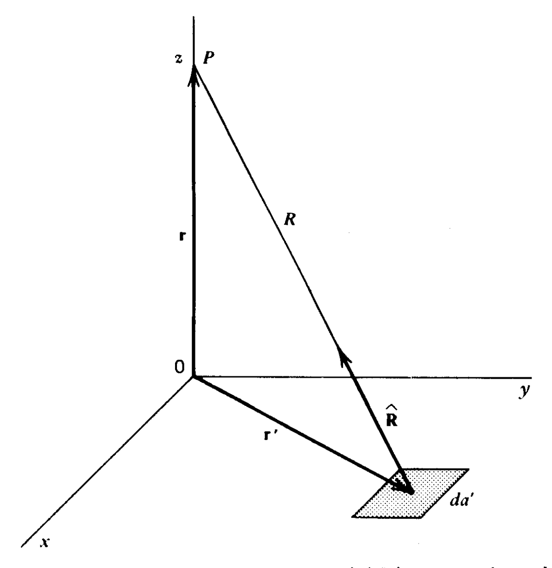


Figura 3-3. Cálculo del campo debido a un plano infinito uniformemente cargado.

donde el signo positivo se debe utilizar para $z > 0$ y el negativo para $z < 0$. A menudo resulta más conveniente escribir (3-12) como

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|}\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{3-13}$$

que da los signos correctos de **E** de manera automática.

De (3-12) se desprende que **E** siempre se dirige hacia afuera, es decir, alejándose de un plano cargado positivamente ($\sigma > 0$), mientras que se dirige hacia el plano si $\sigma < 0$. Estas dos direcciones corresponden a las de la fuerza sobre una carga positiva q que se colocara en ese punto. Resulta interesante observar que la magnitud de **E** es independiente de la posición, es decir, que **E** tiene el mismo valor sin importar qué tan cerca o qué tan lejos se encuentre del plano; esencialmente, esto resulta del hecho de que sin importar dónde se localice el punto de campo, siempre hay una cantidad infinita de carga "visible" para él. Estas propiedades de **E** se indican en la figura 3-4, que se ha dibujado para $\sigma > 0$, y muestra una vista de perfil del plano cargado. Las líneas punteadas son trazas de planos paralelos al plano cargado por arriba y por abajo del mismo. La figura se verá igual si se pone de cabeza, lo cual es lógico porque la elcción original de z positiva fue completamente arbitraria. De manera similar, la figura no varía si se le observa por detrás de la página en lugar de por el frente. En otras palabras, el resultado (3-12) es completamente consistente con la "simetría" básica de la distribución de carga fuente. **E** cambia su dirección en forma discontinua si se atraviesa el plano cargado; por ejemplo, si se pasa de abajo hacia arriba, el cambio total es E_z (arriba) $- E_z$ (abajo) $= \sigma/\epsilon_0$, como se desprende de (3-12).

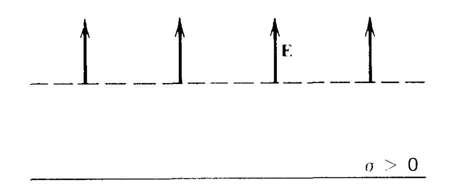
3-4 ¿Qué significa todo esto?

Fue relativamente sencillo introducir una cantidad auxiliar que permitiera dividir la interacción entre dos cargas en partes conceptualmente diferentes. Esto se logró al definir un nuevo campo vectorial, **E**, y se encontraron medios que, en principio, permiten calcularlo para cualquier punto una vez que se especifican las cargas que lo originan. Sin embargo, resulta natural cuestionarse si se gana algo con todo este procedimiento.

Se puede fácilmente adoptar la postura de que esto se ha hecho exclusivamente porque resulta más conveniente matemáticamente. no tanto porque ahorre algo de escritura al no tener que acarrear el símbolo q en todas las ecuaciones, sino porque ayuda a calcular primero **E** y después introducir la q como último paso, de acuerdo con (3-1). Así, se puede considerar el cálculo de **E** como una especie de proporción de contingencia referida a todo el espacio, en el sentido de que **E**(**r**), combinado con (3-1), indica qué *pasaría si* se colocara una carga puntual q en **r**.

Por otro lado, las fórmulas (3-2) a (3-6) permiten calcular el campo eléctrico en **r** haya o no carga sujeta a fuerzas. Este hecho resulta una gran tentación para dar un salto conceptual y pensar que **E** es una entidad física por derecho propio. La mayoría de estas ideas se originaron con Faraday, que pensaba que la presencia de cargas realmente cambiaban las propiedades del espacio y que **E** era una manifestación de esta alteración. Para él, el campo eléctrico era una cantidad física muy real.

Si se adopta la actitud de que **E** es una cantidad física, surge naturalmente la cuestión de cómo medirla. A primera vista esto parece ser muy simple: sólo hay que poner una carga puntual q en reposo, en la localización **r** de interés, medir después la fuerza $\mathbf{F}_q$ que actúa sobre ella y, de acuerdo con (3-1), calcular $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_q/q$. Surge un nuevo



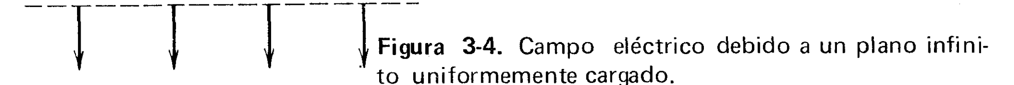


Figura 3-4. Campo eléctrico debido a un plano infinito uniformemente cargado.

problema al reconocer que la presencia de q ejercerá ahora nuevas fuerzas sobre las cargas q_i de (3-2), dadas por (2-8), por lo que ya no estarán en equilibrio, aunque eventualmente se restablezca este equilibrio. En el caso ideal en que se pueda asumir que las q_i están rígidamente fijas en sus posiciones, la nueva fuerza eléctrica puede compensarse con una nueva fuerza mecánica que se produzca sin deformación del soporte; de esta manera, (2-9) será válida al aplicarse a las q_i, porque las posiciones de las q_i no habrán variado. El valor de **E** dado por (3-2) será exactamente el mismo que tenía antes de que q se introdujera al sistema, y **E** podrá ser obtenido correctamente a partir de (3-1). Sin embargo, en un caso real los valores de las nuevas fuerzas mecánicas que se requieren para mantener el equilibrio casi siempre producen una deformación del soporte, tal como el doblez de una barra o el estiramiento o la compresión de un resorte; así cuando se logra la nueva configuración de equilibrio, las posiciones de las q_i han cambiado, el valor de (3-2) será generalmente diferente y el resultado neto será que el mero acto necesario para medir el campo preexistente lo ha alterado. (Además, como se verá más adelante, si las cargas fuente están asociadas con conductores, generalmente se deberán mover en el conductor hasta lograr el nuevo equilibrio mutuo, llegándose otra vez a la conclución de que el campo que se iba a medir quedó modificado por el acto de medición). Este problema de cambiar lo que se pretemde medir no es exclusivo del electromagnetismo, desde luego, y lo que generalmente se trata de hacer es resolverlo de la misma manera general, es decir, tratando de minimizar lo más posible la alteración, mientras sea posible obtener un efecto medible. Para proceder de esta manera con **E**, se puede imaginar que la carga sobre la que actúa la fuerza a medir es muy pequeña, y así aproximarse al límite en que ésta tiende a cero; si se usa δq para indicar esta "carga de prueba" y $\delta \mathbf{F}$ para la fuerza medida que actúa sobre ella, entonces **E** deberá determinarse por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{\delta q \to 0} \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta q} \tag{3-14}$$

Aunque el uso del campo eléctrico puede considerarse como un artificio conveniente en electrostática, cuando se manejan otros problemas, en especial aquellos en los que el campo es función del tiempo, como el que se mencionó brevemente en el párrafo introductorio de este capítulo, se ha encontrado que es virtualmente imposible resolverlos sin el uso extensivo de los campos vectoriales. Se encontrará útil definir algunos otros campos vectoriales a medida que se avanza en el texto y, ya sea que se consideren cantidades físicas reales o no, de hecho se les tratará *como si* lo fueran. Aquí se estudiarán sus propiedades así como algunas aplicaciones; entre esas propiedades se encuentran sus ecuaciones diferenciales de fuente, es decir, sus divergencias y rotaciones. Ya se ha visto que los orígenes de un campo eléctrico son las cargas de cualquier tipo, pero es conveniente volver

a expresar esto mismo en función de expresiones explícitas de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ y $\nabla \times \mathbf{E}$; los próximos dos capítulos estudian la forma de obtenerlas, así como otras informaciones importantes.

Ejercicios

3-1 Dos cargas puntuales, q y $-q$, se localizan sobre el eje y en $y = a$ y $-a$, respectivametne. Encontrar **E** para cualquier punto en el plano xy. ¿Para qué puntos, si los hay, es $E_x = 0$?

3-2 Cuatro cargas puntuales están situadas en los vértices de un cuadrado sobre el plano xy. Sus valores y posiciones son las siguientes: q, (0,0); $2q$, (0,a); $3q$, (a,0); $-4q$, (a,a). Encontrar **E** en el centro del cuadrado.

3-3 Considérese un cubo de arista a con la localización y orientación que se muestra en la figura 1-41. Existe una carga puntual, q, en cada uno de los vértices excepto en (a,a,0). Encontrar **E** en el vértice vacío.

3-4 Repetir los cálculos de la sección 3-2 para un punto de campo general, $\mathbf{r} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}$, y así demostrar que se obtiene el mismo resultado.

3-5 Repetir los cálculos de la sección 3-3 para un punto de campo general, (x,y,z), y así demostrar que se obtiene el mismo resultado.

3-6 Repetir los cálculos de la sección 3-3 utilizando coordenadas cilíndricas para el punto de fuente.

3-7 Una línea de carga uniforme, paralela al eje z intersecta el plano xy en el punto (a,b,0). Encontrar las componentes rectangulares de **E** en el punto (0,c,0).

3-8 Dos planos infinitos con iguales densidades de carga superficial, σ, son paralelos al plano xy y están situados como se muestra en la figura 3-5. Encontrar **E** para todos los valores de z.

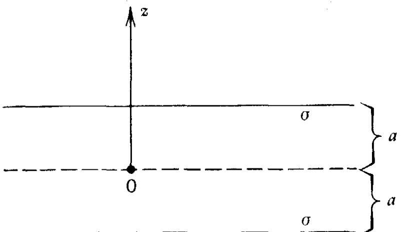


Figura 3-5. Los dos planos infinitos cargados del ejercicio 3-8.

3-9 Dos planos infinitos con iguales pero opuestas densidades de carga superficial σ = constante, son paralelos al plano xy y están situados como se indica en la figura 3-6. Encontrar **E** para todos los valores de z.

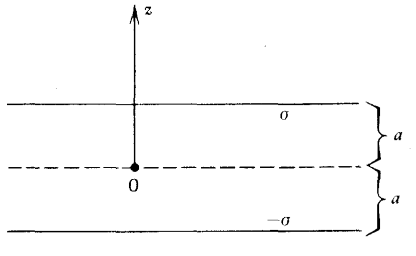


Figura 3-6. Los dos planos infinitos cargados del ejercicio 3-9.

3-10 El arco circular de radio a que se muestra en la figura 3-7 descansa sobre el plano xy y posee densidad de carga lineal λ constante, estando su centro de curvatura en el origen. Encontrar **E** en un punto arbitrario sobre el eje z. Demostrar que cuando la curva es una circunferencia completa la respuesta es

$$\mathbf{E}=\frac{\lambda a z\hat{\mathbf{z}}}{2\epsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$$

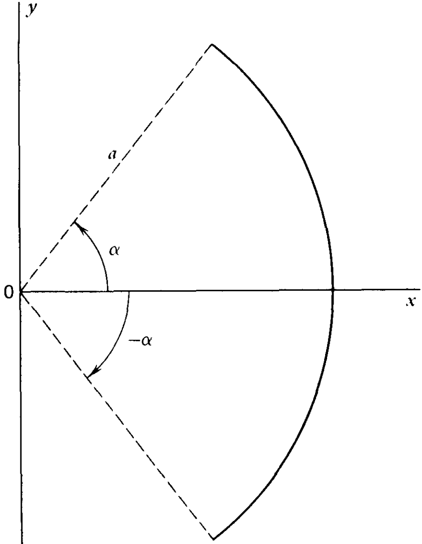


Figura 3-7. El arco circular cargado del ejercicio 3-10.

3-11 Existe carga distribuida con una densidad de carga lineal λ constante, sobre la recta de longitud finita que se muestra en la figura 3-8. Encontrar **E** en P. Con la ayuda de las distancias R_2 y R_1, expresar **E** en función de los ángulos α_2 y α_1 que se muestran. Encontrar **E** para el caso especial en el que $L_2 = L_1 = L$ y P se encuentra sobre el plano xy.

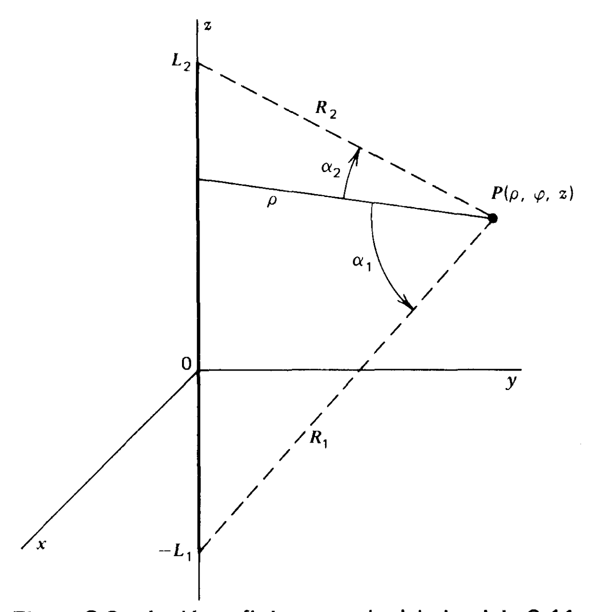


Figura 3-8. La línea finita cargada del ejercicio 3-11.

3-12 Existe carga distribuida con densidad superficial de carga σ constante, sobre un círculo de radio a. El círculo descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Demostrar que el campo eléctrico en un punto sobre el eje z está dado por

$$\mathbf{E}=\hat{\mathbf{z}}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|}\right)\left[1-\frac{|z|}{(a^2+z^2)^{1/2}}\right] \tag{3-15}$$

¿Cómo queda esta expresión a medida que $a \to \infty$?

3-13 Un cilindro inifinitamente largo tiene su eje coincidente con el eje z. Tiene una sección circular de radio a y posee una densidad volumétrica de carga ρ_{ch} constante. Encontrar **E** para todos los puntos dentro y fuera del cilindro. Sugerencia: utilizar coordenadas cilíndricas para la integración; por conveniencia, escoger el punto de campo sobre el eje x (¿Será esto suficientemente general?); posiblemente se requiera la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\pi}\frac{(A-B\cos t)dt}{A^2-2AB\cos t+B^2}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{A} \text{ si } A^2>B^2\\ 0 \text{ si } A^2<B^2\end{cases} \tag{3-16}$$

Capítulo

4

Ley de Gauss

Si se parte la definición de divergencia dada en (1-66), se puede anticipar que el flujo de **E** a través de una superficie cerrada, es decir, su integral de superficie, será un tema de gran utilidad. Como se verá enseguida, la naturaleza del cuadrado inverso de la ley de Coulomb permite evaluar este flujo sobre una superficie de tamaño y forma arbitrarios.

4-1 Derivación de la ley de Gauss

Se desea demostrar que

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\text{dentro}} q_i = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0} \tag{4-1}$$

donde Q_{en} es la carga neta contenida *dentro* del volumen limitado por la superficie arbitraria, S. De acuerdo con (3-2) se obtiene

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i \oint_S \frac{\hat{\mathbf{R}}_i\cdot d\mathbf{a}}{R_i^2} \tag{4-2}$$

Hay dos casos que merecen consideración especial.

1. q_i se encuentra dentro de S (figura 4-1). Si se recuerda lo visto en relación a la figura 1-26, se observa que

$$\frac{\hat{\mathbf{R}}_i\cdot d\mathbf{a}}{R_i^2} = \frac{da\cos\Theta}{R_i^2} = \frac{\text{área}\perp\text{ to }\hat{\mathbf{R}}_i}{R_i^2} = d\Omega \tag{4-3}$$

donde $d\Omega$ = elemento de ángulo sólido subtendido en q_i por la superficie da. Para poder evaluar la integral en (4-2) se considera una esfera, S_0, de radio R_0 con q_i en su centro. Este *mismo* ángulo sólido $d\Omega$ intersectará la superficie da_0 sobre esta esfera; como se puede observar en la figura, $d\mathbf{a}_0$ es paralela a $\mathbf{R}_i$, de manera que si se utiliza (4-3) en este

caso, $d\Omega$ es también igual a $da_0/R_0{}^2$. Por lo tanto, la integral de (4-2) puede también escribirse como

$$\oint d\Omega = \oint_{S_0} \frac{da_0}{R_0^2} = \frac{1}{R_0^2}\oint_{S_0} da_0 = \frac{4\pi R_0^2}{R_0^2} = 4\pi \qquad (4\text{-}4)$$

dado que $\mathbf{R}_0$ es constante para todos los puntos en la superficie de la esfera. Así, el ángulo sólido total subtendido por cualquier superficie cerrada con respecto a un punto dentro de ella es 4π, por lo que se puede escribir que

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{R}}_i \cdot d\mathbf{a}}{R_i^2} = 4\pi \qquad \text{(si } \mathbf{r}_i \text{ está dentro de } S) \qquad (4\text{-}5)$$

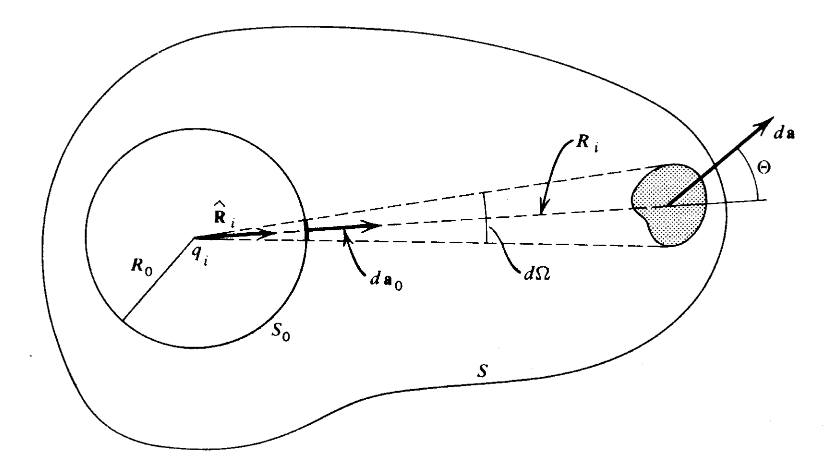


Figura 4-1 La carga puntual se encuentra dentro de la superficie S.

2. q_i está fuera de S (figura 4-2). Aquí se deben considerar los dos elementos de superficie, $d\mathbf{a}_1$ y $d\mathbf{a}_2$, de S que son recortados por el mismo ángulo sólido $d\Omega$ pero que se encuentran en lados opuestos de S. Sus distancias a q_i se escriben como $\mathbf{R}_{i1}$ y $\mathbf{R}_{i2}$. Como antes, se tiene que

$$\frac{\hat{\mathbf{R}}_i \cdot d\mathbf{a}_1}{R_{i1}^2} = \frac{da_1 \cos\Theta_1}{R_{i1}^2} = d\Omega$$

pero ahora, ya que $\Theta_2 > \pi/2$, de manera que $\cos\Theta_2$ es negativo,

$$\frac{\hat{\mathbf{R}}_i \cdot d\mathbf{a}_2}{R_{i2}^2} = \frac{da_2 \cos\Theta_2}{R_{i2}^2} = -d\Omega$$

y, por lo tanto,

$$\frac{\hat{\mathbf{R}}_i \cdot d\mathbf{a}_1}{R_{i1}^2} + \frac{\hat{\mathbf{R}}_i \cdot d\mathbf{a}_2}{R_{i2}^2} = 0 \qquad (4\text{-}6)$$

de manera que la contribución neta de estos dos elementos de superficie a la integral de

(4-2) es igual a cero. Dado que todos los elementos de superficie de S se pueden aparear de esta manera, todas sus contribuciones a la integral se cancelarán mutuamente y, por lo tanto,

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{R}}_i \cdot d\mathbf{a}}{R_i^2} = 0 \qquad (\text{si } \mathbf{r}_i \text{ está dentro de } S) \tag{4-7}$$

Por ello, de acuerdo con (4-2), (4-5) y (4-7),

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{centro}} q_i \oint_S \frac{\hat{\mathbf{R}}_i \cdot d\mathbf{a}}{R_i^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{dentro}} q_i = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0} \tag{4-8}$$

con lo que se ha demostrado la ley de Gauss tal como se enuncia en (4-1), y como ahora puede verse es consecuencia directa de la ley del cuadrado inverso que obedece la fuerza entre cargas puntuales.

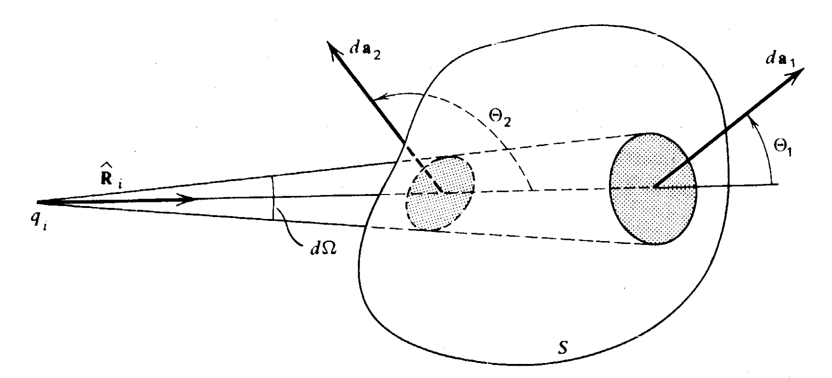


Figura 4-2 La carga puntual se encuentra fuera de la superficie S.

Se pueden exponer ahora algunas implicaciones importantes de este resultado. Cualesquiera cargas que se encuentren fuera de una superficie cerrada no afectan el valor de la *integral,* aunque sus valores y localizaciones sí afectan el valor particular de **E** en cada punto de la superficie. De manera similar, la integral es función únicamente del valor total de las cargas que se encuentran dentro de la superficie y, por lo tanto, es independiente de sus localizaciones específicas dentro de dicha superficie; si las cargas cambian de posición, cabe esperar que el valor de **E** en un punto particular de la superficie cambie también, aun cuando el valor de la integral completa no se afecte. Dado que el resultado obtenido en (4-1) es una simple suma, se puede observar que cada una de las cargas contribuye independientemente al flujo total de **E** a través de S; por lo tanto, una carga puntual dada, q, posee un flujo total de **E** igual a q/ϵ_0 a través de cualquier superficie cerrada que la rodee.

Si ahora se asume que las cargas dentro de S están distribuidas en forma continua con densidad ρ , se puede utilizar (2-14) para escribir

$$Q_{\text{en}} = \int_V \rho \, d\tau$$

donde V es el volumen total encerrado por S. Si también se aplica el teorema de la divergencia (1-59), se puede escribir (4-8) como

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau \tag{4-9}$$

Dado que este resultado se aplica para cualquier volumen V arbitrario, será también válido para uno infinitamente pequeño, por lo que se pueden igualar los integrandos para obtener

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4-10}$$

Este importante resultado es una de las ecuaciones de Maxwell y es completamente equivalente a la ley de Coulomb para la fuerza entre partículas cargadas. (Más adelante se verá la importancia de recordar que la densidad de carga ρ incluye *todas* las cargas, de cualquier fuente, ya que el campo eléctrico es producido, por definición, por todas ellas.)

4-2 Algunas aplicaciones de la ley de Gauss

Si la distribución de carga posee suficiente simetría, la ley de Gauss permite calcular de manera muy sencilla y conveniente el campo eléctrico. El problema principal es la elección de una superficie para las cuales la magnitud de **E** sea constante, y tales que **E** sea paralelo o perpendicular a ellas, tanto por facilidad en la integración como para evitar las dificultades que surgen cuando se desconoce la dependencia de **E** con respecto a la posición. Este procedimiento se demuestra muy claramente por medio de ejemplos, por lo que aquí se dará uno para cada una de las distribuciones continuas de carga que se han visto.

Ejemplo

Línea infinita de carga uniforme. Se supone que λ = const. y también que la línea de carga coincide con el eje z; se utilizarán coordenadas cilíndricas. Para una recta infinita, no tiene importancia en cual de sus porciones se realiza el estudio, ya que la carga se extiende hasta el infinito en ambas direcciones; por ello se concluye que **E** no puede ser función de z. De manera similar, no hay forma de distinguir entre dos valores de φ, ya que la distribución de carga es la misma sin importar desde qué dirección perpendicular a z se le observe. Por lo tanto, **E** también debe ser independiente de φ y, a lo más, debe depender solamente de la distancia ρ a la recta; así, la conclusión es $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho)$.

Supóngase ahora que **E** tiene una componente paralela a la recta, es decir, que $E_z(\rho) \neq 0$. En este ejemplo, la elección de la dirección positiva o negativa del eje z es completamente arbitraria; es decir no existe una distinción entre "arriba" y "abajo". Pero si E_z no fuera igual a cero, este mismo hecho constituiría una distinción entre arriba y abajo; por lo tanto, debe concluirse que $E_z = 0$. De manera similar, no hay razón alguna para preferir un sentido para φ, por lo que $E_\varphi = 0$. Por lo tanto, se llega a la conclusión de que, por la simetría de la situación, **E** sólo puede ser radial y se le puede expresar como $\mathbf{E} = E\rho\,(\rho)\hat{\rho}$. Así, una superficie para la cual la de **E** es constante es un cilindro de radio ρ cuyo eje coincide con la línea de carga la figura 4-3 muestra una sección finita de este cilindro, cuya longitud se ha elegido igual a L, y en ella se puede observar que su normal exterior, $\mathbf{n}_c$, es exactamente $\hat{\rho}$, por lo que también es paralela a **E**. Todo esto sugiere que se utilice la superficie curva de este cilindro como parte de la superficie de integración. Se puede ahora obtener una superficie cerrada si el resto de ella se hace consistir de las dos secciones circulares de radio ρ que se muestran, quedando así la superficie final de integración en la forma de un cilindro circular recto. Las normales exteriores de estas superficies superior e inferior se indican como $\hat{\mathbf{n}}_u$ y $\hat{\mathbf{n}}_l$ y se puede observar que son iguales a $\hat{\mathbf{z}}$ y $-\hat{\mathbf{z}}$, respectivamente. Aunque $\mathbf{E}_\rho$ tiene una dependencia desconocida con respecto a ρ en estas

superficies circulares, E es perpendicular a los vectores de superficie y por tanto su contribución al flujo total es nula.

Después de toda esta discusión, la evaluación misma de la integral de superficies es lo de menos importancia. Se le puede escribir como la suma de integrales sobre la super-

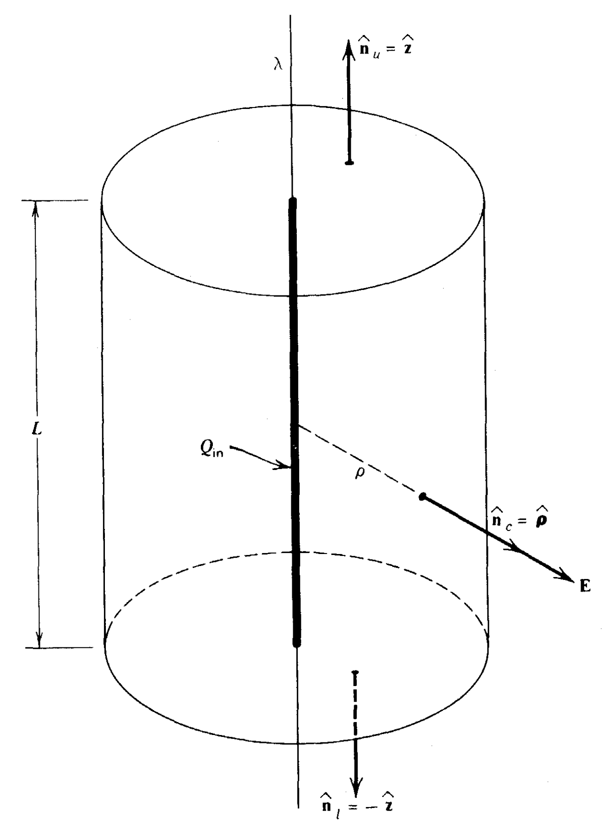


Figura 4-3 Cálculo del campo de una línea infinita de carga uniforme.

ficie curva y las caras superior e inferior (que aquí se designan con *c, u* y 1). Se recuerda también que $E\rho$ (ρ) es constante sobre la superficie curva, dado que ρ es constante. Así, en este caso (4-1) queda como

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_c E_\rho(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_c\,da + \int_u E_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_u\,da + \int_l E_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_l\,da$$

$$= E_\rho(\rho)\int_c da + 0 + 0 = E_\rho(\rho)2\pi\rho L = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

donde se han utilizado (1-76) y (2-16), esta última para encontrar la carga total dentro del cilindro, la cual es aquélla contenida en la recta de longitud L. Se puede observar que al despejar E_ρ, la longitud arbitraria L se cancela, quedando $E_\rho(\rho) = \lambda/2\pi\rho\epsilon_0$. de manera que

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{4-11}$$

lo que viene a ser exactamente el mismo resultado (3-9) que se obtuvo antes por integración directa.

Ejemplo

Plano infinito uniformemente cargado. Aquí se supone que σ = const. y, para mayor claridad, que el plano coincide con el xy. La figura 4-4 muestra una vista de perfil de la situación. Dado que tanto la elección del origen como la orientación de los ejes x y y son completamente arbitrarias en este caso, **E** debe ser independiente tanto de x como de y. De manera similar, no hay aquí ninguna distinción básica entre derecha e izquierda o entre una dirección hacia afuera o hacia adentro del papel, por lo que **E** no puede tener componentes paralelas al plano. Por tanto, **E** solamente puede tener una componente z que, cuando mucho, podrá ser función de z, la distancia al plano. No existe tampoco ninguna diferencia real entre arriba y abajo, por lo que **E** siempre debe apuntar ya sea hacia el plano o alejándose de él, dependiendo del signo de σ. Así, **E** debe ser de la forma $\mathbf{E} = \pm E(z)\hat{\mathbf{z}}$ con el signo superior para $z > 0$ y el inferior para $z < 0$; $E(z)$ puede ser positivo o negativo, pero la figura se dibujó para el caso en que $E(z)$ es positivo.

Estas consideraciones sugieren que la elección de la superficie de integración sea un cilindro recto que se extiende una distancia igual, D, hacia arriba y hacia abajo del plano, con caras paralelas al mismo y de área igual a Δa; en la figura, las normales exteriores se indican como $\hat{\mathbf{n}}_u = \hat{\mathbf{z}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_l = -\hat{\mathbf{z}}$. **E** tiene la magnitud constante $E(D)$ en estas caras. La superfice curva que conecta estas caras tiene sus lados perpendiculares al plano; una de sus normales exteriores se indica como $\hat{\mathbf{n}}_c$ y se puede observar que $\hat{\mathbf{n}}_c \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ para todas las porciones de la superficie curvada. También puede observarse que Q_{en} es la carga recortada en el plano por la sección del cilindro y es, por tanto, igual a $\sigma\Delta a$.

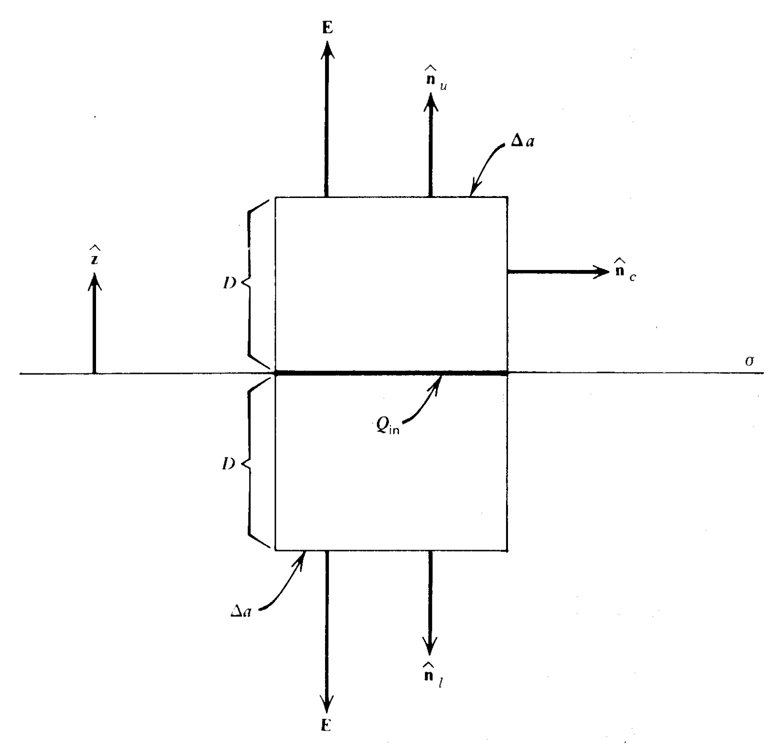


Figura 4-4 Cálculo del campo de un plano uniforme infinito.

De manera que en este caso, (4-1) se convierte en:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_u E(D)\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{z}}\,da + \int_l E(D)(-\hat{\mathbf{z}})\cdot(-\hat{\mathbf{z}})\,da + \int_c E(z)\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{n}}_c\,da$$

$$= E(D)\Delta a + E(D)\Delta a + 0 = 2E(D)\Delta a = \frac{Q_{en}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \Delta a}{\epsilon_0}$$

De aquí que $E(D) = \sigma/2\epsilon_0$, que resulta ser independiente de D; por lo tanto, el campo eléctrico para este plano cargado está dado por

$$\mathbf{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \tag{4-12}$$

que es exactamente el mismo resultado (3-12) que se obtuvo por integración directa.

Ejemplo

Distribución de carga esféricamente simétrica. La distribución de carga está contenida dentro de una esfera de radio a. No es necesario suponer que la densidad de carga sea constante, pero sí suponer que es independiente del ángulo, de manera que, cuando mucho, $\rho = \rho(r)$; esto es lo que significa "esféricamente simétrica". De esto se puede concluir que $\mathbf{E}$ es radial y que su magnitud es independiente del ángulo, por lo que se le puede expresar como $\mathbf{E} = Er(r)\hat{\mathbf{r}}$.

Dado que la magnitud de $\mathbf{E}$ es constante sobre una esfera de radio r se elige tal esfera como superficie de integración; su normal exterior es también $\hat{\mathbf{r}}$. Por lo tanto, el miembro izquierdo de (4-1) queda, al utilizar (1-92), como

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \oint_S E_r(r)\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}\,da = E_r(r)\oint_S da = 4\pi r^2 E_r(r) \tag{4-13}$$

y, por lo tanto,

$$E_r(r) = \frac{Q_{en}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{4-14}$$

donde

$$Q_{en} = \int_{V(r)} \rho(r')\,d\tau' \tag{4-15}$$

y donde $V(r)$ es el volumen de la esfera de radio r. Hay dos casos a considerar.

1. Para puntos fuera de la esfera de carga, $r > a$. Aquí $\rho(r') = 0$ si $r' > a$, y el volumen de integración de (4-15) se reduce a $V(a)$, es decir, el volumen total de la distribución de carga, de manera que

$$Q_{en} = \int_{V(a)} \rho(r')\,d\tau' = Q \tag{4-16}$$

donde Q es la carga total contenida en la esfera. Así, (4-14) queda como

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r > a) \tag{4-17}$$

y el campo eléctrico afuera es el mismo *que si* toda la carga fuese una carga puntual situada en el centro de la esfera. Si se recuerdan (3-1) y (2-29) (en las que la carga total se escribió como Q'), se ve que éste es el mismo resultado obtenido por integración directa para la esfera de densidad de carga constante, pero ahora se puede apreciar que esta conclusión es en general válida para cualquier esfera de carga, siempre y cuando la distribución de carga sea esféricamente simétrica.

2. Dentro de la esfera de carga, $r < a$. En este caso se puede utilizar (1-99) para escribir (4-15) en la forma

$$Q_{in} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho(r')r'^2 \operatorname{sen}\theta' \, dr' \, d\theta' \, d\varphi' = 4\pi \int_0^{r} \rho(r')r'^2 \, dr' \tag{4-18}$$

lo cual, al sustituir en (4-14) da el campo interior como

$$E_r(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2}\int_0^{r} \rho(r')r'^2 \, dr' \qquad (r<a) \tag{4-19}$$

No se puede proseguir si no se conoce la forma explícita de $\rho(r')$.

Ejemplo

Como un caso especial del ejemplo anterior, asúmase que ρ = const., es decir, que se tiene una esfera uniformemente cargada. En este caso la integral de (4-19) es

$$\int_0^{r} \rho r'^2 \, dr' = \rho \int_0^{r} r'^2 \, dr' = \tfrac{1}{3}\rho r^3$$

de manera que

$$E_r(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \qquad (r<a) \tag{4-20}$$

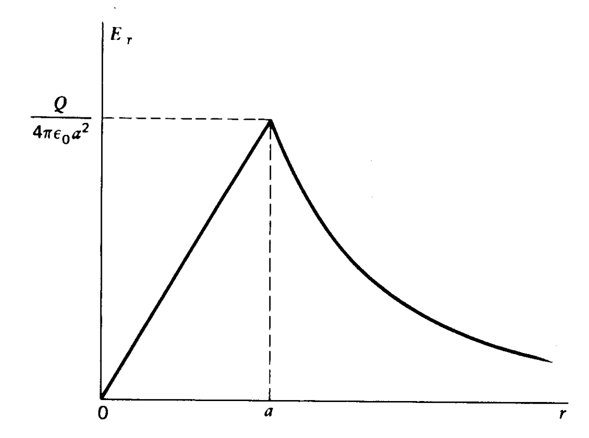


Figura 4-5 Campo de una esfera de carga uniforme, de radio a, en función de la distancia r al centro.

Esto puede ser expresado en función de la carga total Q por medio de (2-27); el resultado es

$$E_r(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \qquad (r<a) \tag{4-21}$$

lo que demuestra que el campo aumenta linealmente con la distancia a partir de su valor cero en el centro; afuera de la esfera varía inversamente con el cuadrado de la distancia al centro, de acuerdo con (4-17). Nótese que tanto (4-17) como (4-21) dan el mismo valor $Q/4\ \pi\epsilon_0 a2$ en la superficie de la esfera de carga, donde $r = a$; por tanto, el campo eléc-

trico es continuo a través de esta superficie. Estos resultados para la esfera uniformemente cargada se ilustran en la figura 4-5.

Otras distribuciones de carga esféricamente simétricas, $\rho(r)$, dan una dependencia diferente de E_r con respecto a r *dentro* de la esfera, pero exactamente la misma que se muestra en la figura 4-5 fuera de la esfera, cuando E_r se expresa en función de la carga total contenida dentro de la esfera $r = a$.

4-3 Cálculo directo de $\nabla \cdot \mathbf{E}$

Aunque ya se logró encontrar en (4-10) una forma de expresar la divergencia de **E**, ésta se obtuvo de manera indirecta, y resulta de interés ver cómo se puede obtener el mismo resultado por medio de un método directo que parte de la ecuación básica que define a **E**. Es conveniente comenzar con la expresión (3-3), la cual es apropiada para una distribución continua de carga. Si se realiza un producto punto con ∇ en ambos miembros de (3-3), se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{R}}\, d\tau'}{R^2} \tag{4-22}$$

Las derivadas en ∇ se toman todas con respecto a las coordenadas, x,y y z del punto de campo, ya que es ahí donde se desea evaluar $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$. La integral definida de (4-22) se toma sobre un volumen de fuente específico, V'; los límites de la integración serán constantes o, cuando mucho, funciones de las variables del punto de fuente, es decir, de variables primas. (En el ejemplo de la sección 1-13, se ha visto un caso bidimensional en el que los límites contenían variables de integración.) Por lo tanto, la única dependencia de la integral con respecto a **r** puede ocurrir en el integrando y, dado que la integral definida puede ser interpretada como el límite de una suma, se puede utilizar (1-116) generalizada al caso de la suma de más de dos términos e intercambiar el orden de diferenciación e integración. Si entonces se utiliza (1-117) observando que $\rho(\mathbf{r}')$ y $d\tau'$ son constantes en lo que concierne a ∇, ya que sólo involucran coordenadas primas del punto fuente, se encuentra que (4-22) queda como sigue:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d\tau' \tag{4-23}$$

Pero de acuerdo con (1-147) se puede observar que el integrando es igual a cero siempre que $R \neq 0$, de manera que cualquier contribución a (4-23) debe provenir de la región que corresponde a $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$, es decir, de la vecindad inmediata al punto de campo. Así, para poder evaluar (4-23) que tiene la complicación de un integrando infinito en un punto, se utiliza un proceso de límite: se integra sobre un volumen pequeño pero finito, $\Delta\tau$, alrededor del punto de campo, P, y después se pasa al límite $\Delta\tau' \to 0$. Es más fácil, pero no necesario, elegir $\Delta\tau'$ como una esfera de radio R con centro en P, como se ilustra en la figura 4-6; se puede entonces hacer que $R \to 0$. Nótese que, como siempre, $\hat{\mathbf{R}}$ se dibuja hacia el punto de campo, es decir, hacia el centro de la esfera. Dado que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq 0$ dentro de esta esfera, $\rho(\mathbf{r}')$ es casi constante e igual a $\rho(\mathbf{r})$, de manera que se puede sacar de la integral; este procedimiento se vuelve más exacto a medida que $R \to 0$. Al hacer esto se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Delta\tau'} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d\tau' \tag{4-24}$$

Se puede ahora hacer uso de (1-135) para expresar las derivadas del integrando en función de las coordenadas primas; una vez hecho esto (incluyendo el cambio de signo), se puede aplicar el teorema de la divergencia (1-59) para convertir (4-24) en una integral de superficie sobre la superficie $\Delta S'$ que encierra a $\Delta \tau'$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\Delta S'} \frac{(-\hat{\mathbf{R}})\cdot d\mathbf{a}'}{R^2} \tag{4-25}$$

Si ahora se recuerda (4-3), se puede observar que el integrando no es sino $d\Omega$, tomando en cuenta el hecho de que el ángulo entre $\hat{\mathbf{R}}$ y $d\mathbf{a}'$ es de 180°, como se puede apreciar en la

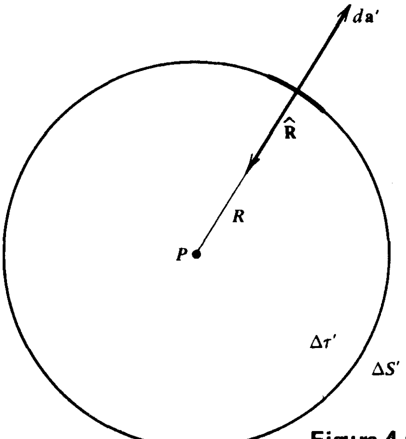


Figura 4-6 Esfera pequeña que rodea al punto de campo.

figura 4-6; por lo tanto, dado que P se encuentra dentro de $\Delta S'$, el integrando de (4-25) es exactamente igual a 4π, de acuerdo con (4-5), y (4-25) queda

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \tag{4-26}$$

que es justamente lo que se había obtenido antes. Nótese que esta derivación viene a reforzar el hecho de que ρ debe ser evaluada en el punto en el que se conoce $E(r)$ y que el valor de $\nabla \cdot E$ se desea obtener para ese mismo punto.

Ejercicios

4-1 El paralelepípedo rectangular de la figura 1-41 con $a > b > c$ se rellena con carga de densidad constante, ρ. Se construye una esfera de radio igual a $2a$ con centro en el origen. Encontrar el flujo $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ a través de la superficie de esta esfera. ¿Cuál será el flujo si el centro de la esfera se coloca en el vértice (a,b,c)?

4-2 Una esfera de radio a con centro en el origen posee una densidad de carga dada por $\rho = Ar^2$, donde A = const. Otra esfera de radio $2a$ es concéntrica con la primera. Encontrar el flujo $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ a través de la superficie de la esfera mayor.

4-3 La línea infinita de carga de la figura 4-3 se rodea con un cilindro infinitamente largo de radio ρ_0 cuyo eje coincide con ella. La superficie del cilindro posee una densidad superficial de carga constante, σ. Encontrar $\mathbf{E}$ para cualquier punto. ¿Qué valor en parti-

cular de σ hará que $\mathbf{E} = 0$ para todos los puntos fuera del cilindro cargado? ¿Es razonable su respuesta?

4-4 Una carga de densidad volumétrica constante tiene la forma de una plancha de grueso a. Las caras de la plancha son planos infinitos paralelos al plano xy. Tómese como origen el punto medio entre las caras y encuéntrese $\mathbf{E}$ para todos los puntos.

4-5 Una esfera de radio a posee una densidad de carga que varía con la distancia, r, al centro de acuerdo con $\rho = Ar^{1/2}$, donde A = const. Encontrar $\mathbf{E}$ para todos los puntos.

4-6 Dos esferas concéntricas tienen radios a y b tales que $b > a$. La región entre ellas, es decir, $a \leqslant r \leqslant b$, se rellena con carga de densidad constante. La densidad de carga es igual a cero en cualquier otro punto. Encontrar $\mathbf{E}$ para todos los puntos y expresarlo en función de la carga total Q. ¿Se reducen sus resultados a los valores correctos cuando $a \to 0$?

4-7 Un cilindro infinitamente largo tiene una sección circular de radio a. Se rellena con carga de densidad volumétrica constante, ρ_{ch}. Encontrar $\mathbf{E}$ para todos los puntos dentro y fuera del cilindro. ¿Son sus resultados consistentes con (4-11)?

4-8 Dos cilindros coaxiales infinitamente largos tienen radios a y b tales que $b > a$, como se muestra en la figura 4-7. La región entre ellos se rellena con carga de densidad volumétrica dada por $\rho_{ch} = A\rho^n$, en coordenadas cilíndricas, siendo A y n constantes. La densidad de carga es igual a cero en cualquier otra parte. Encontrar $\mathbf{E}$ para todos los puntos. ¿Para

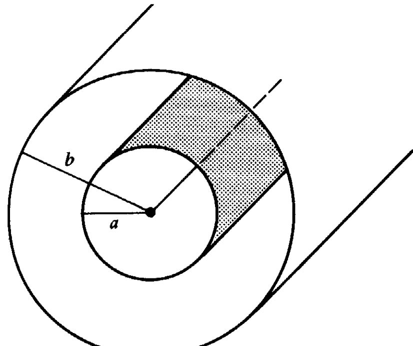


Figura 4-7 Los cilindros coaxiales del ejercicio 4-8.

qué valores de n y a se deberían reducir sus resultados a los obtenidos en el ejercicio 4-7? ¿Lo hacen?

4-9 La región entre los cilindros coaxiales infinitamente largos de la figura 4-7 se rellenan con carga cuya densidad volumétrica es, en coordenadas cilíndricas, $\rho_{ch} = Ae^{-\alpha\rho}$. Encontrar $\mathbf{E}$ para todos los puntos. ¿Bajo qué circunstancias simples se deberían reducir sus resultados de éste y del ejercicio 4-8 a los mismos valores de $\mathbf{E}$? ¿Lo hacen?

4-10 El campo electrostático promedio en la atmósfera terrestre en clima agradable se ha logrado evaluar experimentalmente y es aproximadamente igual a $\mathbf{E} = -E_0(Ae^{-\alpha\rho} + Be^{-\beta\rho})\hat{\mathbf{z}}$. Todas las constantes empíricas son positivas y z es la altura sobre la superficie (localmente plana). Encontrar la densidad de carga promedio en la atmósfera, en función de la altura. ¿Cuál es su signo?

4-11 Cierto campo eléctrico está dado por $\mathbf{E} = E_0(\rho/a)^3\rho$ para $0 < \rho < a$, y $\mathbf{E} = 0$ en cualquier otro caso. Encontrar la densidad volumétrica de carga.

4-12 Un campo eléctrico en la región $r > a$ está dado por $E_r = 2A \cos\theta/r^3$, $E_\theta = A$ sen θ/r^3, $E_\varphi = 0$, donde A = const. Encontrar la densidad volumétrica de carga en esta región.

Capítulo 5
El potencial escalar

Hasta ahora se han descrito los efectos electrostáticos completamente en función del campo vectorial **E**. Escribiendo en otra forma la expresión de **E**, se verá que es posible expresar sustancialmente la misma información en función de un campo escalar, lo cual es más conveniente para muchos propósitos.

5-1 Definición y propiedades del potencial escalar

La definición básica del campo eléctrico está dada por la ecuación 3-1. Si se hace uso de (1-143) para remplazar $\hat{\mathbf{R}}_i/\mathbf{R}_i^2$ por $-\Delta\,(1/\mathbf{R}_i)$, y se usa (1-113) para escribir la suma de las derivadas como la derivada de la suma, se encuentra que (3-1) queda

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \nabla\left(\frac{1}{R_i}\right) = -\nabla \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \tag{5-1}$$

donde, como siempre, $R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$. Por lo tanto, se puede ver que si se define

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \tag{5-2}$$

se puede escribir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \tag{5-3}$$

de manera que

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{5-4}$$

de acuerdo con (1-48). El campo escalar recibe el nombre de *potencial escalar o potencial electrostático*. La unidad de medición del potencial escalar recibe el nombre de volt; de (5-3) se observa que el campo eléctrico también se puede expresar en volts/metro, que

de hecho, es su unidad más usada. Al combinarla con la unidad previa de newton/coulomb para **E**, se encuentra que 1 volt = 1 joule/coulumb.

Dado que el rotacional del campo electrostático es igual a cero en todos los puntos, de acuerdo con (5-4), por medio del teorema de Stokes (1-67) se encuentra que

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{5-5}$$

donde C es una trayectoria cerrada arbitraria. Este resultado demuestra en forma explícita que el campo electrostático es un ejemplo de lo que se conoce como *campo conservativo*.

En resumen, se ha encontrado que el campo electrostático vectorial se puede escribir como el gradiente negativo del potencial escalar, y que (5-2) viene a ser un método para calcular ϕ en cualquier punto de campo que se desee una vez dados los valores y localizaciones de las distribuciones de cargas puntuales fuente. Por ejemplo, si todo está dado en coordenadas rectangulares, se puede usar (1-14) para escribir (5-2) como

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]^{1/2}} \tag{5-6}$$

Dado que ϕ es una cantidad escalar, resulta generalmente más fácil proceder indirectamente evaluando la suma (5-2) y después encontrando **E** por derivación de (5-3), en lugar del procedimiento directo de evaluar la suma vectorial (3-2); ésta es una de las razones por las que ϕ es de gran interés práctico.

Si las cargas fuente poseen una distribución continua, se puede proceder exactamente como se hizo con las sección 2-4 y 3-1, utilizando (2-14) y (2-16) para escribir (5-2) en forma de integral; los resultados son:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\,d\tau'}{R} \tag{5-7}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\,da'}{R} \tag{5-8}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')\,ds'}{R} \tag{5-9}$$

donde las integrales se toman sobre todos los volúmenes, superficies o líneas que contienen las cargas fuente o, de hecho, sobre todo el espacio, ya que las densidades de carga respectivas desaparecen en las regiones donde no hay carga. Por último, si todas las posibilidades se encuentran simultáneamente presentes, se ve por (5-1) que el ϕ todal en un punto dado será la suma escalar de todas las contribuciones de (5-2) y (5-7) a (5-9), y que el **E** total en un punto dado puede encontrarse como el gradiente negativo de este potencial escalar total.

Queda cierta ambigüedad en los resultados, la cual surge al pasar de (5-1) a (5-2). Supóngase que, en lugar de (5-2), se hubiera elegido como definición de Φ a

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} + C \tag{5-10}$$

donde **C** es una constante arbitraria. Cuando se sustituye esta ecuación en (5-3) se obtiene exactamente el mismo campo **E** dado por (5-1), ya que $C = 0$. En otras palabras, en principio el potencial escalar incluye una constante aditiva arbitraria y puede asignársele a ésta cualquier valor conveniente sin modificar ninguna característica esencial de un problema dado. No es conveniente estar acarreando esta constante en todos los cálculos, por lo que la *práctica general* es simplemente escoger $C = 0$, para quedar otra vez con (5-2) y las ecuaciones que de ésa se derivan. Para entender el significado de esta convención, supóngase que todas las cargas en (5-2) ocupan una región finita del espacio; así, se puede elegir el punto de campo, **r**, tan alejado de todas las cargas que todas las $R_i \to\infty$ y $\phi(\mathbf{r})\to 0$. En otras palabras, con la elección de (5-2) el potencial escalar se anula "en el infinito". Mientras que esta convención estándar será la que normalmente se use en este libro, hay algunas situaciones en que resulta más conveniente elegir otros puntos, como la superficie de la tierra, para que tengan un potencial igual a cero; cuando esto ocurra, se mencionará explícitamente;

Existe otra manera muy útil de expresar la relación entre **E** y ϕ. Considérese la integral de línea de **E** entre un punto inicial, P_i, en $\mathbf{r}^1$ y un punto final, P_f, en $\mathbf{r}_2$, como se ilustra

$$\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 -\nabla\phi\cdot d\mathbf{s} = -\int_1^2 d\phi = -(\phi_2-\phi_1) = -\left[\phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1)\right]$$

en la figura 1-22 donde se han utilizado (5-3) y (1-38). Utilizando (5-5) se puede escribir esto mismo como

$$\Delta\phi = \phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1) = -\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_2^1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{5-11}$$

lo que viene a ser una relación entre el cambio del potencial escalar, $\Delta\phi$, y la integral de línea del campo eléctrico. Dado que el resultado depende únicamente de los valores de ϕ en los puntos extremos, el valor de la integral es *independiente de la trayectoria*, lo que, como se recordará, es otra forma de decir que el campo **E** es un campo conservativo. [Si la trayectoria es cerrada, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$ y (5-11) da (5-5) de nuevo.] Nótese que $\Delta\phi$ dada por (5-11) para encontrar la diferencia de potencial entre dos puntos si se conoce el campo **E** por otros medios, tales como los que se vieron en los dos últimos capítulos, ya que se puede usar el valor conocido de **E** y evaluar la integral sobre *cualquier* trayectoria conveniente, considerando que dicha integral es independiente de la trayectoria que se siga. Como se verá más adelante, este procedimiento resulta de gran utilidad cuando se supone que las cargas se extienden hasta el infinito, de tal manera que ϕ pudiera no ser igual a cero en el infinito o incluso tener un valor infinito allí, en otros puntos inconvenientes, o en otras situaciones en las que es difícil utilizar (5-7) a (5-9).

Una superficie donde ϕ es constante recibe el nombre de *superficie equipotencial*. Ya se vio en la sección 1-9 que el gradiente de un escalar es normal a la superficie de valor constante del escalar y tiene la dirección de la máxima razón de cambio del escalar. Como resultado de esto, y de acuerdo con (5-3), se puede observar que la dirección de **E** es perpendicular a la superficie equipotencial y en el sentido en que ϕ disminuye. Esto se ilustra en la figura 5-1, en la que las superficies equipotenciales se indican como curvas sólidas y las líneas punteadas indican la dirección de **E** en cada uno de los casos, para $\phi_3 > \phi_2 > \phi_1$. (La curva que se define como tangente a la dirección de **E** en cada punto recibe el nombre de "línea de fuerza" o "línea de **E**". Es convencional dibujarlas de tal manera que la densidad de las líneas sea proporcional a la magnitud de **E**, es decir, que el valor numérico de **E** es mayor en las regiones donde las líneas de campo se encuentran más juntas unas de otras

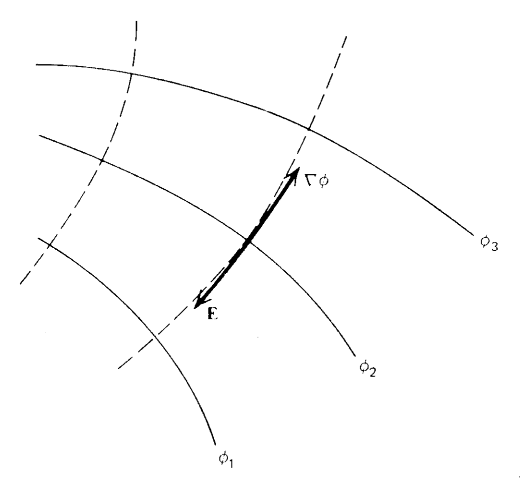


Figura 5-1. Superficies equipotenciales (sólidas) y líneas del campo eléctrico (punteadas).

que en las regiones donde están más separadas.) Esta relación de ortogonalidad mutua, que ilustra en la figura, permite lograr una visualización de la situación al dibujar las líneas de campo una vez que se ha despejado ϕ para encontrar las superficies equipotenciales; también resulta útil a la inversa, es decir, dibujar las equipotenciales a partir de las líneas de campo conocidas.

Ejemplo

Carga puntual sola. Se tratarán de ilustrar algunas de estas ideas con el ejemplo más simple posible, es decir, el de una carga puntual, Q, situada en $\mathbf{r}'$ en este caso, (5-2) se reduce a un solo término:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{5-12}$$

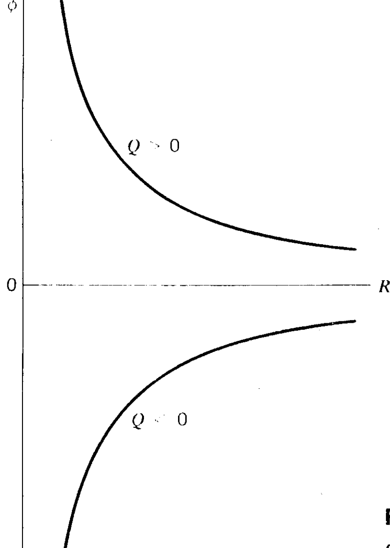


Figura 5-2. El potencial en función de la distancia, R, desde una carga puntual, Q.

donde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Cuando esto se combina con (5-3) y (1-143), el resultado es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q\hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \tag{5-13}$$

que, desde luego, va de acuerdo con (3-2) aplicada a una sola carga. El valor de ϕ dado por (5-12) como función de la distancia, R, medida desde Q se muestra en la figura 5-2 para los dos signos posibles de Q. Las superficies equipotenciales se encuentran al depejar R de (5-12) y dejar que ϕ tenga un valor definido; la ecuación resultante es

$$R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\phi} \tag{5-14}$$

de manera que estas superficies corresponden a $R =$ conts., es decir, son esferas con centro en la carga Q. La figura 5-3 muestra esta situación en la que se ha supuesto que Q es positiva, de modo que $\phi_3 > \phi_2 > \phi_1$. De acuerdo con la figura 5-1, $\mathbf{E}$ debe ser perpendicular a estas esferas y, por lo tanto, debe estar dirigido radialmente hacia afuera, de acuerdo con (5-13).

En principio, una ecuación como (5-7) representa una solución completa a un problema de electrostática. Sin embargo, como ya se verá, algunos problemas no se enuncian de manera que permita usar (5-7) directamente, o resulta muy difícil hacerlo. Por ejemplo, podría darse la distribución de carga únicamente dentro de una región finita del espacio, siendo desconocida fuera de esta región, y los valores de ϕ en las superficies limitantes de la región. Generalmente no puede usarse (5-7) en un caso así; sin embargo, se puede encontrar otra manera de encarar el asunto. Si se combinan (5-3) y (4-10), se pueden eliminar $\mathbf{E}$ para encontrar, con el uso de (1-45), que

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5-15}$$

En otras palabras, el potencial escalar satisface esta ecuación diferencial que se conoce como la *ecuación de Poisson*. En las regiones donde $\rho = 0$, (5-15) se reduce a la *ecuación de Laplace*:

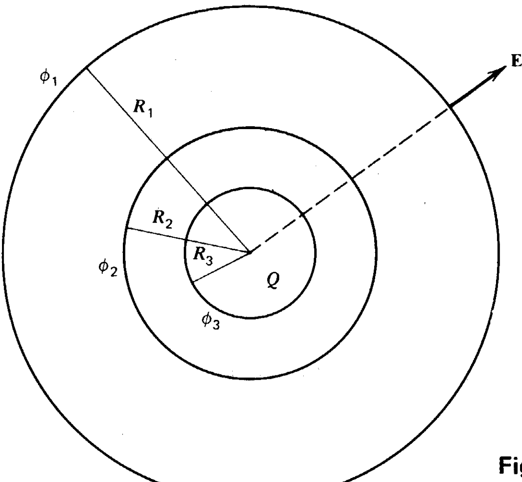


Figura 5-3. Esferas equipotenciales debidas a una carga puntual.

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{5-16}$$

Se dejará hasta el capítulo 11 el estudio detallado del uso de estas ecuaciones y la justificación de tales procedimientos.

Por último, se puede decir aquí, que las ecuaciones fuente de **E**, (4-10) y (5-4), junto con los resultados (5-3) y (5-4), están en completo acuerdo con el teorema de Helmholtz enunciado en (1-106) a (1-108).

A continuación se consideran algunos ejemplos más elaborados sobre el cálculo del potencial escalar para distribuciones de carga continuas.

5-2 Distribución esférica y uniforme de carga

Esta es exactamente la misma distribución de carga que se vio en la sección 2-5, es decir, una carga total, Q, contenida en una esfera de radio a con densidad constante de carga $\rho = 3Q/4\pi a^3$. Se vuelve a utilizar el sistema coordenado que se muestra en las figuras 2-6 y 2-7; el punto que en esas figuras se utilizó para denotar la posición de q, debe interpretarse ahora como el punto de campo, para el que se desea obtener ϕ. Como antes, $R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'$, de tal manera que (5-7) queda

$$\phi = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{r'^2 \operatorname{sen}\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\varphi'}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\cos\theta')^{1/2}} \tag{5-17}$$

donde se ha usado (1-99) y se ha sacado el valor constante de ρ de la integral. La integración sobre $d\varphi'$ puede realizarse de una vez y da 2π. Si se hace otra vez $\mu = \cos\theta'$, y se utiliza (2-22), se encuentra que (5-17) queda como

$$\phi = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_0^{a} r'^2 dr' \int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{(z^2 + r'^2 - 2zr'\mu)^{1/2}} \tag{5-18}$$

La integral sobre μ puede encontrarse con la ayuda de tablas y es

$$-\left.\frac{(z^2 + r'^2 - 2zr'\mu)^{1/2}}{zr'}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{zr'}(|z + r'| - |z - r'|) \tag{5-19}$$

Existen dos casos que deben ser considerados.

1. Fuera de la esfera. Aquí, $z > a$; dado que debe suponerse que z es positiva, por simplicidad, y ya que $r' < a$, se tiene que $z > r'$, de modo que el paréntesis de (5-19) se vuelve $(z + r') - (z - r') = 2r'$ y la integral sobre μ es igual a $2/z$. Al sustituir esto en (5-18) e integrar sobre r', se encuentra el potencial en un punto fuera de la esfera, ϕ_0, como

$$\phi_o = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z} \tag{5-20}$$

2. Dentro de la esfera. Aquí $z < a$, de tal manera que r$'$ puede ser mayor o menor que z. Cuando $z < r' < a$, (5-19) se ve así:

$$\frac{1}{zr'}[(r' + z) - (r' - z)] = \frac{2}{r'}$$

mientras que cuando $r' < z < z$, (5-19) es igual a $2/z$, como antes. Dado que la integral sobre μ adquiere estos diferentes valores para los diferentes rangos de r', se debe evaluar la integral sobre r' como la suma de dos integrales con integrandos adecuados al rango de que se trata; así, la expresión para el potencial dentro de la esfera ϕ_i, de acuerdo con (5-18), es

$$\phi_i = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(\int_0^z r'^2 dr' \cdot \frac{2}{z} + \int_z^a r'^2 dr' \cdot \frac{2}{r'}\right)$$

$$= \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3a^2 - z^2) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(3 - \frac{z^2}{a^2}\right) \tag{5-21}$$

Nótese que (5-20) y (5-21) dan el mismo valor de potencial, $Q/4\pi\epsilon_0 a$, para la superficie de la esfera, donde $z = a$.

Se pueden generalizar fácilmente estos resultados a una posición arbitraria. El punto de campo se tomó sobre el eje z por simple conveniencia en la evaluación de la integral. El vector de posición del punto de campo resulta así $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$, de modo que $|\mathbf{r}| = r = z$ y $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$; esto hace posible expresar los resultados para cualquier punto de campo en función de la coordenada esférica r, es decir, su distancia al origen, o sea, al centro de la esfera. Por lo tanto, (5-20) y (5-21) dan las siguientes expresiones generales del potencial en cualquier punto dentro o fuera de la esfera:

$$\phi_o(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{5-22}$$

$$\phi_i(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3a^2 - r^2) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) \tag{5-23}$$

Como comprobación del cálculo de ϕ, se puede ver si da los campos eléctricos conocidos. Si se sustituyen (5-22) y (5-23) en (5-3), y se usa (1-101), se encuentra que los campos eléctricos fuera

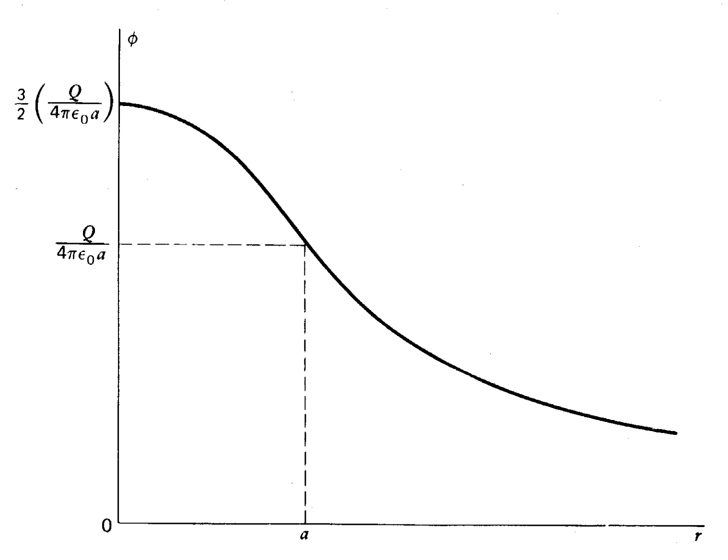


Figura 5-4 El potencial en función de la distancia r desde el centro de una distribución esférica y uniforme de carga, de radio a.

y dentro de la esfera son, respectivamente,

$$\mathbf{E}_o = \frac{\rho a^3\hat{\mathbf{r}}}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{5-24}$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{\rho r\hat{\mathbf{r}}}{3\epsilon_0} = \frac{Qr\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 a^3} \tag{5-25}$$

los cuales concuerdan con los resultados (4-17), (4-20) y (4-21) que se obtuvieron por medio de la ley de Gauss.

De acuerdo con (5-22) y (5-23), los valores constantes de ϕ corresponden a valores constantes de r; en otras palabras, las superficies equipotenciales son esferas concéntricas con centro en el origen (es decir, en el centro de la distribución de carga). La figura 5-4 muestra la gráfica del potencial en función de r; la pendiente negativa de esta curva da un campo eléctrico E_r que ya se había mostrado antes en la figura 4-5, resultando de gran interés comparar las dos figuras con esto en mente.

5-3 Distribución lineal y uniforme de carga

Como un ejemplo de la aplicación de (5-11) para encontrar el potencial, considérese la carga lineal uniforme e infinita para la que ya se ha encontrado antes el campo eléctrico y que fue dado por (3-9) como $\mathbf{E} = (\lambda/2\pi\epsilon_o\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Dado que $\mathbf{E}$ sólo tiene componente $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, a partir de (5-3) y (1-85) se puede observar que ϕ es independiente de φ y z, es decir, que es función exclusiva de ρ. Esto ya demuestra que las superficies equipotenciales serán cilindros coaxiales cuyo eje coincidirá con la línea de carga, ya que ϕ=const. implica que ρ =const. Ya que se puede utilizar la trayectoria más conveniente, tómese la que se ilustra en la figura 5-5; la trayectoria está sobre un plano perpendicular a la distribución de carga, la cual lo intersecta en el origen. Se integrará a lo largo de la recta en la dirección constante de $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ a partir del punto inicial 1 hasta el punto final 2, cuyas distancias a la carga son ρ_1 y ρ_2 respectivamente. De la figura puede observarse que $d\mathbf{s} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\, d\rho$ para este caso, por lo que el integrando de (5-11) es $\mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}\, d\rho = E_\rho d\rho$ de acuerdo con (1-21), de tal forma que (5-11) se convierte en:

$$\phi(\rho_2) - \phi(\rho_1) = -\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\lambda d\rho}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \tag{5-26}$$

Este método proporciona la diferencia de potencial entre los dos puntos, pero se desea saber el valor absoluto de ϕ en cada uno de ellos. El término logarítmico en (5-26) puede escribirse como $[(-\ln\rho_2) - (-\ln\rho_1)]$

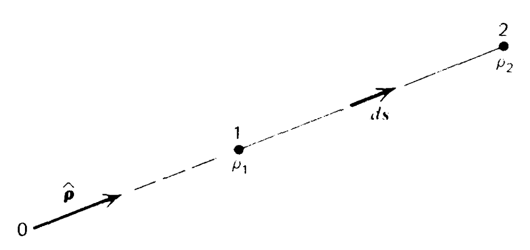


Figura 5-5. Trayectoria de integración utilizada para encontrar la diferencia de potencial debida a una línea de carga uniforme.

y, dado que la constante aditiva se cancelará en el miembro izquierdo, por comparación de ambos miembros de (5-26) se puede llegar a la conclusión de que ϕ tiene la forma

$$\phi(\rho) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\rho + C \tag{5-27}$$

donde C es alguna constante. Ahora, a medida que $p \to \infty$, el $\ln p \to \infty$ de tal manera que si se trata de mantener la convención de que ϕ se anula en el infinito, se debe concluir que C es también igual a infinito. La razón de la presente dificultad consiste en que en este caso la carga no es finita, sino que se extiende hasta el infinito, mientras que la convención de que ϕ se anula en el infinito partió de (5-2) y de la suposición de que toda la carga quedaba confinada a un volumen finito, como fue el caso en el ejemplo anterior de la esfera. Aunque en esta etapa todavía resulte incómodo este hecho, lo cierto es que el ϕ de (5-27) da el campo **E** correcto por medio de (5-3). A veces resulta más conveniente expresar (5-27) de otra manera; si se introduce una nueva constante ρ_o, haciendo que $C = \lambda \ln\rho_o / 2\pi\epsilon_o$, entonces (5-27) luce de esta forma:

$$\phi(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \tag{5-28}$$

Cuando $\rho = \rho_o$, $\phi(\rho_o) = 0$, de tal manera que el significado físico de ρ_0 resulta ser la distancia escogida para que ϕ sea igual a cero, ya que esto no puede ocurrir en el infinito. La derivada de ϕ, tal como se obtiene de (5-28) y que da **E**, no se afecta por la elección de ρ_o, como tampoco se afecta la diferencia de potencial, la cual todavía es igual a (5-26).

Dado que estos resultados se originaron de la suposición de que la carga lineal ya era infinitamente larga, resulta de gran utilidad volver a enfocar el problema desde un nuevo punto de vista, comenzando con una carga lineal uniforme de longitud finita para la cual se obtendrá un resultado finito, y después observando que ocurre a medida que la longitud de la línea crece hasta el infinito. Así se podrá obtener también una manera lógica para elegir ρ_0. Considérese la distribución de carga que se muestra en la figura 3-8 para $\lambda = \text{const.}$, y calcúlese ϕ para el punto general $P(\rho, \varphi, z)$. Dado que la distribución de carga coincide con el eje z, $\mathbf{r}' = z'\mathbf{z}$, mientras que $\mathbf{r} \mp_0 \Sigma z\hat{\mathbf{z}}$, de acuerdo con (1-81). Por lo tanto, $\mathbf{R} = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$, de manera que $\mathbf{R} = [\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ y, dado que $ds' = dz'$ para este caso, (5-90) se convierte en:

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{\left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}} \tag{5-29}$$

La integral es fácil de evaluar por medio de tablas, resultando

$$\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left\{\frac{z + L_1 + \left[\rho^2 + (z + L_1)^2\right]^{1/2}}{z - L_2 + \left[\rho^2 + (z - L_2)^2\right]^{1/2}}\right\} \tag{5-30}$$

[Se deja como ejercicio verificar que cuando (5-30) se usa en (5-3), se obtiene la misma **E** que se encontró por evaluación directa en el ejercicio 3-11.] Supóngase ahora que la línea de carga es muy larga, pero todavía no infinita, es decir, que $L_2 \gg p$, $L_2 \gg |z|$, $L_1 \gg p$ y $L_1 \gg |z|$, de modo que se pueda obtener una buena aproximación de ϕ en situaciones en las que el punto de campo no está muy cerca de los extremos de la distribución de carga ni muy lejos de ella en relación a su longitud. El numerador del argumento del logaritmo en

(5-30) no presenta ningún problema y es aproximadamente igual a $2L_1$, dado que se puede eccribir $z + L_1 \cong L_1$, por lo que se puede despreciar a ρ en comparación con L_1. Se debe tener mucho cuidado con el denominador, ya que el omitir z y ρ se anularía; por esta razón se le desarrolla en una serie de potencias en términos de una cantidad pequeña apropiada, y se toma el término no nulo de menor orden. Se utiliza la expresión

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 \pm \ldots \tag{5-31}$$

aunque solamente se requiera de los primeros dos términos y el signo superior. Si ahora se factoriza $L_2 - z$, el denominador queda como

$$(L_2 - z)\left\{-1 + \left[1 + \frac{\rho^2}{(L_2 - z)^2}\right]^{1/2}\right\} \simeq L_2\left[-1 + \left(1 + \frac{\rho^2}{L_2^2}\right)^{1/2}\right]$$

$$\simeq L_2\left(-1 + 1 + \frac{\rho^2}{2L_2^2}\right) = \frac{\rho^2}{2L_2}$$

Al sustituirlo en (5-30) junto con $2L_1$ en el numerador, se obtiene

$$\phi \simeq \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{4L_2L_1}{\rho^2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{(4L_2L_1)^{1/2}}{\rho}\right] \tag{5-32}$$

que es exactamente de la *forma* (5-27) ó (5-28). Se llega así a la misma expresión general de ϕ a medida que se tiende al límite de una recta infinita. Nótese que (5-32) es independiente de z, lo cual es razonable ya que si uno no se acerca demasiado a los extremos de esta recta muy larga, un desplazamiento paralelo a la recta lleva a un punto desde donde la distribución de carga parece ser esencialmente la misma.

Si ahora se deja que L_2 y L_1 tiendan a infinito en (5-32), se vuelve a obtener un valor para ϕ. Esta manera de resolver el problema no ha hecho desaparecer los valores infinitos, pero permite tener una idea más clara de cómo se producen.

Existe un caso muy interesante en el que esta ambigüedad en ϕ desaparecen por la naturaleza misma del sistema.

Ejemplo

Dos cargas lineales paralelas y de signo opuesto. Considérese el sistema formado por una carga lineal uniforme muy larga de densidad λ y otra de densidad $-\lambda$. Se consideran valores de L_2 y L_1 que se muestran en la figura 5-6. La distancia ρ en (5-32) para la variable en coordenadas cilíndricas, pero resulta claro que es la distancia perpendicular de la línea de carga al punto de campo P; en este caso, las distancias se indican como ρ_+ y ρ_- en la figura. Si se supone que L_2 y L_1 son ya suficientemente grandes, se puede utilizar (5-32). De esta manera, los potenciales individuales debidos a estas dos cargas lineales son

$$\phi_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{(4L_2L_1)^{1/2}}{\rho_+}\right]$$

$$\phi_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{(4L_2L_1)^{1/2}}{\rho_-}\right]$$

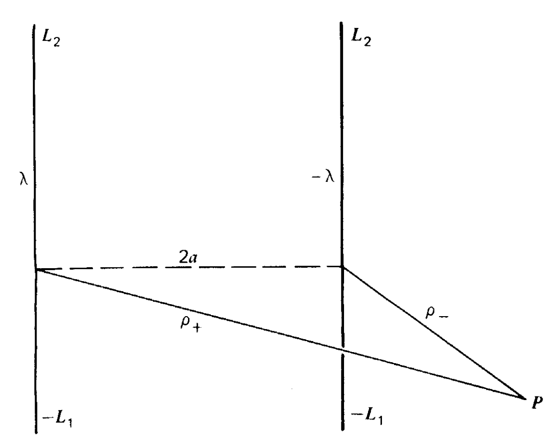


Figura 5-6. Dos cargas lineales paralelas de signo opuesto.

de manera que el potencial total en P es

$$\phi=\phi_+ + \phi_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_-}{\rho_+}\right) \tag{5-33}$$

y la dependencia en L_2 y L_1 ha desaparecido. *Ahora* se puede considerar que L_2 y L_1 tienden a infinito, y el resultado sigue siendo sin ambigüedades el mismo de (5-33). En un caso, específico, ρ_+ y ρ_- deben ser evaluadas en función del sistema de coordenadas particular que se esté utilizando. Como ilustración de este punto, considérese el caso en que las cargas lineales son paralelas al eje z y que la recta de longitud $2a$ entre ellas descansa sobre el eje x, estando el origen a la mitad de la distancia entre ellas y P sobre el plano xy, como se indica en la figura 5-7. Se utilizan las coordenadas polares ρ y φ para especificar la posición de P. Al aplicar la ley de los cosenos, se encuentra que $\rho^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos\varphi$ y $\rho^2 -= a^2 + \rho^2 + 2a\rho \cos\varphi$, de modo que (5-33) puede escribirse

$$\phi(\rho,\varphi)=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_-{}^2}{\rho_+{}^2}\right)=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a^2+\rho^2+2a\rho\cos\varphi}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\varphi}\right) \tag{5-34}$$

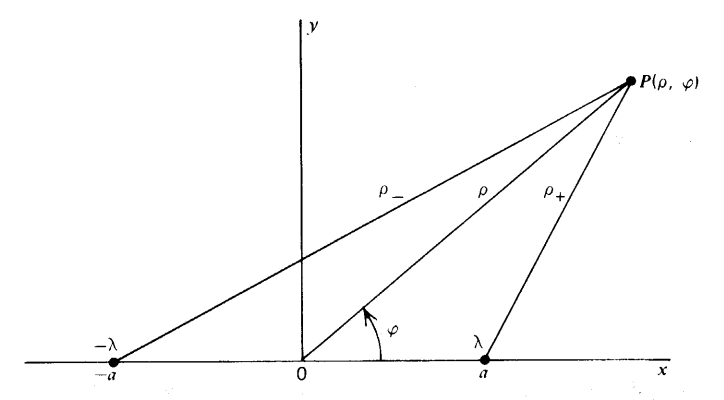


Figura 5-7. Geometría para el potencial de dos cargas lineales paralelas al eje z.

y de acuerdo con (5-3) y (1-85), las componentes de **E** son

$$E_\rho = -\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{(\rho - a\cos\varphi)}{\rho_+^{\,2}} - \frac{(\rho + a\cos\varphi)}{\rho_-^{\,2}}\right] = \frac{\lambda a(\rho^2 - a^2)\cos\varphi}{\pi\epsilon_0\rho_+^{\,2}\rho_-^{\,2}} \tag{5-35}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \frac{\lambda a(\rho^2 + a^2)\operatorname{sen}\varphi}{\pi\epsilon_0\rho_+^{\,2}\rho_-^{\,2}} \tag{5-36}$$

mientras que $E_z = -\partial\phi/\partial_z = 0$.

Las superficies equipotenciales ϕ = const. están dadas por (5-34) como

$$\frac{\rho_-^{\,2}}{\rho_+^{\,2}} = e^{4\pi\epsilon_0\phi/\lambda} = \text{const.} \tag{5-37}$$

Esta ecuación es más fácil de interpretar en coordenadas rectangulares; por inspección de la figura 5-7 se ve que resulta

$$\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = e^{4\pi\epsilon_0\phi/\lambda}$$

lo que, con un poco de álgebra se puede expresar como

$$(x - a\coth\eta)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{senh}\eta}\right)^2 \tag{5-38}$$

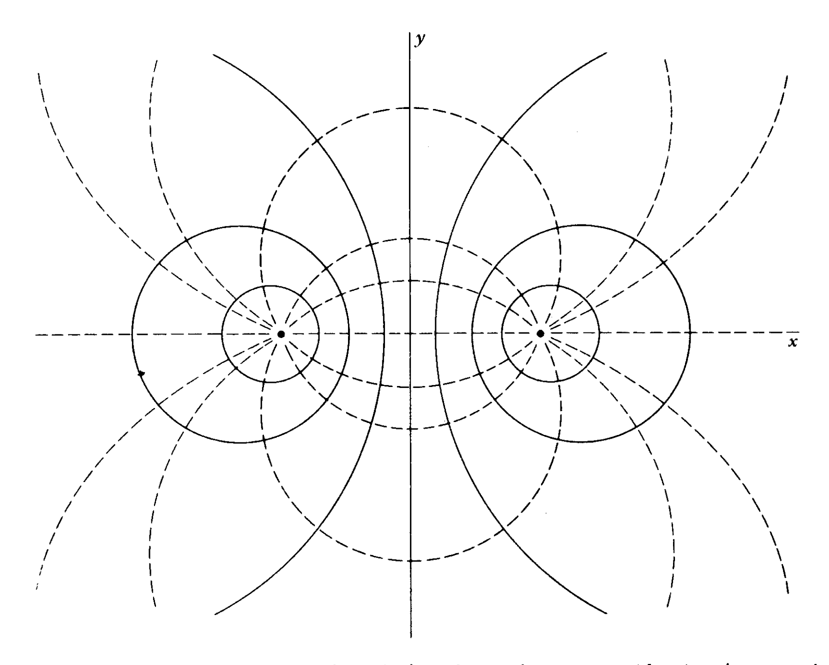
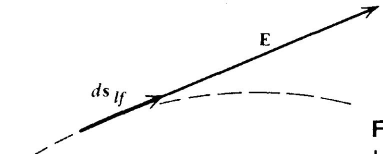


Figura 5-8. Equipotenciales (sólidas) y líneas de campo eléctrico (punteadas) para dos cargas lineales de signo opuesto paralelas al eje *z*.



Figuras 5-9. Relación entre E y un desplazamiento a lo largo de una línea de E.

donde $\eta = 2\pi\epsilon_0\phi/\lambda$. Esto no es sino la ecuación de una circunferencia de radio $a/\text{senh}\eta$ cuyo centro está desplazado una distancia $a\ \coth\eta$ sobre el eje x. En otras palabras, las superficies equipotenciales son cilindros cuyos ejes son paralelos al eje z cuyas intersecciones con el plano xy son las circunferencias dadas por (5-38). Estas circunferencias se indican como curvas sólidas en la figura 5-8. Nótese que aquéllas cuyo centro queda sobre el eje x positivo corresponden a $\phi > 0$, mientras que las que quedan sobre el eje x negativo corresponden a $\phi < 0$. Nótese también que el plano ys $(x = 0)$, es la superficie equipotencial para $\phi = 0$; es fácil ver que esto es correcto a partir de la figura 5-7 en la que cada punto sobre el eje y tiene $\rho_+ = \rho_-$, haciendo que $\phi = 0$, de acuerdo con 5-33).

Las líneas de **E** son perpendiculares a estas equipotenciales como ya se sabe, y se muestran en la figura 5-8 como líneas punteadas. Los resultados de este caso pueden ser usados para ilustrar cómo se puede encontrar una ecuación explícita para estas curvas. Como ya se ha mencionado, una línea de **E** se define tangente a la dirección de **E** en el punto correspondiente. Por lo tanto, si $d\mathbf{s}_{lf}$ representa un pequeño desplazamiento a lo largo de una línea de **E** (línea de fuerza), es necesariamente paralelo a **E** en ese punto; esto se muestra en la figura 5-9. Por lo tanto, se puede escribir

$$d\mathbf{s}_{lf} = k\mathbf{E} \tag{5-39}$$

dado que tienen la misma dirección, y donde k es una constante de proporcionalidad de dimensiones apropiadas. Se puede usar (5-39) para obtener una ecuación diferencial para la curva que describe la línea de **E**.

Para poder aplicar (5-39) en el caso particular anterior, nótese que $d\mathbf{s}_{lf}$ es igual a $d\mathbf{r}$ según se expresa en (1-82), donde **r** es el vector de posición de cada uno de los puntos de la curva. Dado que la línea de **E** descansa sobre el plano $\rho\varphi$, $dz = 0$ por lo que (5-39) queda

$$d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\, d\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} = k(E_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + E_\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \tag{5-40}$$

Al igualar componentes se obtiene

$$d\rho = kE_\rho \qquad \text{y} \qquad \rho\, d\varphi = kE_\varphi$$

y se puede ahora eliminar k dividiendo la primera ecuación por la segunda. El resultado es

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{E_\rho}{E_\varphi} \tag{5-41}$$

El miembro derecho de (5-41) es una función conocida de ρ y φ, que, en principio, hace posible integrar esta ecuación para encontrar ρ en función de φ, es decir, la ecuación de la línea de fuerza.

En este caso, si se sustituye (5-35) y (5-36) en (5-41), se encuentra que

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{(\rho^2-a^2)\cos\varphi}{(\rho^2+a^2)\sin\varphi}$$

o sea,

$$\frac{(\rho^2+a^2)\,d\rho}{\rho(\rho^2-a^2)}=\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin\varphi} \tag{5-42}$$

Esta ecuación puede integrarse con ayuda de tablas para tener

$$\ln\left(\frac{\rho^2-a^2}{\rho}\right)=\ln \operatorname{sen}\varphi+\ln K$$

donde la constante de integración se escribe en función de la constante K. De este resultado se desprende que la ecuación deseada es

$$\rho^2-a^2=K\rho\operatorname{sen}\varphi \tag{5-43}$$

Para cada valor de K se obtiene una línea de fuerza correspondiente. Si se expresa (5-43) en coordenadas rectangulares con la ayuda de (1-74) y (1-75), se ve que puede escribirse como

$$x^2+\left(y-\tfrac{1}{2}K\right)^2=a^2+\left(\tfrac{1}{2}K\right)^2 \tag{5-44}$$

lo que demuestra que las líneas de **E** también son arcos de circunferencia; una circunferencia dada tiene un radio $(a^2+1/4K^2)^{1/2}$ y su centro se encuentra desplazado una distancia $1/2\ K$ sobre el eje y. Estas son precisamente las curvas graficadas con líneas punteadas en la figura 5-8 y se puede apreciar, como era de esperarse, que se originan en las cargas positivas y terminan en las negativas, ya que de (5-43) se desprende que cuando $\varphi=0$ ó π, $\rho=\pm a$ ó, de acuerdo con (5-4), que $x=\pm a$ cuando $y=0$.

5-4 El potencial escalar y la energía

En general, los cambios en potencial están relacionados con cambios en energía. Considérese una carga puntual, q, en equilibrio bajo la acción de una fuerza electrostática $\mathbf{F}_q$, y una fuerza mecánica $\mathbf{F}_{q,m}$. Esta condición se describió en (2-9) sólo para dos cargas, pero es claro que se puede extender al caso en que más de una carga esté actuando sobre q. En este caso, es apropiado usar (3-1), de manera que la condición de equilibrio es

$$\mathbf{F}_q+\mathbf{F}_{q,m}=q\mathbf{E}+\mathbf{F}_{q,m}=0$$

o sea,

$$\mathbf{F}_{q,m}=-q\mathbf{E} \tag{5-45}$$

Supóngase ahora que la carga se mueve infinitamente despacio desde un punto inicial, $\mathbf{r}_1$, a un punto final, $\mathbf{r}_2$, siguiendo una trayectoria dada. En estas circunstancias, la velocidad siempre será esencialmente cero y constante, de tal forma que la aceleración es igual a cero. Por lo tanto, la carga siempre estará en equilibrio, o casi en equilibrio, de modo que se puede aplicar (5-45). Se ha establecido este procedimiento para poder calcular la cantidad de tra-

bajo reversible en sentido termodinámico que realiza la fuerza mecánica externa y, al mantener la velocidad igual a cero, se puede asegurar que no existen efectos disipativos o de fricción. Si $W_{1\to 2}$ es el trabajo realizado por el agente externo que ejerce la fuerza mecánica, se obtiene

$$W_{1\to 2}=\int_1^2 \mathbf{F}_{q,m}\cdot d\mathbf{s}=-q\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=q[\phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1)] \tag{5-46}$$

al usar (5-11). En otras palabras, el trabajo realizado sobre la carga es igual a la carga multiplicada por la diferencia de potencial. Bajo tales circunstancias, el trabajo realizado puede ser igualado al *cambio* en energía potencia, ΔU_e, de la carga, de manera que (5-46) se vuelve

$$\Delta U_e=q[\phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1)]=q\Delta\phi \tag{5-47}$$

Nótese que este cambio ΔU_E es independiente de cualquier constante aditiva que pueda ser incluida en ϕ. Dado que el miembro derecho de (5-47) ya tiene la forma de una diferencia, es natural escribir el miembro izquierdo de la misma manera, es decir, $\Delta U_e = U_e = U_e(\mathbf{r}_2) - U_e(\mathbf{r}_1)$ y, por comparación, se puede definir la energía potencial de una carga q en $\mathbf{r}$, $U_e(\mathbf{r})$, como

$$U_e(\mathbf{r})=q\phi(\mathbf{r}) \tag{5-48}$$

Como es usual con la energía potencial, se puede sumar cualquier cantidad constante arbitraria al miembro derecho de (5-48) sin afectar la diferencia, de manera similar a como se haría con ϕ, es decir, como en (5-10). Generalmente se usará la forma (5-48) debido a que posee la conveniente propiedad de que cuando ϕ se anula en infinito, U_e también lo hace. Dado que la energía U_e se mide en joules, de (5-48) se deduce que la unidad de ϕ, el volt, es igual a 1 joule/coulomb.

Ejemplo

Dos cargas puntuales. Considérese un sistema de dos cargas, q y Q, separadas una distancia R según se muestra en la figura 5-10. El potencial en la posición de q está dado por (5-12) y cuando se le sustituye en (5-48) se encuentra que

$$U_e=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{5-49}$$

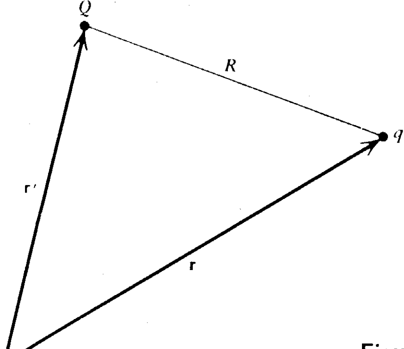


Figura 5.10 Posiciones relativas a dos cargas puntuales.

Esta energía puede interpretarse como el trabajo necesario para llevar a q desde el infinito a su posición r, mientras la carga Q permanece fija en $\mathbf{r}'$. Pero, debido a la simetría de la expansión, también se le puede interpretar como el trabajo requerido para llevar a Q desde el infinito hasta $\mathbf{r}'$ manteniendo a q fija en $\mathbf{r}$. En otras palabras, es más correcto considerar a U_e como la energía potencial *mutua* del *sistema* de dos cargas, en vez de asignarla a una de las cargas o a la otra. Se volverá a considerar este asunto de la energía potencial de un sistema de cargas con mayor detalle en el capítulo 7.

Ejercicios

5-1 ¿Puede el vector $\mathbf{E} = (yz - 2x)\hat{\mathbf{x}} + xz\hat{\mathbf{y}} + xy\hat{\mathbf{z}}$ ser un posible campo electrostático? Si la respuesta es afirmativa, encontrar el potencial ϕ a partir del cual se puede obtener $\mathbf{E}$.

5-2 ¿Podría interpretarse al vector $\mathbf{A}$ del ejercicio 1-15 como un campo eléctrico conservativo? Si la respuesta es afirmativa, encontrar el potencial ϕ a partir del cual se podría obtener por medio de (5-3).

5-3 Dos cargas puntuales q y $-q$ se encuentran sobre el eje z en $z = a$ y $-a$ respectivamente. Encontrar ϕ en cualquier punto (x, y, z). Demostrar que el plano xy es una superficie equipotencial y encontrar su potencial. Explicar el resultado.

5-4 Considérese la distribución de carga del ejercicio 3-2. Encontrar el potencial en el centro del cuadrado. ¿Por qué no es posible encontrar $\mathbf{E}$ en el centro del cuadrado a partir de este resultado?

5-5 Considérese un cubo de lado a con la localización y orientación del cuerpo mostrado en la figura 1-41. Hay una carga puntual, q, en cada uno de los vértices. Encontrar ϕ en el centro de la cara para la cual $x = a$.

5-6 En una cierta región del espacio, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ es constante. Demostrar que un potencial adecuado para este caso es $\phi = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{r} + \phi_0$, donde ϕ_0 es constante. ¿Cuáles son las superficies equipotenciales?

5-7 Obtener los resultados (5-22) y (5-23) utilizando (5-11) y los campos dados por (5-24) y (5-25).

5-8 Una esfera de radio a posee una carga total, Q, distribuida uniformemente en todo su volumen. El centro de la esfera se encuentra en el punto (A, B, C). Encontrar el potencial ϕ en cualquier punto $(x, y, z,)$ fuera de la esfera y, a partir de éste, las componentes rectangulares de $\mathbf{E}$ en ese punto.

5-9 Una esfera de radio a posee una densidad de carga que varía con la distancia r al centro, de acuerdo con $\rho = Ar^n$, donde $A =$const. y $n \geqslant 0$. Encontrar ϕ para todos los puntos dentro y fuera de la esfera, por medio de (5-7), y expresar los resultados en función de la carga total Q de la esfera.

5-10 Encontrar ϕ para todos los puntos dentro y fuera de la esfera de carga del ejercicio 4-5 por medio de (5-11). Graficar ϕ en función de r.

5-11 Encontrar ϕ en todos los puntos para la distribución de carga del ejercicio 4-6. Expresar la respuesta en función de la densidad de carga constante, ρ, y graficar ϕ en función de r.

5-12 Encontrar ϕ para todos los puntos fuera y dentro del cilindro descrito en el ejercicio 3-13.

5-13 Considérense la distribución de carga del ejercicio 3-10 y la figura 3-7. Encontrar ϕ en un punto arbitrario sobre el eje z. ¿Por qué el resultado da el valor correcto de E_z pero no así el de E_x?

5-14 Una esfera de radio a posee una densidad de carga superficial, σ pero no tiene densidad volumétrica de carga. Encontrar ϕ para todos los puntos fuera y dentro de la esfera, por medio de (5-8).

5-15 Un plano infinito cargado con densidad superficial σ constante coincide con el plano xy. Utilizar la expresión de $\mathbf{E}$ dada por (3-13) para encontrar un potencial ϕ a partir del cual se pueda calcular $\mathbf{E}$. ¿Cuáles son las superficies equipotenciales en este caso?

5-16 Encontrar el potencial producido por el plano del ejercicio anterior, por medio de (5-8).

5-17 Existe carga distribuida con densidad superficial σ constante sobre un círculo de radio a en el plano xy con centro en el origen. Demostrar que el potencial de un punto sobre el eje z está dado por

$$\phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[(a^2+z^2)^{1/2} - |z|\right] \tag{5-50}$$

Verificar que esto da (3-15). ¿Qué ocurre con ϕ a medida que a se vuelve muy grande? ¿Cuál es el menor valor de z para el que el potencial producido por este círculo puede calcularse como si se debiera a una carga puntual, sin incurrir en un error mayor del 1 por ciento?

5-18 Demostrar que el potencial dado por (5-30) da el **E** correcto encontrado en el ejercicio 3-11.

5-19 Como una verificación simple de los resultados (5-34) a (5-36), demostrar que éstos se reducen a los resultados esperados para los casos especiales $\varphi = 0$ y $\varphi = 90°$.

5-20 El parámetro K, que caracteriza una determinada línea de fuerza en (5-43), puede relacionarse con la magnitud E del campo eléctrico en el punto donde la línea cruza el eje y, es decir, cuando $\varphi = 90°$. Demostrar que

$$K^2 = \frac{a^2(4\delta - 5)^2}{16(\delta - 1)}$$

donde $\delta = \lambda/\pi\epsilon_0 aE$.

5-21 Considérese la distribución de carga de la figura 5-7. Si se realiza un movimiento desde un punto sobre el eje x para el que $x = b > a$ hasta otro punto sobre el mismo eje para el que $x = -b$, ¿cuál es el cambio en el potencial?

5-22 Expresar ϕ para la distribución de carga de la figura 5-7, en coordenadas rectangulares, y utilizar este resultado para encontrar E_x y E_y.

5-23 Considérese la distribución de carga del ejercicio 5-3. ¿Cuánto trabajo debe realizar un agente externo para cambiar la separación entre las cargas de $2a$ a a? Ilustrar este procedimiento con una gráfica de U_e *contra* la separación R.

5-24 Considérese la carga lineal de la figura 3-8, con $L_1 = 0$. La carga por unidad de longitud es proporcional al cubo de la distancia al origen. Encontrar el potencial de un punto P sobre el eje x, para el que $x = a$. A partir de este resultado, encontrar E_z en P; si no lo puede hacer, explicar la razón. ¿Cuánto trabajo debe realizar un agente externo para mover una carga puntual, q, muy lentamente a lo largo del eje x desde P hasta el infinito?

Capítulo

6
Conductores en campos electrostáticos

La ley de Coulomb supone que el espacio entre las cargas es vacío. Es interesante, desde luego, investigar qué es lo que ocurre cuando las cargas eléctricas se encuentran en presencia de materia, de tal manera que por lo menos parte de la región de interés no esté vacía. No se estudia aquí el problema completo en este capítulo sólo se considera el caso en el que una clase particular de materia, llamada conductora, está presente. Debido a las propiedades especiales de los conductores se podrán deducir algunas consecuencias muy interesantes e importantes que surgen en su presencia.

6-1 Algunos resultados generales

En términos generales, se puede definir un *conductor* como una región en la que las cargas son libres de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico. El ejemplo más común es el de los metales, en los cuales las cargas móviles vienen a ser los electrones "libres"; pero no es el único caso, y no es necesario de ningún modo restringir este estudio a tal ejemplo específico. Sin embargo, sí se asume que se van a tratar situaciones completamente estáticas a escala macroscópica.

Si un campo eléctrico estuviera presente en un conductor, las cargas se moverían y no podría existir el estado *estático* que se está suponiendo. Por lo tanto, la conclusión es que **E** debe ser igual a cero en todos los puntos de un conductor. De (5-3) se desprende ahora que ϕ es constante dentro del conductor, es decir, que el conductor es un *volumen equipotencial*. Por ello se tiene que

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r})&=0\\ \phi(\mathbf{r})&=\text{const.}\end{aligned}\right\}\quad \text{dentro de un conductor} \tag{6-1}$$

Considérese ahora la situación en la superficie de un conductor. El campo eléctrico en la región al vacío que lo rodea puede muy bien no ser igual a cero. Supóngase que **E** forma un ángulo con la superficie tal como se muestra en la figura 6-1 *a*. Se puede imaginar a **E** descompuesto en dos componentes, $\mathbf{E}_n$ perpendicular (normal) a la superficie, y $\mathbf{E}_t$ paralela a la superficie (la componente tangencial). Ahora, si $\mathbf{E}_t$ no fuese igual a cero, habría una fuerza tangencial sobre las cargas móviles, por lo que se moverían paralelamente a la

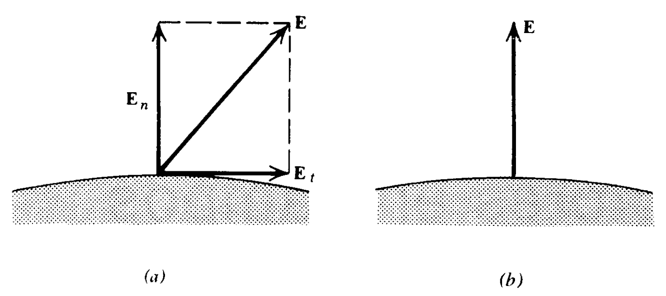


Figura 6-1 (*a*) Dirección hipotética de **E** en la superficie de un conductor. (*b*) Dirección real de **E**.

superficie, rompiendo la situación estática que se había asumido. Por lo tanto, $\mathbf{E}_t = 0$, siendo la única posibilidad que $\mathbf{E}_n \neq 0$; en otras palabras, en la superficie de un conductor **E** debe ser normal a la superficie, como se ilustra en la figura 6-1*b*. Pero, como se apreció en la figura 5-1, la dirección de **E** es perpendicular a las superficies equipotenciales; por lo tanto, la superficie

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \neq 0 \\ &\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{en la superficie de un conductor} \\ &\phi(\mathbf{r}) = \text{const.} \end{aligned} \tag{6-2}$$

(Puede ocurrir, desde luego, que en alguno o algunos puntos en particular de la superficie, la componente normal $\mathbf{E}_n$ también sea igual a cero, pero de cualquier manera es la única componente que *puede* ser diferente de cero en la superficie).

Aplíquese ahora la ley de Gauss (4-1) a una superficie arbitraria cerrada que se encuentre completamente dentro del conductor, como la S que se muestra en líneas punteadas en la figura 6-2. Dado que $\mathbf{E} = 0$ en todos los puntos del interior del conductor, también será cero en todas las partes de S por lo que, en este caso, (4-1) queda

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0 = \frac{Q_{\text{en}}}{\epsilon_0} \tag{6-3}$$

y por tanto, la carga total dentro de S, Q_{en}, debe ser cero. Debido a que la superficie S es completamente arbitraria, puede ser deformada como se desee, aún para hacerla coincidir con la superficie del propio conductor, y Q_{en} seguirá siendo cero. De esta manera se puede concluir que la carga $Q_{en} = 0$ en todos los puntos en el interior del conductor. En otras palabras, se ha demostrado que la carga neta en el interior del conductor siempre

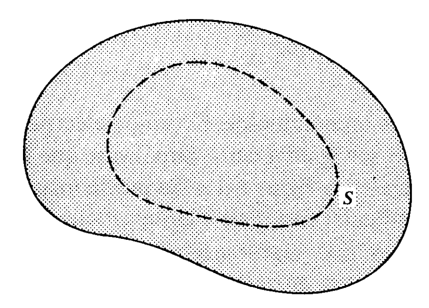


Figura 6-2 La superficie S se encuentra completamente dentro de un conductor.

es igual a cero, de manera que cualquiera que sea la carga neta presente en el conductor esta debe localizarse completamente en su *superficie*. Faraday fue el primero en demostrar experimentalmente este hecho con su famoso "cubo de hielo" experimento en el que medía la distribución de carga en una simple cubeta de metal. Nótese que este resultado es conclusión directa de la ley de Gauss, la que a su vez no es sino una consecuencia de la

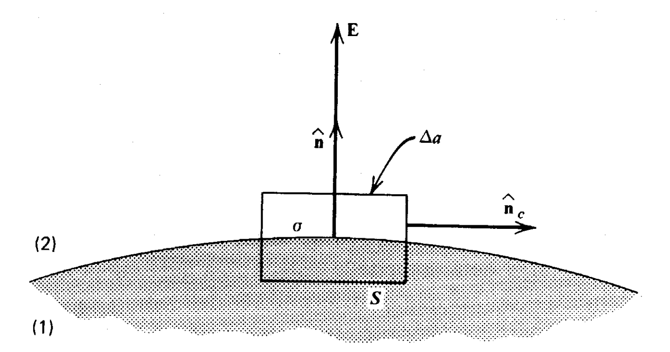


Figura 6-3 Cálculo del campo eléctrico en la superficie de un conductor.

naturaleza del cuadrado inverso de la ley de Coulomb. De hecho, esta conclusión viene a ser la base de las pruebas experimentales más exactas que se han realizado para determinar la exactitud del exponente 2 en la ley de Coulomb, ya que dichos experimentos buscan, esencialmente, desviaciones de la predicción de que $Q_{en} = 0$; los resultados han demostrado que el exponente es, en efecto igual a 2 con una tolerancia de unas pocas partes en 10^{16}.

La figura 6-3 muestra la situación que existe en la superficie de separación entre una región conductora (1) y la región de vacío (2), en la que $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal exterior del conductor. Se dibuja un pequeño cilindro de sección Δa cuyo lado curvo es paralelo a $\hat{\mathbf{n}}$ de manera que su forma exterior $\hat{\mathbf{n}}_c$, sea paralela a la superficie de separación. La cara superior del cilindro se encuentra completamente en la región de vacío, en la que $\mathbf{E} \neq 0$, mientras que su cara inferior se encuentra completamente dentro del conductor, donde $\mathbf{E} = 0$; se toma Δa lo suficientemente pequeña para que $\mathbf{E}$ sea prácticamente constante sobre toda la cara superior. Se aplica ahora la ley de Gauss a este pequeño cilindro, notando que $Q_{en} = \sigma\Delta a$ en este caso; por lo tanto,

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{tapa}} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da + \int_{\text{lado}} \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}_c\,da + \int_{\text{fondo}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = E\Delta a = \frac{\sigma\Delta a}{\epsilon_0}$$

dado que $\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}} = E =$ const. en la primera integral, $\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}_c = 0$ en la segunda y $\mathbf{E} = 0$ en la tercera. Así, el valor de E en la superficie de un conductor es igual a σ/ϵ_0, y, si se combina éste con (5-3) y (6-2) se llega a

$$E_{\text{en la superficie}} = -\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{6-4}$$

Si σ es positiva, $\mathbf{E}$ se dirige hacia afuera de la superficie, mientras que si σ es negativa $\mathbf{E}$ se dirige hacia la superficie conductora; estos signos son consistentes con la dirección de la fuerza que sería ejercida sobre la carga de prueba positiva que se colocase cerca de la superficie. Nótese que el E de (6-4) es exactamente el doble del valor de E debido a un plano cargado con la misma σ, según se encontró en (4-12) por medio de un cálculo similar. Una manera poco ortodoxa de explicar esta diferencia es que el flujo total de $\mathbf{E}$ por unidad

de área que puede ser producido por una densidad superficial de carga dada es σ/ϵ_0; en el caso del plano cargado se puede decir que este flujo total se dirige igualmente hacia afuera a través de sus dos caras, mientras que en el conductor, dado que el campo eléctrico en el interior debe ser igual a cero, sólo hay una dirección posible para este flujo total. Como se verá en los ejemplos que siguen, σ no necesariamente debe ser constante, sino que puede variar con la posición en la superficie; cuando esto ocurra, **E** también variará con su posición en la superficie (pero siempre será normal a ella). Por ejemplo, supóngase que el conductor es originalmente neutro, es decir, que no posee carga neta. En ese caso, cuando se produce un campo en sus alrededores al mover otras cargas externas desde el infinito, las cargas móviles del conductor ya no están en equilibrio, generalmente, con respecto a la nueva situación y habrá que reajustar sus posiciones. Así, por un período de tiempo corto existirá un flujo de cargas alrededor del conductor, pero el equilibrio volverá a establecerse y entonces (6-1), (6-2) y (6-4) quedarán satisfechas. Pero dado que el conductor originalmente no tenía carga neta, no puede tener carga neta en su nueva situación, es decir, $\oint_S \sigma\, da = 0$, demostrando así que σ no puede ser del mismo signo en todos lados y, por tanto, no puede ser constante. Por otro lado, un agente externo podría transferir una cantidad *neta* de carga al conductor, es decir, lo podría "cargar". La densidad superficial de carga en este caso podría ser del mismo signo en todas partes, y hasta podría ser constante si hubiera la suficiente simetría.

Ejemplo

Conductor esférico aislado. Supóngase que existe una carga neta, Q, en una esfera conductora de radio a. Si está aislada, no existe razón para preferir una dirección sobre otra, de manera que existe simetría esférica. Como resultado, la carga Q se distribuirá uniformemente sobre la superficie con una densidad constante $\sigma = Q/4\pi a^2$, y el campo eléctrico en la superficie estará dado por (6-4) como $E = Q/4\pi\epsilon_0 a^2$. Más aún, dado que el campo **E** en la superficie se encuentra en la dirección normal, será radial.

Se puede llegar a estas mismas conclusiones de otra manera. Se ha visto en repetidas ocasiones que, debido a la simetría esférica, la carga Q puede ser tratada como si fuera una carga puntual en el centro de la esfera, en lo que respecta a los efectos *fuera* de la esfera. El potencial afuera es exactamente el dado por (5-22), es decir, $Q/4\pi\epsilon_0 r$, mientras que el potencial es constante e igual al potencial en la superficie ($r = a$), de acuerdo con (6-1) y (6-2); de esta forma se obtiene

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (r \geqslant a)$$
$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \qquad (r \leqslant a) \qquad (6\text{-}5)$$

El campo eléctrico afuera estará dado por (5-24) y es $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/4\pi\epsilon_0 a^2$ cuando se evalúan en la superficie, esto concuerda exactamente con el resultado obtenido en el párrafo anterior a partir de (6-4). Dentro de la esfera, $\mathbf{E} = 0$, debido al valor constante del potencial dado por (6-5) para $r \leqslant a$.

No se han agotado todavía las posibilidades de aplicación de la ley de Gauss. Considérese ahora un conductor que contiene una cavidad en su interior, tal como se muestra en la figura 6-4. La superficie total del conductor tiene ahora dos partes: una superficie exterior, S_0, y una superficie interior S_i. Considérese otra vez una superficie arbitraria, S, que quede completamente dentro del cuerpo conductor, de manera que $\mathbf{E} = 0$ en todo

punto de S. En este caso también se aplica (6-3), de tal forma que $Q_{en} = 0$, es decir, que no puede existir carga neta dentro de la superficie S.

Supóngase ahora que existe una carga dentro de la cavidad, que se indica como Q_{cav}. Para que Q_{en} sea igual a cero para S, debe existir una carga igual y opuesta en algún lugar

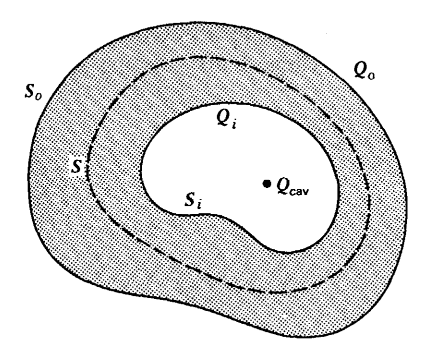


Figura 6-4 Cargas en un conductor con una cavidad en su interior.

dentro de S, o sea, sobre el conductor. Pero antes se encontró que cualquier carga de un conductor debe localizarse enteramente sobre su superficie; por tanto, esta carga, Q_i, debe encontrarse sobre la superficie interior S_i. Así, se tiene que $Q_{en} = 0 = Q_{cav} + Q_i$, o sea,

$$Q_i = Q_{\text{superficie interior}} = -Q_{\text{cav}} \tag{6-6}$$

que es un resultado siempre verdadero.

Si el conductor era neutro antes de que se insertara Q_{cav}, debe permanecer neutro después; por lo tanto, una carga $Q_0 = -Q_i = +Q_{cav}$ deberá aparecer en el resto de la superficie, es decir, sobre la superficie exterior S_0, como se indica en la figura. De esta manera, una carga dentro de la cavidad puede hacer sentir su presencia para alguien que se encuentre fuera del conductor, por medio de la carga inducida Q_0 que se produce sobre la superficie exterior y el campo eléctrico debido a ésta.

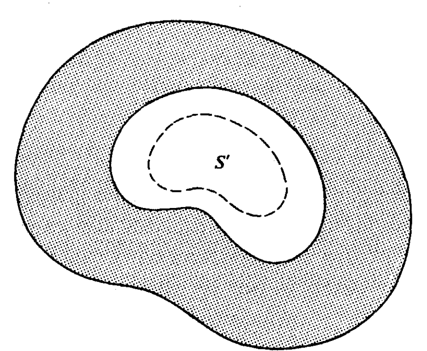


Figura 6-5 La superficie S′ se encuentra completamente dentro de la cavidad.

Considérese el caso $Q_{cav} = 0$, entonces *siempre* la carga en la superficie interior S_i será igual a cero, de acuerdo con (6-6). (Q_0, por otro lado, será cero solamente si el conductor era neutro originalmente y si se mantuvo así). Considérese ahora una superficie cerrada, S', que se encuentra totalmente dentro de la cavidad, como se muestra en la figura 6-5. Dado que no existe carga en ningún lugar de la cavidad, S' nunca podrá encerrar carga alguna y

$$\oint_{S'} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}=0$$

de acuerdo a (4-1). Pero S' es completamente arbitraria y, por tanto, puede agrandarse, achicarse o deformarse de cualquier otra manera; así el resultado obtenido siempre será verdadero si $\mathbf{E} = 0$ en todo punto de la cavidad, lo que significa que el potencial es constante dentro de la cavidad. En otras palabras, si no existe carga dentro de una cavidad

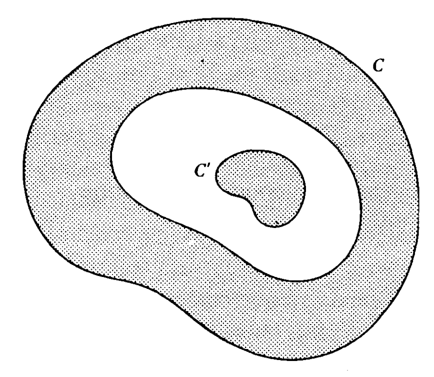


Figura 6-6 El conductor C' se encuentra en una cavidad del conductor C.

contenida por un conductor, el campo eléctrico siempre será cero en la cavidad, y la cavidad será un volumen equipotencial. De hecho, el potencial en la actividad siempre será el mismo que el del propio conductor, debido a (5-11).

Éstas conclusiones generales son válidas, desde luego, aún en el caso de que exista otro conductor dentro de la cavidad como se ilustra en la figura 6-6. Mientras que el conductor C' no posea carga, no habrá campo eléctrico dentro de la cavidad, y C' siempre tendrá el mismo potencial que C, el conductor envolvente. Por tanto, sin importar qué carga se coloque en o fuera de C, o de qué signo o distribución sea, no existirá ningún campo eléctrico en C' y sus cargas móviles no serán afectadas. En la terminología usual, el conductor interno estará completamente *blindado*; este principio del blindaje electrostático tiene aplicaciones prácticas tales como el blindaje de los componentes electrónicos en circuitos, al encerrarlos en recipientes metálicos.

6-2 Sistemas de conductores

Considérese un sistema que consista de n conductores que se numeran de alguna manera, es decir, $1, 2, \ldots, j, \ldots, n$. Se supone que los conductores están cargados con cargas totales $Q_1, Q_2, \ldots, Q_j, \ldots, Q_n$. Se sabe que cada carga se encontrará en la superficie del conductor respectivo, de manera que pueden ser descritas por las correspondientes densidades superficiales de carga $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n$. Aunque todavía no es posible calcular todas estas cantidades, es de esperarse que en general las densidades de carga no sean constantes, sino que varíen con la posición de alguna manera. De cualquier modo, el potencial en cualquier punto P, que se indica como $\phi\ p$, puede en principio, encontrarse a partir de (5-8) y es

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\mathbf{r}')da'}{R} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_j}\frac{\sigma_j(\mathbf{r}_j)da_j}{R_j} \tag{6-7}$$

Aquí se ha expresado el potencial total como la suma de las contribuciones de cada uno de los conductores: S_j es la superficie del conductor j, da_j es el elemento de área de esa superficie en la posición $\mathbf{r}_j$, y $R_j = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_j|$ es la distancia de da_j al punto de campo P en $\mathbf{r}_P$. Estas relaciones se ilustran en la figura 6-7, aunque no se muestran los vectores de posición por simplificar. Ahora, (6-7) es completamente general, y por lo tanto debe ser

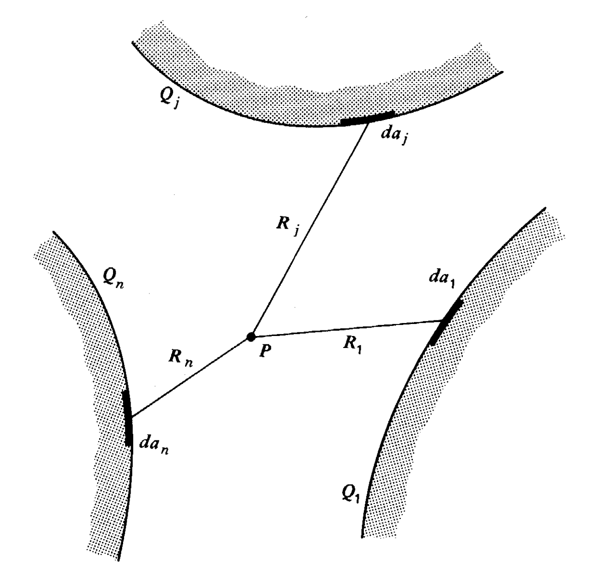


Figura 6-7 Cálculo del potencial debido a varios conductores cargados.

cierta *en particular* cuando se elige a P como *cualquier* punto sobre la superficie equipotencial del conductor i cuyo potencial es ϕ_i; así, se puede escribir donde R_{ji} es la distancia

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \frac{\sigma_j\, da_j}{R_{ji}} \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{6-8}$$

del punto $\mathbf{r}_j$ del conductor j al punto particular en cuestión del conductor i. Dado que i puede ser cualquiera de los conductores, (6-8) realmente representa un sistema de n ecuaciones, cada una de las cuales tiene n términos en su lado derecho. [Nótese que la suma en (6-8) también incluye el término $j = i$, es decir que incluye la integral sobre la superficie del conductor cuyo potencial total se está calculando].

Resulta conveniente para los propósitos de este estudio escribir (6-8) en función de las cargas totales Q_j. La densidad superficial *promedio* de carga del conductor j, $\langle\sigma_j\rangle$, será justamente la carga total dividida entre la superficie total, es decir, $\langle\sigma_j\rangle = Q_j/S_j$. La densidad de carga real, σ_j, en un punto dado generalmente no es igual al promedio, pero será proporcional a él; esto hace posible escribir

$$\sigma_j = \langle\sigma_j\rangle f_j = \frac{Q_j}{S_j} f_j \tag{6-9}$$

donde f_j es un factor que describe cómo difiere la densidad de carga real de la promedio, y será por lo tanto una función de la posición en la superficie del conductor j. De esta manera, $\sigma_j \sim Q_j$, y cuando se sustituye (6-9) en (6-8) se obtiene

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0 S_j} \int_{S_j} \frac{f_j\, da_j}{R_{ji}} \qquad (i=1,2,...,n) \tag{6-10}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en la forma

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} Q_j \qquad (i=1,2,...,n) \tag{6-11}$$

donde

$$p_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 S_j} \int_{S_j} \frac{f_j\, da_j}{R_{ji}} \tag{6-12}$$

lo que demuestra que el potencial de *cualquier* conductor depende *linealmente* de las cargas de *todos* los conductores, incluyendo la propia. Si (6-11) se escribe en forma explícita, se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \phi_1 &= p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + \dots + p_{1n}Q_n \\ \phi_2 &= p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + \dots + p_{2n}Q_n \\ &\dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \phi_n &= p_{n1}Q_1 + p_{n2}Q_2 + \dots + p_{nn}Q_n \end{aligned} \tag{6-13}$$

El conjunto de coeficientes P_{ij} definidos por (6-12) recibe el nombre de *coeficientes de potencial* y, en general, su número total es n^2. Nótese que (6-12) ya no contiene referencia alguna a los potenciales o cargas, de manera que los p_{ij} representan relaciones puramente geométricas. Si se conocen las distribuciones de carga, de manera que los factores f_j sean conocidos, entonces en principio se podrían calcular todos los coeficientes p_{ij} a partir de (6-12); todavía no se han considerado los métodos de resolución de problemas electrostáticos que podrían proporcionar tal información. Sin embargo, estos coeficientes son siempre *medibles* en principio, puesto que de (6-11) se observa que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial Q_j} \right)_{Q_1, \dots Q_{j-1}, Q_{j+1}, \dots Q_n} = p_{ij} \tag{6-14}$$

de manera que P_{ij} se puede interpretar como la razón del cambio producido en la potencial del conductor i al cambio de la carga del conductor j cuando las cargas en *todos los otros* conductores se mantienen constantes.

Los p_{ij} tienen una propiedad de simetría muy útil e interesante. Si se elimina f_j de (6-12) por medio de (6-9), se encuentra que

$$p_{ij} Q_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_j} \frac{\sigma_j\, da_j}{R_{ji}} \tag{6-15}$$

que también se desprende de la igualación de los términos correspondientes en las sumas de (6-8) y (6-11). También se tiene que

$$Q_i = \int_{S_i} \sigma_i\, da_i \tag{6-16}$$

de acuerdo con (2-16), y si se multiplican estas dos últimas ecuaciones entre sí, se obtiene

$$p_{ij}Q_iQ_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_i}\int_{S_j}\frac{\sigma_i\sigma_j\,da_i\,da_j}{R_{ji}} \tag{6-17}$$

Si ahora se intercambian los índices i y j en (6-17), se obtienen

$$p_{ji}Q_jQ_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S_j}\int_{S_i}\frac{\sigma_j\sigma_i\,da_j\,da_i}{R_{ij}} \tag{6-18}$$

Ahora, $R_{ij} = R_{ji}$, además, las integraciones son independientes entre sí de manera que se puede intercambiar el orden de integración en (6-18). Una vez hecho esto, se observa que la integral de (6-18) es exactamente igual a la de (6-17); por lo tanto, los miembros izquierdos son también iguales entre sí, haciendo que $p_{ij}Q_iQ_j = p_{ji}Q_jQ_i$, o sea,

$$p_{ji} = p_{ij} \tag{6-19}$$

El contenido físico de esta propiedad de simetría de los p puede expresarse de acuerdo con (6-19) y (6-11) como sigue: si una carga Q en un conductor j lleva al conductor i a un potencial ϕ, entonces la *misma* carga Q colocada en i llevará a j al *mismo* potencial ϕ.

Algunas veces, si el problema es lo suficientemente simple, los p_{ij} pueden encontrarse más fácilmente a partir de (6-11) que de (6-12).

Ejemplo

Esfera conductora aislada. Este es un ejemplo que se resolvió en la última sección; el potencial en la superficie está dado por (6-5) y es $\phi = Q/4\pi\epsilon_0 a$. Para un solo conductor, (6-11) se reduce a $\phi = p_{11}Q$ y, por comparación, se observa que

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \tag{6-20}$$

Así ha sido posible encontrar el único coeficiente de potencial para este caso simple, que resulta ser dependiente de las propiedades geométricas del sistema

6-3 Capacitancia

Uno de los usos más antiguos de los conductores en la electrostática fue para el almacenamiento de la carga eléctrica; el conductor puede ser cargado, por ejemplo, al proporcionarle un potencial definido por medio de una batería. Para tal aplicación, resulta de interés natural encontrar la "capacidad" del conductor para almacenar carga, en un sentido muy similar al de la capacidad de un barril respecto al número de manzanas que puede contener. Hoy en dia, tales sistemas reciben por lo general el nombre de *capacitores* y la medida cuantitativa de su capacidad se llama *capacitancia*. De manera general, solamente existen dos sistemas de conductores de interés a este respecto: un solo conductor aislado, y un sistema de dos conductores con cargas iguales pero de signo opuesto.

Para un conductor aislado, la suma (6-11) se reduce a un solo término

$$\phi = p_{11}Q \tag{6-21}$$

En este caso, la carga es siempre directamente proporcional al potencial y la capacitancia, C, de un solo conductor se define como la relación:

$$C=\frac{Q}{\phi}=\frac{1}{p_{11}} \tag{6-22}$$

y será una propiedad definida del conductor y relacionada con su geometría. Por ejemplo, se puede considerar la esfera para la que se encontró p_{11} mediante (6-20); su capacitancia es entonces

$$C_{\text{esfera}}=4\pi\epsilon_0 a \tag{6-23}$$

y es directamente proporcional al radio. Puesto que las unidades de ϵ_0 estaban dadas originalmente en farads/metro en (2-4), se observa en (6-23) que la unidad de capacitancia es el farad; también se puede observar (6-22) que 1 farad = 1 coulomb/volt, que es, desde luego, consistente con el resultado previo de 1 coulomb^2/joule dado después de (2-4).

Cuando se considera un sistema de solamente dos conductores, el sistema de ecuaciones (6-13) se reduce a

$$\begin{aligned}\phi_1&=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2\\ \phi_2&=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2\end{aligned} \tag{6-24}$$

junto con

$$p_{12}=p_{21} \tag{6-25}$$

de acuerdo con (6-19). Así, las relaciones potencial-carga para este sistema generalmente requieren del conocimiento de tres cantidades: p_{11}, p_{22} y p_{12}. Cuando los dos conductores se usan como un capacitor, sin embargo, se observa una situación algo más especial—se supone que los dos conductores se conectan entre sí por alguna trayectoria conductora y que el proceso de carga de este sistema es una *transferencia de carga* de un conductor al otro. En estas circunstancias, la carga en uno de los conductores será siempre igual y de signo contrario a la carga del otro.

De esta manera, se toma como definición general de capacitor la siguiente: *cualesquiera* dos conductores con cargas iguales y signo opuesto, Q y $-Q$. Aún así, no resulta inmediatamente evidente que se pueda siquiera definir una capacitancia en este caso. Sin embargo, haciendo $Q_1=Q$ y $Q_2=-Q$ en (6-24), se obtiene

$$\begin{aligned}\phi_1&=(p_{11}-p_{12})Q\\ \phi_2&=(p_{21}-p_{22})Q\end{aligned} \tag{6-26}$$

de manera que la *diferencia de potencial* entre los conductores es

$$\Delta\phi=\phi_1-\phi_2=(p_{11}+p_{22}-p_{12}-p_{21})Q \tag{6-27}$$

y se puede observar que para un capacitor con cargas iguales y opuestas la carga y la diferencia de potencial son *siempre* proporcionales entre sí, de tal forma que es siempre posible caracterizar el sistema por medio de un solo parámetro. A esta cantidad se le denomina capacitancia, C, y se le define como

$$C=\frac{Q}{\Delta\phi} \tag{6-28}$$

por analogía con (6-22). A comparar (6-28) y (6-27), y utilizando (6-25), se observa que la capacitancia puede expresarse en función de los coeficientes de potencial como

$$C=\frac{1}{p_{11}+p_{22}-2p_{12}} \tag{6-29}$$

de manera que, también en este caso de dos conductores, la capacitancia es esencialmente una propiedad que refleja las relaciones geométricas del sistema.

Ejemplo

Capacitor esférico. Considérense los dos conductores que se muestran en la figura 6-8. Las superficies limitantes son esferas concéntricas de radios a, b y c. Al conductor interno se le llama 1, y al externo 2. Se asume que 2 encierra completamente a 1. Los p necesarios para encontrar C pueden obtenerse a partir de las relaciones generales (6-24) si se consideran casos especiales apropiadamente elegidos. Antes que nada supóngase que $Q_1=0$, mientras que $Q_2\neq 0$, de manera que (6-24) queda como

$$\phi_1=p_{12}Q_2 \qquad \text{y} \qquad \phi_2=p_{22}Q_2 \tag{6-30}$$

de (6-6) se desprende que Q_2 se encuentra completamente sobre la superficie exterior de radio c; por lo tanto, si se utiliza rl radio apropiado c en lugar de a en (6-5), el potencial de 2 estará dado por

$$\phi_2=\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 c} \tag{6-31}$$

de manera que, de (6-30), se obtiene

$$p_{22}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \tag{6-32}$$

Dado que no existe carga en la cavidad, lo visto anteriormente en relación a las figuras 6-5 y 6-6 indica que $\phi_1=\phi_2$, de manera que, de acuerdo con (6-30),

$$p_{12}=p_{22} \tag{6-33}$$

Para encontrar p_{11}, asúmase que $Q_1\neq 0$, mientras que $Q_2=0$; la segunda es el valor neto sobre el conductor 2, dado que la superficie interior de radio b debe poseer una carga $-Q_1$ de acuerdo con (6-6). En este caso,

$$\phi_1=p_{11}Q_1 \qquad \text{y} \qquad \phi_2=p_{21}Q_1 \tag{6-34}$$

Se pueden relacionar estas dos expresiones por medio de (5-11); el campo de la región vacía para la que $a\leqslant r\leqslant b$ puede obtenerse a partir de la ley de Gauss, y el resultado será otra vez que, en esta región, Q_1 actúa como si fuera una carga puntual, de tal modo que el campo será radial y estará dado por (4-17) con Q remplazada por Q_1. Al combinar todo esto se obtiene

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b E_r\, dr$$

$$= \int_a^b \frac{Q_1 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{6-35}$$

El miembro izquierdo puede escribirse como $(p_{11} - p_{21})Q_1$ debido a (6-34); al cancelar Q_1 en ambos miembros y utilizar (6-33) y (6-32) queda por último,

$$p_{11} = p_{22} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \tag{6-36}$$

Debido a (6-33), la expresión general para C dada en (6-29) se simplifica así;

$$C = \frac{1}{p_{11} - p_{22}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a} \tag{6-37}$$

utilizando también (6-36). Así, se ha podido encontrar la capacitancia de este capacitor

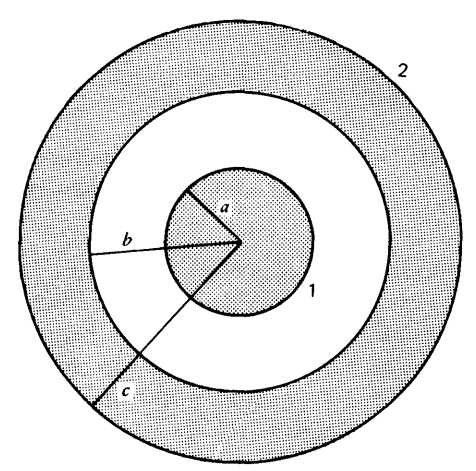


Figura 6-8 Capacitor esférico.

en particular por la evaluación del resultado general (6-29), expresado en función de los coeficientes de potencial.

Sin embargo, en la mayoría de los casos simples ésta no es la manera más conveniente de proceder. Lo que generalmente se hace es encontrar la diferencia de potencial a partir de una solución diferente y anterior al problema. De ordinario, ésta incluirá el conocimiento del campo eléctrico. Después se puede encontrar $\nabla\phi$ usando (5-11) para integrar E sobre cualquier trayectoria conviente entre los dos conductores. Cuando los dos conductores forman un capacitor, generalmente reciben el nombre de "placas" Ya que, de acuerdo con (6-27), $\Delta\phi$ deberá ser proporcional a la carga Q: la relación de estas dos dará la capacitancia, de acuerdo con (6-28), por lo tanto, se tiene

$$\Delta\phi = \phi_+ - \phi_- = \int_{+\text{placa}}^{-\text{placa}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{C} \tag{6-38}$$

Resulta conveniente escribir el integrando de esta manera porque E generalmente estará

dirigida desde la placa de mayor potencial, cargada positivamente, a la placa de menor potencial cargada negativamente, de manera que $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ será positivo, dando así el signo correcto para $\Delta\phi$. A continuación se estudian dos ejemplos desde este punto de vista.

Ejemplo

Capacitor esférico. Este es el mismo sistema que se muestra en la figura 6-8, para el cual se encontró C por el método anterior. Asúmase ahora que la esfera interior de radio a posee carga positiva, Q; entonces la esfera exterior de radio b poseerá la carga $-Q$ de acuerdo con (6-6). Como antes, al aplicar la ley de Gauss a una esfera de radio r tal que $a < r < b$ resulta que $\mathbf{E} = (Q/4\pi\epsilon_0 r^2)\hat{\mathbf{r}}$, de acuerdo con (4-17). Si se integra de la placa positiva a la negativa en una dirección radial, de manera que $d\mathbf{s} = dr\hat{\mathbf{r}}$, entonces (6-38) queda

$$\int_+^- \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \frac{Q\,dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{C} \tag{6-39}$$

lo que da el mismo valor para C que se encontró anteriormente en (6-37); esta vez el resultado se obtuvo de una manera mucho más fácil.

Ejemplo

Capacitor de placas paralelas. Este sistema consiste de dos placas conductoras, cada una de superficie A, que son paralelas entre sí y están separadas una distancia d que es muy pequeña comparada con sus dimensiones lineales. Las placas no necesitan ser cuadradas, pero cualquiera de sus dimensiones lineales deberá ser del orden de $\sqrt{A}$, de manera que, de hecho, $d \ll \sqrt{A}$ por hipótesis. Una vista de perfil de este capacitor puede observarse en la figura 6-9. En estas circunstancias, las placas pueden ser consideradas como si fueran de dimensiones infinitas, con lo que se llega a las mismas conclusiones que para un plano infinito cargado, como en la sección 4-2: $\mathbf{E}$ es constante en magnitud y su dirección es normal a las placas, como se indica por las líneas punteadas de la figura. Dado que $\mathbf{E}$ sólo existe entre los conductores, su magnitud viene a ser la que resulta de (6-4), esto es , $E = \sigma/\epsilon_0$. (Este valor de $\mathbf{E}$ es también el mismo que se encontró para los dos planos del ejercicio 3-9 y la figura 3-6). La trayectoria de integración más simple es la que sigue la dirección de $\mathbf{E}$, indicada por $d\mathbf{s}$ en la figura 6-9. Así, $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E\,ds = (\sigma/\epsilon_0)ds$ y (6-38) queda

$$\int_+^- \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\int_+^- ds = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \left(\frac{d}{\epsilon_0 A}\right)Q = \frac{Q}{C} \tag{6-40}$$

donde $\sigma = Q/A$; resulta exacto considerar a σ como constante porque las placas son efectivamente de dimensiones infinitas, correspondiendo a una distribución superficial de carga uniforme. Al despejar C de (6-40), se obtiene la conocida expresión para la capacitancia:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{6-41}$$

Como un punto interesante, tanto este sistema como el del capacitor esférico ilustran de una manera gráfica por qué a los capacitores a menudo también se les llama "condensadores". Debido a que la distribución de campo queda circunscrita a la región finita entre las placas, se dice que el campo eléctrico ha sido "condensado" en esta región, en lugar de extenderse por todo el espacio, como fue el caso de la mayoría de los ejemplos previos.

En este caso, las placas no son en realidad infinitas, pero se ha supuesto que el campo eléctrico es constante en todo punto entre las placas e iguales a (σ/ϵ_0), y al llegar

a los bordes de las placas se vuelven cero abruptamente. Uno de los ejercicios consiste en demostrar que esto no es posible debido a la naturaleza conservativa del campo eléctrico. Lo que en realidad ocurre es que las líneas de **E** sufren una curvatura hacia afuera a medida que se aproximan a los bordes de las placas, y por lo tanto deben extenderse a la región

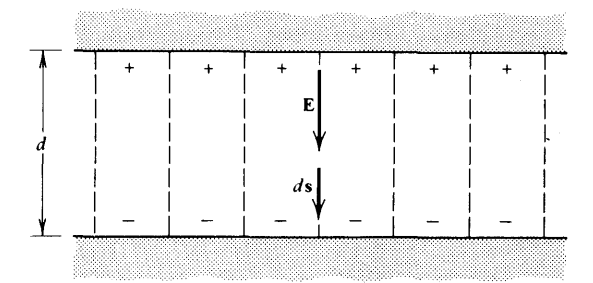


Figura 6-9 Capacitor de placas paralelas.

exterior más allá de las placas como se indica en la figura 6-10. Sin embargo, si las placas son "lo suficientemente grandes", no existirá un error considerable al despreciar estos "efectos de borde"; dado que en la práctica se suele hacer así, en este libro se continuará haciendo esta aproximación.

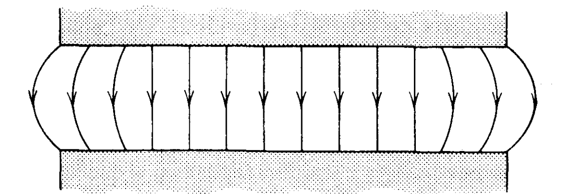


Figura 6-10 Apariencia general del campo en un capacitor de placas paralelas.

Posiblemente estos dos ejemplos sean suficiente prueba de que la mayoría de los problemas relacionados con el cálculo de la capacitancia por medio de (6-38) deben tener una gran simetría, de manera que **E** pueda encontrarse fácilmente, generalmente por medio de la ley de Gauss. Más adelante se podrán manejar problemas de mayor complicación cuando se hayan estudiado algunos métodos sistemáticos para encontrar el potencial ϕ en función de la posición.

Ejercicios

6-1 Supóngase que los dos conductores que se muestran en la figura 6-8 no están cargados originalmente. A continuación, el conductor interior de radio a recibe una carga Q. Encontrar la distribución final de carga estática. Encontrar el potencial ϕ para todos los valores de r y graficar el resultado.

6-2 Un cilindro conductor infinitamente largo, de radio a, posee una carga total q_l por unidad de longitud. Si ρ es la distancia perpendicular al eje del cilindro, demuestre que el potencial fuera del cilindro se puede expresar como

$$\phi(\rho) = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \qquad (\rho > a) \tag{6-42}$$

donde ρ_0 = const. ¿Cuál es el potencial dentro del cilindro? Verificar que (6-4) se satisface en este caso. ¿Se puede definir, en este caso, un valor apropiado y único para p_{11}?

6-3 El farad es, de hecho, una unidad de capacitancia enorme. Para ilustrar este hecho, considérese a la Tierra como una esfera conductora de radio 6.37×10^6 metros y encuéntrese su capacitancia.

6-4 Cuando se despejan las cargas del sistema de ecuaciones (6-13), el resultado es otro sistema de ecuaciones lineales de la forma Z donde las c_{ij} son combinaciones de los p_{ij}. Si

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\phi_j \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{6-43}$$

los índices son los mismos, las c_{ii} reciben el nombre de coeficientes de capacitancia, y las c_{ij}, siendo $i \neq j$, reciben el nombre de coeficientes de inducción. Encuentre estos coeficientes para el sistema de dos conductores que se describen en (6-24) y verifique que $c_{21} = c_{12}$. Demuestre que la capacitancia de este sistema está dada por

$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}} \tag{6-44}$$

6-5 Utilizando los resultados del ejercicio anterior, encontrar los coeficientes c_{ij} para el capacitor esférico de la figura 6-8, y verificar que dan el mismo resultado (6-37) para la capacitancia .

6-6 Un capacitor, C_1, recibe carga y como resultado aparece una diferencia de potencial, $\Delta\varphi$, entre sus placas. Otro capacitor, C_1, se encuentra sin carga. Una de las placas de C_2 se conecta a una de las placas de C_1 por medio de un conductor de capacitancia despreciable; las placas restantes se conectan de manera similar. Encontrar la carga en cada uno de los capacitores y la diferencia de potencial, $\Delta\varphi'$, entre las placas respectivas, para el estado de equilibrio resultante.

6-7 Las placas de dos capacitores, C_1 y C_2, se conectan por medio de conductores de capacitancia despreciable como se muestra en la figura 6-11*a*, es decir, se conectan en "paralelo". Si se aplica una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre las terminales T y T', demostrar que esta combinación es equivalente a un solo capacitor de capacitancia $C_p = C_1 - C_2$. De manera similar, demostrar que la capacitancia equivalente para una combinación en "serie", como la que se muestra en (*b*), puede encontrarse a partir de $1/C_s = (1/c_1) + (1/C_2)$.

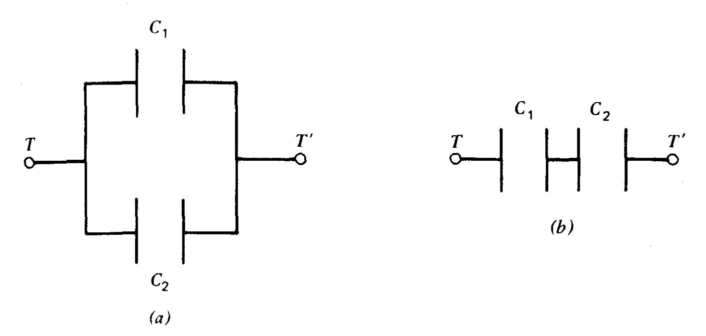


Figura 6-11 (*a*) Capacitores en paralelo. (*b*) Capacitores en serie.

6-8 Considérese el capacitor esférico de la figura 6-8 en el caso en que a y b son casi iguales. Encontrar una expresión aproximada para C y escribirla en forma tal que muestre explícitamente la diferencia $\delta = b - a$, donde $\delta \ll a$ o b. Interpretar el resultado con la ayuda de (6-41).

6-9 La diferencia de potencial, $\Delta\phi$, entre las placas de un capacitor esférico se mantiene constante. Demostrar que el campo eléctrico en la superficie de la esfera interior tendrá un valor mínimo si $a = \frac{1}{2}\, b$. Encontrar este valor mínimo de **E**.

6-10 Se fabrica un capacitor con dos conductores infinitamente largos de superficies

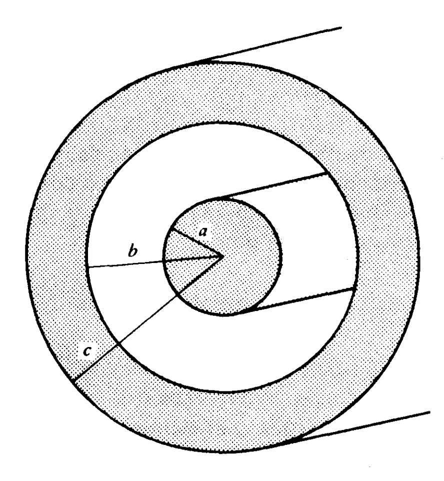


Figura 6-12 Capacitor de placas cilíndricas coaxiales.

cilíndricas coaxiales, como los que se muestran en la figura 6-12. Demostrar que la capacitancia de una sección de longitud L de este sistema está dada por

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} \tag{6-45}$$

¿Por qué el resultado no depende de c? ¿Se requiere que el conductor interior de radio a sea un cilindro sólido?

6-11 La figura 6-13 ilustra la suposición que se hizo acerca de **E** cuando se despreciaron los efectos de borde para un capacitor de placas paralelas, es decir, se hizo la suposición de que **E** cambiaba a cero abruptamente al llegar al borde. Demostrar que eso es imposible debido a que $\Delta \times \mathbf{E} = 0$, calculando la integral $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ sobre la trayectoria rectangular que se indica, la cual está parte en la región de $\mathbf{E} \neq 0$ y parte en la región de $\mathbf{E} = 0$, y demostrar entonces que el teorema de Stokes (1-67) induce a contradicción. Demostrar en forma cualitativa que se evitaría esta contradicción con las líneas de campo que se muestran en la figura 6-10.

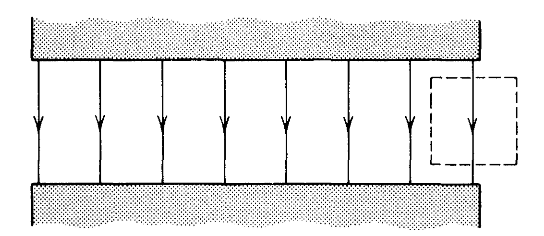


Figura 6-13 Campo eléctrico para el ejercicio 6-11.

6-12 Un conductor plano de grueso t y caras paralelas, cuya sección es $\geqslant A$ se inserta entre las placas del capacitor de la figura 6-9. Las caras del conductor plano son paralelas a las placas del capacitor original. Demostrar que la capacitancia aumenta en

$$\Delta C = \frac{\epsilon_0 t A}{d(d-t)}$$

¿Por qué es este resultado independiente de la distancia del conductor plano a cualquiera de las placas originales?

6-13 Supóngase que las placas de un capacitor de placas paralelas son rectangulares pero no exactamente paralelas. La separación en uno de los bordes es $d - a$ y en el otro $d + a$, siendo $a \ll d$. Demostrar que la capacitancia estará dada aproximadamente por

$$C \simeq \frac{\epsilon_0 A}{d}\left(1 + \frac{a^2}{3d^2}\right)$$

donde A es el área de una de las placas. (Sugerencia: recordar los resultados del ejercicio 6-7).

6-14 Dos esferas conductoras tienen sus centros separados por una distancia c. El radio de una de las esferas es a y el de la otra es b. Demostrar que cuando $c \gg a$ y $c \gg b$, la capacitancia del sistema será, aproximadamente,

$$C \simeq 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}\right)^{-1}$$

[Sugerencias: imaginar cargas iguales y opuestas sobre las esferas; ¿cómo se "vería" una de ellas desde la otra?; ¿seguiría (6-5) siendo aproximadamente correcta?]

6-15 Dos cilindros conductores infinitamente largos tienen sus ejes centrales paralelos y separados por una distancia c. El radio de uno de ellos es a y el del otro es b. Si $c \gg a$ y $c \gg b$, encontrar una expresión aproximada para la capacitancia de una sección de longitud L de este sistema.

Capítulo 7
Energía electrostática

En la Sección 5-4 se tocó ligeramente la cuestión de la energía en su relación con el potencial, considerando la energía potencial de una y de dos cargas puntuales. Aquí se extienden estas ideas a un sistema compuesto por un número arbitrario de cargas. Se calculará la energía potencial, U_e, de este sistema, es decir, la cantidad de trabajo reversible que debería realizarse por un agente externo para producir la configuración dada, en contra de las fuerzas electrostáticas conservativas entre las cargas. Después de eso, se podrá aplicar este concepto a una gran variedad de situaciones, y su utilidad resultará evidente.

7-1 Energía de un sistema de cargas

Anteriormente se encontró la expresión (5-49) para la energía potencial mutua de dos cargas puntuales. Si a estas cargas se les denomina q_i y q_j, en lugar de q y Q, la energía potencial de este par estará dada por

$$U_{eij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} \tag{7-1}$$

donde R_{ij} es la distancia que las separa y, como siempre. $R_{ij} = [r_i - r_j]$. Considérese ahora un número total, N, de cargas puntuales en una configuración dada de manera tal que cada carga así como la distancia entre ellas, sean conocidas. Numérense las cargas de alguna manera, de modo que i y j puedan tener, independientemente, los valores $1, 2, \ldots, N$. La energía potencial total del sistema, U_e, deberá ser, entonces, la suma de téminos como (7-1), donde dicha suma se toma sobre todos los *pares* de cargas que se puedan formar a partir de las N cargas:

$$U_e = \sum_{\text{todos los pares}} U_{eij} \tag{7-2}$$

En esta suma debe excluirse el caso en que $i = j$, es decir, en el que una carga dada se apareja consigo misma, debido a que esto implicaría que una carga ejerce una fuerza sobre sí misma, posibilidad que ya se excluyó en relación con (3-2).

Resulta conveniente expresar (7-2) en función de una doble suma sobre los índices i y j en la que cubra independientemente el rango completo de N valores. Sin embargo, al

hacer esto se estará tomando en cuenta cada pareja dos veces, y debe corregirse. Por ejemplo, considérese la contribución de la pareja q_3 y q_4 a (7-2), es decir, U_{e34}. En una forma doble como la que se pide, esta pareja ocurrirá una vez cuando $i = 3$ y $j = 4$ y otra vez cuando $i = 4$ y $j = 3$, dando un total de $U_{e34} + U_{e43} = 2U_{e34}$, de acuerdo con (7-1), dado que $R_{43} = R_{34}$. Así, se deberá dividir el resultado obtenido de la doble suma entre 2; de esta manera se puede escribir (7-2) como

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} U_{eij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} \tag{7-3}$$

que es el resultado que se desea para la energía electrostática.

En particular, si todas las posiciones de las cargas se dan en coordenadas rectangulares, se puede utilizar (1-14) para obtener una expresión explícita de U_e:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \right]^{1/2}} \tag{7-4}$$

Se puede escribir (7-3) de otra manera al reagrupar términos:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} \right) \tag{7-5}$$

Si ahora se recuerda (5-2), puede observarse que el término en paréntesis es justamente $\phi_i = \phi_i(\mathbf{r}_i)$, es decir, es el potencial escalar en la posición de q_i debido a todas las demás cargas. Por lo tanto, se puede escribir (7-5) como

$$U_e = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i(\mathbf{r}_i) \tag{7-6}$$

Cuando se maneja la energía potencial de un sistema, resulta natural preguntarse dónde se "almacena" o "localiza" la energía. En mecánica, es posible considerar a la energía potencial, $\frac{1}{2} kx^2$, de un resorte estirado, por ejemplo, como aquélla asociada con el cambio de las posiciones relativas de las porciones bajo esfuerzo del resorte, de manera que la energía potencial podría estar "almacenada" en las posiciones de estas partes del resorte. La forma (7-6) que se ha obtenido se presta para una interpretación similar. Dado que la contribución a la suma proveniente de una carga dada involucra solamente el valor del potencial escalar en la posición de esa carga, se puede, si se desea, asociar una porción de la energía potencial con esta carga y considerarla "localizada" ahí.

$$U_e = \tfrac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})\, d\tau \tag{7-7}$$

$$U_e = \tfrac{1}{2} \int_S \sigma(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})\, da \tag{7-8}$$

$$U_e = \tfrac{1}{2} \int_L \lambda(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})\, ds \tag{7-9}$$

Si las cargas se encuentran distribuidas en forma continua, se puede cambiar la suma de (7-6) por una integral, por medio de (2-14) y (2-16). De esta forma se obtienen las siguien-

tes expresiones para las energías debidas a distribuiciones volumétricas, superficiales o lineales de carga, respectivamente:
Las integrales deben tomarse sobre toda la región que contiene la carga del tipo particular de que se trate.

Si la distribución de cargas es tal que consista de dos o más de las posibilidades consideradas, las energía total de este sistema será la suma de las cantidades obtenidas de (7-6) y (7-7) hasta (7-9); inclusive para cada una de las partes, el potencial ϕ debe encontrarse como el resultante de todas las cargas de cada una de las distribuciones.

En realidad, la región de integración de las integrales anteriores puede extenderse del volumen que realmente ocupan las cargas a todo el espacio, dado que en las regiones donde no hay carga $\rho = 0$, y estas regiones no contribuirán en nada a (7-7). Por tanto, puede igualmente escribirse (7-7) como

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})\,d\tau \tag{7-10}$$

y (7-8) y (7-9) tendrán expresiones similares.

Ejemplo

Distribución esférica y uniforme de carga. Como una ilustración del uso de (7-7), considérese el caso de una esfera de radio a que posee carga a densidad volumétrica contante, ρ. Este ejemplo ya se vio en la sección 5-2 y el potencial ϕ fue dado por (5-22) y (5(-23). Sin embargo, de acuerdo con (7-7), únicamente se requiere del potencial dentro de la esfera, que está dado por (5-23) como

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3a^2 - r^2) \tag{7-11}$$

Al sustituirlo en (7-7), usar (1-99) y sacar de la integral todas las constantes (incluyendo a ρ), se obtiene

$$U_e = \frac{\rho^2}{12\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(3a^2 - r^2)r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \tag{7-12}$$

La integral sobre los ángulos da 4 π, de manera que

$$U_e = \frac{\pi\rho^2}{3\epsilon_0}\int_0^{a}(3a^2r^2 - r^4)dr = \frac{4\pi\rho^2a^5}{15\epsilon_0} \tag{7-13}$$

Al expresar esto en función de la carga total de la esfera, usando $Q = (4\pi a^3/3)\rho$, se obtiene

$$U_e = \frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right) \tag{7-14}$$

que es menor que la energía de dos cargas puntuales Q que se encuentran separadas por una distancia igual al radio de la esfera.

7-2 Energía de un sistema de conductores

Debido a sus propiedades especiales, algunos de los resultados obtenidos pueden escribirse de manera simplificada en el caso de los conductores. Como se vio en la sección 6-1, la carga sobre un conductor queda localizada completamente en su superficie. Además, de acuerdo con (6-2), el potencial es constante sobre su superficie, de manera que ϕ puede sa

carse de la integral de (7-8). Al aplicarse (7-8) al conductor i del sistema de n que se consideró en la sección 6-2, se encuentra que su energía está dada por

$$U_{ei} = \tfrac{1}{2}\phi_i \int_{S_i} \sigma_i \, da_i = \tfrac{1}{2} Q_i \phi_i \tag{7-15}$$

donde Q_i es su carga total dada por (6-16). La energía total del sistema estará dada por la suma de términos similares a (7-15), así que

$$U_e = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Q_i \phi_i \tag{7-16}$$

La energía también puede expresarse completamente en función de las cargas si se utiliza (6-11):

$$U_e = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} Q_i Q_j \tag{7-17}$$

En el caso especial de que únicamente existan dos conductores, usando (6-25).

$$U_e = \tfrac{1}{2} p_{11} Q_1^2 + p_{12} Q_1 Q_2 + \tfrac{1}{2} p_{22} Q_2^2 \tag{7-18}$$

Estos resultados pueden escribirse de una manera todavía más compacta y útil en el caso donde el sistema pueda describirse en función de un solo parámetro, es decir, la capacitancia C.

Ejemplo

Conductor aislado. En este caso, (7-16) se reduce a un solo término: $\frac{1}{2} Q\phi$; si también se utiza (6-22), se puede escribir

$$U_e = \tfrac{1}{2} Q\phi = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2} C\phi^2 \tag{7-19}$$

Aplicando esto a una esfera conductora y usando (6-23), se encuentra que su energía es

$$U_e = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}\right) \tag{7-20}$$

que viene a ser menor que la energía dada por (7-14) para el caso en que la misma carga se encuentra distribuida en todo el volumen de la esfera en lugar de estar limitada a su superficie, como es el caso de (7-20).

Ejemplo

Capacitor. Aquí se tienen cargas iguales y opuestas en las placas. Así, si $Q_1 = Q$ y $Q_2 = -Q$ en (7-18), al utilizar (6-29) y (6-28) se encuentra una expresión general para la energía de un capacitor, que es

$$U_e = \tfrac{1}{2} Q\Delta\phi = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2} C(\Delta\phi)^2 \tag{7-21}$$

lo cual resulta muy similar a (7-19) para un solo conductor. Este resultado será muy útil más adelante.

7-3 Energía en función del campo eléctrico

Como se puntualizó muy brevemente en el párrafo que siguió a (7-6), la expresión para la energía se presta a una interpretación según la cual la energía del sistema se encuentra directamente asociada con las cargas del sistema y sus posiciones. Este punto de vista es naturalmente consistente con la noción de acción a distancia de la ley de Coulomb y su énfasis sobre las cargas y sus posiciones relativas. Por otro lado, si el interés primario se centra en la descripción de los fenómenos en función de los campos, es natural que se quiera hacer lo mismo con la energía. Resulta apropiado utilizar (17-10) como punto de partida.

Se puede escribir $\rho = \epsilon_0 \; \nabla.\mathbf{E}$, por (4-10), de manera que (7-10) puede también escribirse como

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int \phi(\nabla \cdot \mathbf{E}) d\tau \tag{7-22}$$

El integrando puede modificarse por medio de (1-117), (5-3) y (1-17):

$$\phi(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \phi) + \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) = \mathbf{E}^2 + \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) \tag{7-23}$$

Al sustituir esto en (7-22) se obtiene

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 d\tau + \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) d\tau \tag{7-24}$$

y usando el teorema de la divergencia (1-59) para escribir la segunda integral como una integral de superficie, el resultado final es

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}^2 d\tau + \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S (\phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} \tag{7-25}$$

En este punto resulta conveniente hacer una pausa y considerar el hecho de que la integral inicial en (7-10) debe tomarse sobre todo el espacio; para poder hacerlo, lo mejor es considerar V en (7-25) como un volumen extremadamente grande, de modo que S sea su superficie limitante, también extremadamente grande. Después puede hacerse que V tienda a infinito; así, la superficie S deberá también ser infinita. Supóngase que la distribución de cargas *siempre* queda confinada a un volumen finito, el cual puede ser, sin embargo, muy grande. Puede así elegirse a V lo suficientemente grande para que pueda englobar a todas las cargas. A medida que V crece, S se aleja tanto que la distribución de carga parecerá estar confinada a un volumen muy pequeño, de modo que desde cualquier punto de S la carga total parecerá una carga puntual a una distancia R Entonces, en lo que toca a la integral de (7-25), a medida que $R \to \infty$, de acuerdo con (5-12) y (5-13) se puede observar que

$$\phi \sim \frac{1}{R}, \quad |\mathbf{E}| \sim \frac{1}{R^2}, \quad (\phi \mathbf{E}) \sim \frac{1}{R^3} \tag{7-26}$$

de forma que la magnitud del integrando disminuye según R^3. La superficie de integración aumenta, pero será proporcinal a R^2; por lo tanto, para una R muy grande,

$$\oint_S (\phi \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} \sim \frac{1}{R^3} \cdot R^2 \sim \frac{1}{R} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7-27}$$

de manera que cuando V en (7-25) crece lo suficiente para incluir a todo el espacio, la integral de superficie se anula, y la expresión de la energía queda como

$$U_e = \int_{\text{todo el espacio}} \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \, d\tau \tag{7-28}$$

donde $E^2 = E. E.$ Por lo tanto, se ha logrado expresar la energía completamente en función del campo eléctrico. [Aunque las cargas no aparezcan en forma explícita en (7-28), no han desaparecido, desde luego, debido a que son las fuentes mismas del campo eléctrico.]

La *forma* de (7-28) como integral de volumen, en la que regiones donde $\mathbf{E} \neq 0$ contribuyen a la integral mientras que aquéllas para las que $E = 0$ no contribuyen, se presta a una *interpretación* muy sencilla y natural: la energía electrostática está distribuída en forma continua a través del espacio con una *densidad de energía, u_e*, dada por

$$u_e = \tfrac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \tag{7-29}$$

de manera que la energía total puede escribirse

$$U_e = \int_{\text{todo el espacio}} u_e \, d\tau \tag{7-30}$$

Las unidades de u_e son joule/ metro^3.

Resulta evidente que esta imterpretación es posible pero no necesaria, así como (7-29) no es la única posibilidad. Por ejemplo, se podría sumar a u_e *cualquier* cantidad x cuya integral de volumen sobre todo el espacio sea igual a cero, sin estar en desacuerdo con (7-28). Sin embargo, (7-29) es sencilla, posible y muy atractiva desde el punto de vista de expresar las cosas en función de campo. El punto de vista aceptado es tomar a (7-29) como correcta; se podrá justificar esta interpretación en mayor detalle más adelante y, de hecho, (7-29) resultará útil y exacta aún en campos que varían con el tiempo.

La energía calculada a partir de (7-28) deberá estar, desde luego, en concordancia con la obtenida por (7-6) o sus variantes. A continuación se verifica que así sucede en un caso particular para el que ya se han encontrado anteriormente E y U_e.

Ejemplo

Esfera conductora aislada. En (6-5) se encontró ya la solución para este caso en función del potencial ϕ. Así, el campo eléctrico producido por este sitema es

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Q\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad (r \geqslant a) \\ \mathbf{E} &= 0 \qquad (r < a) \end{aligned} \tag{7-31}$$

de manera que no existe energía contenida dentro del volumen de la esfera, de acuerdo con (7-29); la región de integración de (7-30) se reduce a todo el espacio *fuera* de la esfera. Al utilizar (7-31) en (7-29), la densidad de energía u_e resulta ser

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \qquad (r > a) \\ u_e &= 0 \qquad (r < a) \end{aligned} \tag{7-32}$$

y en esta manera, por medio de (1-99), (7-30) queda como

$$U_e = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty}\frac{1}{r^4}\cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \tag{7-33}$$

lo que está en completa concordancia con (7-20).

Una aplicación muy útil de (7-28) es la de calcular la capacitancia. Si se ha encontrado E por otros métodos, se puede entonces evaluar (7-28). Se cabe que en tal caso Ue será proporcional a Q^2 ó ϕ^2 ó $(\Delta\phi)^2$, dependiendo de la cantidad dada, de modo que cuando U_e se encuentra de esta manera, puede usarse inmediatamente en (7-19) o en (7-21) para evaluar C. Esto resulta un procedimiento mucho más conveniente que el uso de (6-38).

Ejemplo

Capacitor de placas paralelas. Este sistema se ilustra en la figura 6-9; se encontró que el campo tenía una magnitud constante $E = \sigma/\epsilon_0$ entre las placas, y cero en cualquier otro punto. Por lo tanto,

$$u_e = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A^2} \tag{7-34}$$

y es constante en el volumen Ad entre las placas y cero en cualquier otra parte. Al sustituir esto en (7-30) se obtiene.

$$U_e = \int u_e\, d\tau = u_e(\text{volumen}) = \left(\frac{Q^2}{2\epsilon_0 A^2}\right)(Ad) = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C} \tag{7-35}$$

lo que lleva otra vez al valor de C dado en (6-41).

7-4 Fuerzas electrostáticas sobre conductores

En general, dos conductores cargados ejercerán fuerzas el uno sobre el otro y, en principio, estas fuerzas pueden calcularse por medio de la ley de Coulomb. A menudo resulta deseable evaluar estas fuerzas de otra manera. Una situación similar suele encontrarse en mecánica, cuando resulta conveniente calcular las componentes de una fuerza como razones espaciales de cambio de la energía potencial. Además, las consideraciones energéticas proporcionan otro punto de vista y pueden, por tanto, auxiliar en su comprensión total.

Se desea desarrollar un método similar para las fuerzas electrostáticas; sin embargo, esta sección se limitará a los conductores. Más aún, no se hará una generalización completa, sino que se considerará el campo particular del capacitor de placas paralelas. Esto será suficiente para ilustrar todas las características generales del problema, con base en un sistema simple y de fácil visualización. Sin embargo, como se verá lo obtenido se podrá enunciar de tal manera que sea aplicable en forma general.

En la figura 7-1 se muestra un capacitor de placas paralelas de capacitancia C. Por medio del interruptor S, las terminales T y T' pueden conectarse a una batería, B, que producirá una diferencia de potencial $A\phi$ entre las placas, cargando de esta manera el capacitor al valor $Q = C\,\Delta\,\phi$. Debido a sus cargas opuestas las placas se atraerán entre sí,

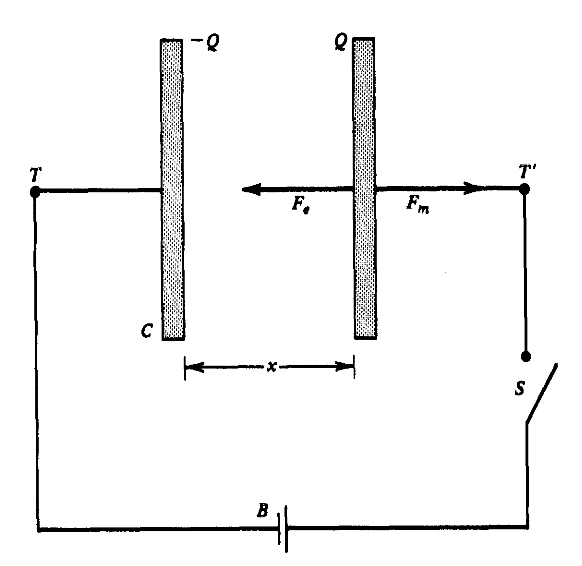


Figura 7-1 Fuerzas sobre una placa de un capacitor de placas paralelas.

de modo que existirá una fuerza electrostática, F_e, sobre la palca positiva en la dirección señalada. Para poder mantener el sistema en equilibrio, F_e debe balancearse por medio de una fuerza mecánica, F_m, igual y opuesta. El propósito es encontrar estas fuerzas a partir de consideraciones energéticas.

Sea x la separación entre las placas. Imagínese ahora que esta separación cambie muy lentamente en una cantidad dx. En estas condiciones, el trabajo realizado por la fuerza mecánica sobre el sistema estará dado por $F_m dx$ y, ya que éste será trabajo reversible, como se vio en la sección 5-4, será igual al cambio en la energía total dU_t de todo el sistema, es decir, $dU_t = F_m dx$. Pero dado que la aceleración es siempre cero, la placa del capacitor permanecerá en equilibrio, o diferirá del equilibrio sólo infinitesimalmente, de manera que se seguirá teniendo $F_e = \quad F_m$; entonces

$$F_e = -\frac{dU_t}{dx} \tag{7-36}$$

Se ha escrito U_t porque el capacitor no es todo el sistema en sí mismo; en general, la batería debe incluirse porque su energía también puede cambiar como resultado del trabajo realizado por F_m, dependiendo de si el interruptor S se encuentra abierto o cerrado. En otras palabras, el capacitor no es necesariamente un sistema aislado. En este sentido, el problema es muy similar al que se encuentra muy a menudo en termodinámica, en la que un sistema termodinámico determinado se encuentra en contacto con fuentes de calor o trabajo. En este caso el problema es tratar de enunciar el criterio termodinámico del equilibrio, que se refiere a sistemas *aislados*, en términos de una función que es característica únicamente del sistema no aislado, es decir, en términos de la función característica solamente parte de todo el sistema, pero de aquella parte que interesa directamente. En el caso presente, se desea escribir (7-36) en función del capacitor únicamente, si esto es posible. Existen dos posibilidades a considerar.

1. Carga constante. Supóngase aquí que el interruptor S estaba cerrado hasta que C se cargó y después se abrió y se mantuvo abierto. Esto hace que la batería B se encuentre efectivamente separada del sistema total, ya que no se efectará por el desplazamiento dx;

en otras palabras, el capacitor se encuentra aislado. En este caso, $dU_t = dU_e$, donde U_e es la energía del capacitor, por lo que (7-36) queda

$$F_e = -\left(\frac{dU_e}{dx}\right)_Q \qquad (Q = \text{const.}) \tag{7-37}$$

De acuerdo con (7-21), $U_e = Q^2/2c$, pero dado que C es una función de la separación de las placas, $C = C(x)$, y, por lo tanto,

$$dU_e = -\frac{Q^2}{2C^2}\, dC \tag{7-38}$$

lo que hace que (7-37) quede como

$$F_e = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx} \tag{7-39}$$

[En este proceso la diferencia de potencial entre las placas debe cambiar para que $Q = C\Delta\phi$ permanezca constante. Dado que esto lleva a $dQ = 0 = (dC)(\Delta\phi) + Cd(\Delta\phi)$, se encuentra que

$$-\frac{d(\Delta\phi)}{\Delta\phi} = \frac{dC}{C} \tag{7-40}$$

lo que indica que el cambio fraccional en la diferencia de potenciales es igual y opuesto al de la capacitancia; de hecho, dado que C disminuye a medida que x aumenta, según se aprecia por (6-41) (remplazando d con x), $\Delta\phi$ aumentará a medida que x aumenta. La razón para esto es que si Q = const., σ también será constante, así como $E = \sigma/\epsilon_0$; entonces, si la misma E se aplica sobre una separación mayor, $\Delta\phi = \int_{-}^{+} E ds = Ex$ también será mayor.] Antes de ver (7-39) en mayor detalle, considérese la siguiente posibilidad.

2. Diferencia de potencial constante. Esto ocurre cuando se mantiene el interruptor S cerrado, de manera que $\Delta\phi$ = const. La batería es ahora parte del sistema completo y el capacitor ya no está aislado. En este caso, el cambio total de energía será la suma del cambio de energía en el capacitor, dU_e, y del cambio de la batería, dU_B, así que

$$dU_t = dU_e + dU_B \tag{7-41}$$

Aquí resulta conveniente escribir U_e en forma $U_e = \frac{1}{2}C(\Delta\phi)^2$, que también está dada por (7-21). Entonces se tiene

$$dU_e = \tfrac{1}{2}(dC)(\Delta\phi)^2 \tag{7-42}$$

[Si dx es positivo, dC será negativo como ya se vio arriba, de modo que la energía del capacitor U_e disminuirá bajo estas condiciones, en contraste con su aumento en el caso de carga constante descrito en (7-38).]

Ya que $Q = C\,\Delta\phi$, la carga del capacitor cambiará y este cambio está dada por

$$dQ = (dC)(\Delta\phi) \tag{7-43}$$

A medida que estas cargas pasan lentamente a través de la diferencia de potencial de la batería, se realiza un trabajo sobre ellas y la energía de la batería cambia. Ya se encontró en

(5-46) que este trabajo es igual a la carga multiplicada por la diferencia de potencial, y dado que cualquier trabajo realizado por la batería representa una disminución de su energía, se obtiene

$$dU_B = -dW = -(dQ)(\Delta\phi) = -(dC)(\Delta\phi)^2 = -2dU_e \qquad (7\text{-}44)$$

usando (7-43) y (7-42). Así, el cambio de energía en la batería siempre es de signo opuesto al del cambio en el capacitor y de doble magnitud. [Si dx es positivo, se observa arriba que dU_e será negativo, y en esta forma dU_B será positivo, tal como está dado por (7-44); es decir, la energía de la batería aumentará. La razón es que dQ también será negativo debido a (7-43), ya que dC es negativo; a medida que estas cargas regresan a través de la batería, le regresarán el trabajo reversible que ésta originalmente ejerció sobre ellas durante el proceso original de carga.]

Cuando se sutituye (7-44) en (7-41), se encuentra que $dU_t = -dU_e$, de modo que en este caso (7-36) queda como

$$F_e = +\left(\frac{dU_e}{dx}\right)_{\Delta\phi} \qquad (\Delta\phi = \text{const.}) \qquad (7\text{-}45)$$

que, al combinarse con (7-42) y (6-28), da

$$F_e = \tfrac{1}{2}(\Delta\phi)^2 \frac{dC}{dx} = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx} \qquad (7\text{-}46)$$

lo cual es, *como cabría esperarse,* exactamente lo mismo que (7-39).

Resulta conveniente recalcar una vez más que la ecuación básica para el cálculo de la fuerza es (7-36) y que la discrepancia aparente de signos entre (7-37) y (7-45) surge del hecho de que estas expresiones se refieren a *procesos diferentes.* En el caso de (7-37), el capacitor fue un sistema aislado y sufrió el único cambio de energía. En el caso de (7-45), el capacitor ya no estaba aislado pero, aun así, fue posible expresar la fuerza *únicamente* en función de la energía del capacitor. Esto presenta una analogía muy fuerte con la situación termodinámica en la que se puede ir de la caracterización del equilibrio de un sistema de interés, por medio de su energía interna, al uso de su función de Helmholtz o de Gibbs para los casos en los que está en contacto con fuentes de calor o de trabajo. Esto puede hacerse utilizando únicamente las propiedades generalizadas de estas fuentes como sistemas muy grandes no caracterizados. Nótese que aquí no se necesitó conocer ninguna de las funciones internas de la batería en detalle; fue suficiente saber que era un mecanismo de alguna manera capaz de realizar trabajo reversible sobre las cargas.

De hecho, cuando se revisa la argumentación que condujo a (7-39) y (7-46), se puede observar que, a excepción de las indicaciones ilustrativas que se hicieron entre paréntesis, realmente no se utilizó ningún resultado detallado que requiriera en forma específica que el sistema consistiese en un capacitor de placas paralelas, aparte de que el desplazamiento se consideró paralelo a la fuerza mecánica para que el elemento de trabajo así pudiera escribirse como el producto simple $F_m dx$. Pero ahora, sin embargo, se hace necesario revisar estos detalles.

Si x es la separación entre las placas, $C = \epsilon_0 A/x$, de acuerdo con (6-41). Entonces, $dC/dx = -\epsilon_0 A/x^2 = -C/x$, por lo que (7-39) queda como

$$F_e = -\frac{Q^2}{2Cx} = -\frac{U_e}{x} \qquad (7\text{-}47)$$

al usar (7-21) Esto demuestra que F_e es negativa, de acuerdo con el hecho de que las placas con cargas opuestas en la figura 7-1 se atraen entre sí. Ya se encontró en (7-35) que U_e

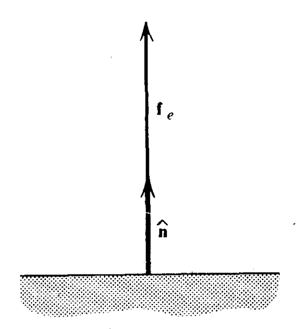


Figura 7-2 Fuerza por unidad de área sobre la superficie de un conductor

puede escribirse como el producto de la densidad de energía u_e y el volumen Ax entre las placas, de manera que $U_e = u_e Ax$; sustituyendo esto en (7-47) se obtiene que

$$F_e = -u_e A \tag{7-48}$$

Dado que la fuerza total es proporcional al área, resulta conveniente introducir la fuerza por unidad de área, f_e, definiéndola como la magnitud de dicha relación; así se tiene

$$f_e = \frac{|F_e|}{A} = u_e \tag{7-49}$$

De la figura 7-1 se observa que la dirección de esta fuerza es hacia afuera de la superficie conductora, de manera que puede escribirse la fuerza por unidad de área como

$$\mathbf{f}_e = f_e \hat{\mathbf{n}} = u_e \hat{\mathbf{n}} \tag{7-50}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal exterior de la superficie conductora, como se indica en la figura 7-2. De esta manera se ha encontrado que existe una tensión o fuerza hacia afuera por unidad de área sobre la superficie conductora, que es numéricamente igual al valor de la densidad de energía en la superficie.

Aunque este resultado se obtuvo al considerar el caso específico de un capacitor de placas paralelas, se puede demostrar ahora que posee validez general. Considérese una porción de la superficie conductora que se muestra en la figura 7-3. Dentro del conductor, donde $\mathbf{E}$ es igual a cero, la densidad de energía u_e es también cero. *Imagínese* ahora que una porción pequeña de la superficie conductora, de área Δa, recibe un pequeño desplazamiento Δx perpendicular a la superficie. El volumen de la región donde $u_e = 0$ ha sido aumentado por $\Delta a \, \Delta x$, de tal forma que

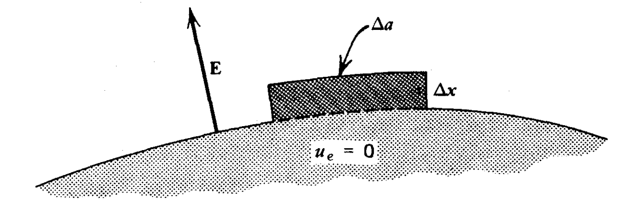


Figura 7-3 Cálculo de la fuerza sobre la superficie de un conductor. Un elemento de superficie sufre un desplazamiento imaginario Δx.

la energía total habrá cambiado por la cantidad ΔU_e, donde

$$\Delta U_e = -u_e \Delta a \Delta x \tag{7-51}$$

la que es negativa si Δx es positiva. Este cambio de energía corresponde a una fuerza, ΔF_e, sobre este elemento de superficie dada por $\Delta F_e = -\Delta U_e / \Delta x = u_e \Delta a$. Dado que ΔF_e es proporcional al área Δa, se puede definir otra vez una fuerza por unidad de área, $f_e = \Delta F_e / \Delta a$, que otra vez resulta ser igual a u_e, en concordancia con (7-49). Para determinar su dirección, recuérdese que los estados de equilibrio estable de la mecánica, para sistemas generales, corresponden a configuraciones que dan un valor mínimo de la energía potencial, es decir, la tendencia natural de los sistemas es "tratar" de disminuir su energía potencial. Como ya se vio antes, un desplazamiento positivo Δx hará que la energía U_e disminuya; dado que esto es lo que el sistema "quiere" hacer, dicha condición determinará que la dirección de la fuerza resulte hacia afuera del conductor. En otras palabras, se vuelve a llegar a (7-50), que da la fuerza electrostática por unidad de área siempre como una tensión, es decir, en la dirección de la normal exterior $\hat{\mathbf{n}}$. Si las fuerzas cohesivas internas del material conductor no son lo suficientemente grandes para contrarrestar esta fuerza electrostática, el conductor se deformará. Esta deformación continuará hasta que las fuerzas elásticas que se producen sean lo suficientemente grandes para mantener a las superficies en una nueva posición de equilibrio.

Al combinar (7-49) con (7-29) y (6-4), se puede expresar f_e de otra manera como

$$f_e = u_e = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \tfrac{1}{2}\sigma E \tag{7-52}$$

donde E y σ deben evaluarse en el punto particular de la superficie que se esté considerando.

Multiplicando (7-50) por da se obtiene la fuerza sobre dicho elemento como $f_e d_a = f_e \hat{\mathbf{n}} da = f_e d\mathbf{a}$, de manera que la fuerza total sobre toda la superficie S de un conductor queda dada por

$$\mathbf{F}_{e,\ \text{total}} = \int_S f_e \, d\mathbf{a} = \frac{1}{2\epsilon_0}\int_S \sigma^2 \, d\mathbf{a} \tag{7-53}$$

expresión que puede usarse una vez que se haya determinado la densidad superficial de carga en función de la posición.

Advertencias: (1) *no* se comenta el error común de pensar que la fuerza por unidad de área es simplemente σE en lugar de $\frac{1}{2}\sigma E$, como se expresa correctamente en (7-52); (2) *no* se olvide que (7-53) es una ecuación *vectorial.* [Por ejemplo: ¿cuál es la fuerza total sobre la esfera conductora cuyo campo eléctrico está dado por (7-31)?]

Ejercicios

7-1 Considérese un cuadro de lado a. Empezando en uno de los vértices y siguiendo en sentido contrario a las manecillas del reloj, se coloca una carga puntual q en el primer vértice, $2q$ en el siguiente, después $3q$ y finalmente $-4q$. Encontrar U_e para esta distribución de carga.

7-2 Una carga puntual, q, se coloca en cada uno de los vértices de un cubo de lado a. Encontrar la energía electrostática en este sistema de cargas.

7-3 La expresión para la energía de un capacitor dada por (7-21) también puede obtenerse de la siguiente manera. Durante el proceso de carga, considérese una etapa intermedia cuan-

do la carga es q, siendo $0 < q < Q$. La diferencia de potencial será q/C. Encontrar el trabajo requerido para aumentar la carga en dq. Sumar entonces todos estos incrementos de trabajo desde el estado inicial sin carga hasta el estado final de carga completa, para obtener así, (7-21).

7-4 Encontrar la energía de la distribución de carga del ejercicio 5-9 por medio de (7-10). ¿A qué se debería reducir el resultado cuando $n = 0$? ¿Ocurre esto?

7-5 Encontrar la energía de la distribución de carga del ejercicio 5-17 por medio de (7-8).

7-6 Encontrar la energía de una sección de longitud L de los cilindros coaxiales de la figura 6-12, cuando se utilizan como un capacitor con carga q_1 por unidad de longitud, por medio de (7-8). Utilizar estos resultados para verificar de nuevo el valor de C dado en (6-45).

7-7 Encontrar la energía total de gravitación de la Tierra tratándola como una esfera homogénea de masa 5.98×10^{24} kilogramos y radio de 6.37×10^6 metros. [La constante de gravitación es $G = 6.67 \times 10^{-11}$ newton-metro^2/kilogramo^2.] Si una distribución esférica y uniforme de carga, cuyo valor total fuese igual a la mgnitud de la carga electrónica (1.60×10^{-19} coulombs), tuviera la misma energía, ¿cuál sería su radio?

7-8 Expresar la energía de un sistema de n conductores en función del potencial y de los coeficientes de capacitancia y de inducción que se definieron en (6-43). Demostrar que cuando sólo hay dos conductores, la energía puede escribirse como

$$U_e = \tfrac{1}{2}c_{11}\phi_1^2 + c_{12}\phi_1\phi_2 + \tfrac{1}{2}c_{22}\phi_2^2 \tag{7-54}$$

y que cuando estos dos conductores se utilizan como un capacitor, la energía vuelve a ser la misma dada por (7-21) y (6-44).

7-9 Demostrar que cuando (7-28) se aplica al caso de una distribución esférica y uniforme de carga, el resultado es de nuevo (7-14). ¿Qué fracción de la energía total se considera ahora fuera de la esfera?

7-10 Una carga $-Q$ se encuentra en la esfera interior de la figura 6-8 y una carga Q en la esfera exterior. Encontrar la energía de este sistema por medio de (7-28) y así demostrar que la capacitancia es (6-37).

7-11 Los conductores cilíndricos coaxiales de la figura 6-12 se utilizan como un capacitor con cargas por unidad de longitud q_1 y $-q_1$. Encontrar la energía de una sección de longitud L de este sistema, por medio de (7-28) y así demostrar que la capacitancia es (6-45).

7-12 Utilizar (7-28) para encontrar la energía de la distribución de carga del ejercicio 5-9 y verificar que se obtiene el mismo resultado que para el ejercicio 7-4, y que la respuesta se reduce al resultado correcto cuando $n = 0$. ¿Qué fracción de la energía total se encuentra afuera de la esfera?

7-13 Considérense los dos conductores de la figura 6-8. Existe una carga total neta Q_1 sobre el conductor interno y una carga total neta Q_2 sobre el conductor externo, siendo $Q_1 \neq Q_2$. Demostrar que la energía total de este sistema está dada por

$$U_e = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)Q_1^2 + \frac{2Q_1Q_2}{c} + \frac{Q_2^2}{c}\right]$$

(Demostrar que esto se reduce al resultado esperado cuando $Q_2 = -Q_1$.) Resolver este ejercicio de tres manera diferentes.

7-14 El capacitor de placas paralelas tiene placas de área A. La placa inferior se encuentra rígidamente fija sobre una mesa. La placa superior cuelga de un resorte de constante k cuyo extremo superior se encuentra rígidamente fijo. Las placas se encuentran originalmente sin carga. Cuando el capacitor se carga hasta una carga final Q y $-Q$, demostrar que la distancia que la distancia entre las placas cambia por una cantidad $Q^2/2k\epsilon_0 A$. ¿El resorte queda estirado o comprimido?

7-15 Una placa metálica cuadrada de 20 cm de lado se cuelga del brazo de una balanza de manera tal que queda paralela a otra placa horizontalmente fija, de las mismas dimensiones.

La distancia de separación entre ambas placas es de 1.5 mm. Se aplica una diferencia de potencial de 150 volts entre las placas. ¿Qué cantidad adicional de masa debe colocarse en el otro lado de la balanza para que la placa colgante mantenga su posición original?

7-16 Se utiliza una batería para cargar un capacitor de placas paralelas a una diferencia de potencial $\Delta\phi$, y después se desconecta. La separación entre las placas se incrementa de d a αd, donde α es una constante >1. ¿Cual es la relación de la nueva energía a la energía original? ¿Se aumenta o se disminuye la energía? ¿De dónde procede o a dónde va este cambio de energía? Verificar la respuesta cuantitativamente.

7-17 Existe una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre los conductores coaxiales de la figura 6-12. Encontrar la magnitud de la fuerza por unidad de área sobre la superficie del cilindro interior. ¿Cuál es su dirección? ¿Cuál es la fuerza total por unidad de longitud que actúa sobre él?

7-18 Un capacitor de placas paralelas está formado por el fondo metálico y el pistón móvil, también metálico, de un cilindro de paredes no conductoras. El cilindro es hermético y se mantiene a temperatura constante. Cuando el capacitor se encuentra descargado, la separación entre las placas es d_0, y la presión en el interior del cilindro es p_0. Cuando se aplica una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre las placas, demostrar que, si f es la disminución fraccional en la separación de las placas ($f>0$), f puede encontrarse por medio de

$$f(1-f)=\frac{\epsilon_0}{2p_0}\left(\frac{\Delta\phi}{d_0}\right)^2$$

7-19 Supóngase que los dos conductores cilíndricos coaxiales de la figura 6-12 se mantienen a una diferencia de potencial constante, $\Delta\phi$. Los cilindros son muy largos. Imagínese ahora que el conductor interior recibe un desplazamiento pequeño Δx en la dirección del eje común. Demostrar que el conductor interior será atraído a su posición original por una fuerza que es aproximadamente

$$F\simeq\frac{\pi\epsilon_0(\Delta\phi)^2}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$$

Capítulo 8 Multipolos eléctricos

En principio, la ecuación 5-2 viene a ser un método para calcular el potencial debido a la distribución de cargas en cualquier punto de campo que se elija. Supóngase que las cargas se encuentran encerradas en un volumen finito de tamaño razonable. El volumen no necesita ser de una forma determinada sino que, de hecho, puede ser muy irregular. En las proximidades de un volumen tal, es de esperarse que los valores del potencial en varios puntos sean muy dependientes de los detalles de la distribución de la carga. Sin embargo, a medida que la distancia a este volumen se incrementa, parece claro que los detalles finos de la distribución de las cargas tienen menor importancia cada vez, siendo posible determinar el potencial principalmente de acuerdo con las variaciones a gran escala en las posiciones y magnitudes de las cargas. El caso extremo ocurre cuando el punto de campo se considera tan lejano a la distribución de carga, que ésta se comporta como si fuera una sola carga puntual; ya se vio este hecho en relación con (7-26) y (7-27). Lo que se desea ahora es conocer esta situación en mayor detalle, a fin de concluir que el efecto de la distribución de carga puede caracterizarse por un conjunto de cantidades que dependen de algunos detalles de la distribución, de manera similar a como algunas cantidades mecánicas, tales como la magnitud de la masa total y el momento de inercia de un conjunto de masas puntuales, dependen de diversas características de la distribución de masa. Estas cantidades reciben el nombre de *multipolos eléctricos,* y ya se les definirá en forma específica. Estas consideraciones también resultarán de gran utilidad para la descripción de los efectos de la materia en la electrostática, ya que, para los propósitos que se persiguen aquí, se considerará que un trozo de materia es esencialmente un conjunto de cargas eléctricas con distribución dada.

8-1 Desarrollo multipolar del potencial escalar

La figura 8-1 muestra la situación general. Se tiene un sistema de N cargas puntuales, q_1, $q_2, \ldots, q_i, \ldots, q_N$, localizadas en un volumen V'. Se toma como origen O de coordenadas un punto arbitrario pero conveniente, que se encuentre ya sea en V o cerca de éste. Los vectores de posición de las cargas son $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_N$. Se desea obtener el potencial, ϕ, en el punto de campo P, cuyo vector de posición con respecto a este mismo origen es $\mathbf{r}$;

así, P se encuentra en la dirección $\hat{\mathbf{r}}$ a una distancia r de 0. Este potencial está dado por (5-2) como

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \tag{8-1}$$

donde $R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$. Si se introduce el ángulo θ_i entre las direcciones de $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}$, y se utiliza la

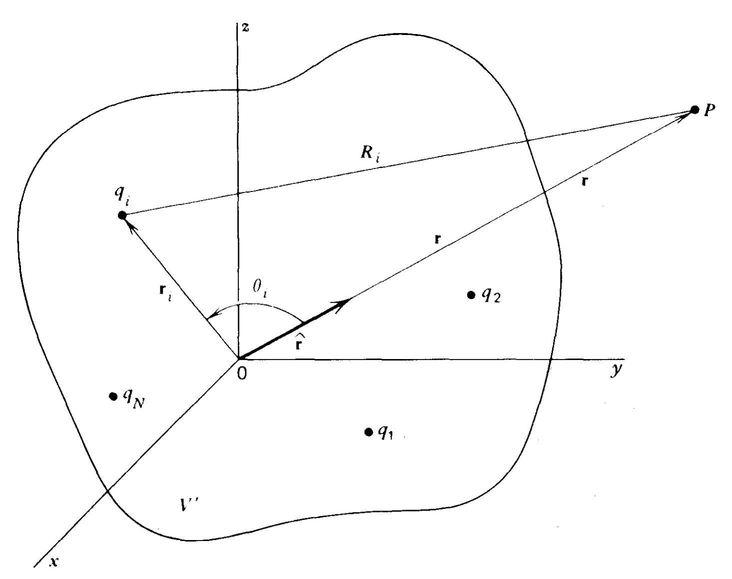


Figura 8-1 Geometría para el cálculo del potencial debido a un sistema de cargas puntuales.

ley de los cosenos, con ayuda de la figura puede observarse que

$$R_i = \left(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos\theta_i\right)^{1/2} \tag{8-2}$$

de manera que (8-1) queda

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0\left(r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos\theta_i\right)^{1/2}} \tag{8-3}$$

Sin embargo, no hay nada específico que se pueda hacer con esto a menos que se conozcan los detalles exactos de la distribución de las cargas.

Supóngase ahora que P se encuentra lo suficientemente alejado de V', de modo que está más lejos del origen que cualquiera de las cargas. Aquí, $r > \mathbf{r}_i$ para todas las i, la relación (r_i/r) es siempre menor que uno y se puede considerar un desarrollo en serie de potencias de esta relación. Si se factoriza la r^2 de la raíz cuadrada en (8-2), se puede escribir

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r(1+t)^{1/2}} \tag{8-4}$$

donde

$$t = -2\left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \tag{8-5}$$

Ahora se introduce la serie de potencias

$$(1 \pm t)^{-(1/2)} = 1 \mp \tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{8}t^2 \mp \tfrac{5}{16}t^3 + \ldots \tag{8-6}$$

con el signo superior, para desarrollar la raíz cuadrada en (8-4). Se mantienen todos los términos del orden de $(r_i/r)^2$ y se ignora el resto; así, no es necesario utilizar el cuarto término de (8-6) que incluye a t^3 y, por lo tanto, a $(r_i/r)^3$. Sustituyendo (8-5) en (8-6) e ignorando todos los términos que contengan a $(r_i/r)^3$ y $(r_i/r)^4$, se encuentra que

$$\frac{1}{(1+t)^{1/2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left[-2\left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] + \frac{3}{8}\left[-2\left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]^2$$

$$\simeq 1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)\cos\theta_i + \frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2(3\cos^2\theta_i - 1)$$

Si se divide esto entre r, de acuerdo con (8-4), y se sustituye el resultado en (8-1), se tiene que

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N} q_i + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i r_i^2}{2}(3\cos^2\theta_i - 1) + \ldots \tag{8-7}$$

donde se han utilizado los puntos suspensivos para indicar que existen otros términos de orden mayor pero que no han sido calculados. El resultado (8-7) recibe el nombre de *desarrollo multipolar del potencial.* Los términos individuales de la suma se llaman, respectivamente, el término monopolar, el término dipolar y el término cuadripolar. Puede observarse que su dependencia con la distancia r del punto de campo va como $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$, y así sucesivamente, de tal forma que a medida que uno se aleja de la distribución de carga, los términos de mayor orden del desarrollo se vuelven cada vez menos importantes. Por conveniencia, la suma (8-7) se escribe en la forma

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_M(\mathbf{r}) + \phi_D(\mathbf{r}) + \phi_Q(\mathbf{r}) + \ldots \tag{8-8}$$

Aunque no es necesario para lo que resta del capítulo, sí es interesante indicar que las funciones de los ángulos que surgieron en (8-7) son funciones que se conocen con el nombre de *polinomios de Legendre.* Si se escriben como $P_l(x)$, estas funciones se *definen* por el desarrollo

$$\frac{1}{(1 - 2xy + y^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)y^l \qquad (|x| \leqslant 1, y < 1) \tag{8-9}$$

de manera que vienen a ser los coeficientes de las y^l en la suma. Algunas de ellas son

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x), \ldots \tag{8-10}$$

Una vez que se conocen las primeras, las demás se pueden encontrar por medio de la *relación recursiva* que satisfacen:

$$(l+1)P_{l+1}(x)=(2l+1)xP_l(x)-lP_{l-1}(x) \tag{8-11}$$

Se observa también que $P_l(1)=1$.

Si se compara (8-9) con (8-4) y (8-5), se puede observar que es posible hacer las identificaciones $y=r_i$ e y $x=\cos\theta_i$; ambas satisfacen las condiciones dadas entre paréntesis en (8-9). Así, se puede escribir

$$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta_i)\left(\frac{r_i}{r}\right)^l \tag{8-12}$$

de modo que (8-1) puede escribirse, en general, como

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\left[\sum_{i=1}^{N}q_i r_i^l P_l(\cos\theta_i)\right] \tag{8-13}$$

cuyos primeros términos concuerdan con (8-7), que se obtuvo por desarrollo directo. Aunque (8-13) es una expresión completa del desarrollo general de ϕ, es necesario considerar únicamente la parte dada en (8-7).

Los resultados no son todavía del todo convenientes, dado que las cantidades que aparecen en las sumas incluyen tanto la localización del punto de campo P como las localizaciones de las cargas debido a la presencia de cos θ_i. Sería mejor si se pudiera escribir los términos de (8-7) y (8-8) en forma en la que estos dos conjuntos de variables aparecieron separada y explícitamente, de preferencia en la forma de un producto de algo que dependa de la localización del punto de campo únicamente por algo que dependa exclusivamente de la distribución de carga. Para lograrlo, es necesario encontrar otra manera de expresar cos θ_i. En la figura 8-1 se puede observar tomando en cuenta (1-15), (1-97, (1-8) y (1-20), que

$$\cos\theta_i=\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{rr_i}=\hat{\mathbf{r}}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}_i}{r_i}\right)=\frac{l_x x_i+l_y y_i+l_z z_i}{r_i} \tag{8-14}$$

donde l_x, l_y, y l_z son los cosenos directores del vector de posición, $\mathbf{r}$, de P, y x_i, y z_i son las coordenadas rectangulares de la carga q_i. Resulta conveniente examinar cada uno de los términos de (8-8) por separado.

I. El término monopolar

La suma en el primer término de (8-7) es fácil de identificar. Es

$$\sum_{i=1}^{N}q_i=Q_{\text{total}}=Q \tag{8-15}$$

donde Q es la carga neta del sistema. De esta manera, el término monopolar tiene la forma

$$\phi_M(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{8-16}$$

Dado que es éste el término dominante del potencial, cuando el punto de campo se encuentra muy lejos de las cargas se observa que toda la distribución actúa como si fuera una sola carga puntual, como ya se había concluido antes.

En este contexto, la carga neta Q recibe el nombre de *momento monopolar* de la distribución de carga. En otras palabras, el *momento monopolar* es la característica de la distribución de carga que es importante para el *término* monopolar.

Si las cargas se encuentran distribuidas de manera continua, la suma se puede remplazar por una integral por medio de (2-14), de manera que el momento monopolar puede calcularse a partir de

$$Q = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\,d\tau' \tag{8-17}$$

donde la integral se toma sobre el volumen V de la distribución de carga fuente. Para distribuciones superficiales y lineales, se pueden obtener expresiones similares por medio de (2-16).

II. El término dipolar

Si se sustituye (8-14) en la segunda suma de (8-7) se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i &= \sum_{i=1}^{N} q_i(l_x x_i + l_y y_i + l_z z_i)\\ &= l_x\Big(\sum_i q_i x_i\Big) + l_y\Big(\sum_i q_i y_i\Big) + l_z\Big(\sum_i q_i z_i\Big)\\ &= \hat{\mathbf{r}}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i\Big)\end{aligned} \tag{8-18}$$

Dado que la suma entre paréntesis de la última expresión contiene solamente las propiedades de la distribución de carga y *no* la posición del punto de campo, resulta ser una propiedad individual *exclusivamente* de la distribución de carga. Se le define como el *momento dipolar*, **p**, de la distribución de carga; es decir,

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i \tag{8-19}$$

de modo que se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{N} q_i r_i \cos\theta_i = \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p} = l_x p_x + l_y p_y + l_z p_z \tag{8-20}$$

Cuando se sustituye esto en (8-7), se observa que el *término* dipolar puede escribirse en función del *momento* dipolar como

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{8-21}$$

Nótese que (8-21) tiene la forma de un producto (escalar) de cantidades, una de las cuales sólo depende de la posición del punto de campo y la otra sólo de los detalles de la distribución de carga.

Si el punto P se encuentra muy lejos *y si* el momento monopolar Q se anula, entonces (8-21) será el término más importante en el desarrollo de ϕ, y el momento dipolar **P** será la característica dominante de la distribución de carga.

Si las cargas se encuentran distribuidas continuamente, la suma de (8-19) puede ser remplazada por una integral sobre el volumen V', de manera que **p** se puede encontrar a partir de

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\, d\tau' \tag{8-22}$$

con expresiones similares para distribuciones superficiales y lineales.

III. El término cuadripolar

Este término es más complicado, pero puede escribirse en una forma útil y conveniente por medio de un método razonable directo. Si se utiliza (8-14), se encuentra que

$$\begin{aligned} r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1) &= 3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_i)^2 - r_i^2 \\ &= 3(l_x x_i + l_y y_i + l_z z_i)^2 - r_i^2(l_x^2 + l_y^2 + l_z^2) \end{aligned} \tag{8-23}$$

En el último paso, de hecho se multiplicó r_i^2 por 1, debido a (1-19) por lo que no se alteró su valor. Cuando se desarrolla el cuadrado de (8-23) y se agrupan los términos, se obtiene

$$\begin{aligned} r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1) = l_x^2(3x_i^2 - r_i^2) + l_y^2(3y_i^2 - r_i^2) \\ + l_z^2(3z_i^2 - r_i^2) + 6l_x l_y x_i y_i + 6l_y l_z y_i z_i \\ + 6l_z l_x z_i x_i \end{aligned} \tag{8-24}$$

Ahora se sustituye (8-24) en la suma del tercer término de (8-7) después de factorizar el $\frac{1}{2}$ y sacarlo; también se dividen los últimos tres términos de (8-24), observando que $6l_x l_y x_i y_i = 3l_x l_y x_i y_i + 3l_y l_x y_i x_i$. Una vez realizado todo esto, se encuentra que la suma puede escribirse en una forma simétrica como sigue:

$$\begin{aligned} &\sum_i q_i r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1) \\ &= l_x^2 \sum_i q_i(3x_i^2 - r_i^2) + l_x l_y \sum_i q_i 3x_i y_i + l_x l_z \sum_i q_i 3x_i z_i \\ &+ l_y l_x \sum_i q_i 3y_i x_i + l_y^2 \sum_i q_i(3y_i^2 - r_i^2) + l_y l_z \sum_i q_i 3y_i z_i \end{aligned}$$

$$+ l_z l_x \sum_i q_i 3z_i x_i + l_z l_y \sum_i q_i 3z_i y_i + l_z^2 \sum_i q_i(3z_i^2 - r_i^2) \tag{8-25}$$

Nótese que *cada* término de este desarrollo es un producto de algo que depende solamente del punto de campo, es decir, su dirección, y una cantidad que depende exclusivamente de los detalles de la distribución de carga. Así, se define un conjunto de cantidades, Q_{jk}, que reciben el nombre de *componentes del tensor del momento cuadripolar,* como sigue:

$$Q_{jk} = \sum_{i=1}^{N} q_i(3j_i k_i - r_i^2 \delta_{jk}) \qquad (j,k = x,y,z) \tag{8-26}$$

En esta expresión, j y k pueden ser independientemente x, y o z; el símbolo δ_{jk} es el *símbolo delta de Kronecker,* que se define como

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases} \tag{8-27}$$

Así, existen un total de nueve Q_{jk} definidas por (8-26). Por ejemplo,

$$Q_{xx} = \sum_i q_i(3x_i^2 - r_i^2) \qquad Q_{xy} = \sum_i q_i 3x_i y_i \tag{8-28}$$

Al comparar (8-26), (8-28) y (8-25), se puede observar que la última podría escribirse de manera más compacta como

$$\begin{aligned} &\sum_i q_i r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1) \\ &= l_x^2 Q_{xx} + l_x l_y Q_{xy} + l_x l_z Q_{xz} \\ &\quad + l_y l_x Q_{yx} + l_y^2 Q_{yy} + l_y l_z Q_{yz} \\ &\quad + l_z l_x Q_{zx} + l_z l_y Q_{zy} + l_z^2 Q_{zz} \\ &= \sum_{j=x,y,z} \sum_{k=x,y,z} l_j l_k Q_{jk} \end{aligned} \tag{8-29}$$

Por último, cuando se sustituye (8-29) en (8-7) se observa que el *término* cuadripolar puede escribirse en función del *momento* cuadripolar como

$$\phi_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=x,y,z} \sum_{k=x,y,z} l_j l_k Q_{jk} \tag{8-30}$$

Si el punto P se encuentra muy lejos *y si tanto* el momento monopolar Q *como* el momento dipoiar $\mathbf{p}$ son cero, entonces (8-30) es el término principal del desarrollo de ϕ y el tensor del momento cuadripolar, Q_{jk}, es la característica dominante de la distribución de carga.

Algunas veces es conveniente expresar el término cuadripolar explícitamente en función de las coordenadas del punto de campo en lugar de los cosenos directores. Esto puede lograrse utilizando $l_x = x/r$, $l_y = y/r$, $l_z = z/r$, de acuerdo con (1-7) y (1-11). de manera que (8-30) queda como

$$\phi_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=x,y,z} \sum_{k=x,y,z} jkQ_{jk} \tag{8-31}$$

[Las formas (8-30) y (8-31) son reminiscencias del resultado obtenido en mecánica para la energía cinética de un cuerpo rígido cuando se la expresa en función de los momentos y productos de inercia.]

Si las cargas se hallan distribuidas en forma continua, la suma de (8-26) puede remplazarse por una integral, de modo que para una distribución volumétrica se tendrá

$$Q_{jk} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')\left(3j'k' - r'^2\delta_{jk}\right) d\tau' \tag{8-32}$$

Por ejemplo,

$$Q_{xx} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}')(3x'^2 - r'^2)\, d\tau' \qquad Q_{xy} = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') 3x'y'\, d\tau' \tag{8-33}$$

Existen expresiones similares para distribuciones superficiales y lineales.

Aunque (8-26) define un total de nueve cantidades Q_{jk}. realmente son menos las independientes. De (8-26) u (8-28) se observa que $Q_{yx} = Q_{xy}$ y así sucesivamente; es decir,

$$Q_{kj} = Q_{jk} \qquad (j \neq k) \tag{8-34}$$

Así, el tensor del momento cuadripolar es un ejemplo de un tensor *simétrico,* y (8-34) reduce el número de componentes independientes a seis. Si ahora se suman las componentes diagonales, es decir, aquéllas para las que $j = k$, se tiene que

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = \sum_i q_i\left[(3x_i^2 - r_i^2) + (3y_i^2 - r_i^2) + (3z_i^2 - r_i^2)\right] = 0$$

dado que $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$; así, se obtiene

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0 \tag{8-35}$$

y este resultado, que es verdadero sin importar la localización del origen ni la naturaleza detallada de la distribución de carga, reduce el número de componentes independientes a cinco.

Si la distribución de carga es muy simétrica, el número de componentes independientes puede reducirse aún más. Con un ejemplo de caso extremo, considérese el caso de simetría axial, es decir, la distribución que tiene un eje de simetría rotacional, tal como la de un cilindro, un cono o un huevo. Tómese al eje z como dicho eje y desígnense los elementos en este caso como $Q_{jk}{}^a$. Entonces, para cada carga q' en (x', y', z') existirá otra carga del mismo valor en $(-x', y'\ z')$ y la contribución de este par a $Q_{xy}{}^a$, por ejemplo, será $3q'x'y' + 3q'(-x')y' = 0$. Dado que todas las cargas pueden aparearse de esta manera, el resultado neto es que $Q_{xy}{}^a = 0$. El mismo argumento se utiliza para el resto de los elementos fuera de la diagonal, de manera que

$$Q_{jk}{}^a = 0 \qquad (j \neq k) \tag{8-36}$$

con lo que se ha reducido el número a tres componentes. Pero, debido a (8-35), realmente hay sólo dos, ya que

$$Q_{xx}^a + Q_{yy}^a + Q_{zz}^a = 0 \tag{8-37}$$

Más aún, dado que no hay distinción real entre los ejes x y y en este caso, para cada carga en un valor dado de x' habrá otra carga igual en el mismo valor numérico de y' para el mismo valor de r'. Por lo tanto, las sumas correspondientes de (8-26) serán iguales, con lo que

$$Q_{xx}^a = Q_{yy}^a \tag{8-38}$$

Al sustituir esto en (8-37), se encuentra que $2Q_{xx}^a + Q_{zz}^a = 0$. Por lo tanto, $Q_{xx}^a = a = -\frac{1}{2}Q_{zz}^a$, por lo que realmente sólo hay *una* componente independiente del momento cuadripolar característica de la distribución de carga. Si se le llama $Q^a = Q_{zz}^a$ *al* momento cuadripolar de esta distribución de carga axialmente simétrica, se tiene

$$\begin{aligned} Q_{zz}^a &= Q^a \\ Q_{xx}^a &= Q_{yy}^a = -\tfrac{1}{2}Q^a \end{aligned} \tag{8-39}$$

Bajo estas circunstancias, el término cuadripolar se simplifica considerablemente. Si se sustituyen (8-36) y (8-39) en (8-30) y se utiliza (1-9) para eliminar l_x y l_y, se encuentra que ϕ_q se vuelve

$$\phi_Q{}^a(\mathbf{r}) = \frac{Q^a}{4\pi\epsilon_0}\frac{(3l_z^2 - 1)}{4r^3} = \frac{Q^a}{4\pi\epsilon_0}\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{4r^3} \tag{8-40}$$

donde θ es el ángulo que se forma entre el vector de posición **r** del punto de campo y el eje de simetría (el eje z). Un ejemplo de una situación como ésta se encuentra en los núcleos atómicos. Aunque sus propiedades deben ser descritas por la mecánica cuántica, el tratamiento es muy similar. Puede demostrarse que si un núcleo posee un momento cuadripolar, necesariamente debe poseer un eje de simetría en la dirección de su momento angular intrínseco o "espín". Así, lo que se encuentra enlistado en las tablas de momentos cuadripolares nucleares es esencialmente la cantidad Q^a; lo que realmente se tabula es Q^a/e, donde e es la carga electrónica, por lo que estos momentos cuadripolares nucleares están dados como áreas.

IV. Efectos de la elección del origen

El momento monopolar Q dado por (8-15) es una propiedad única de la distribución de carga. Tanto (8-19) como (8-26) dependen del valor absoluto de las $\mathbf{r}_i$, de manera que el momento dipolar y las componentes del momento cuadripolar no son generalmente propiedades exclusivas de la distribución de carga, sino que también dependen de la elección del origen. Sin embargo, bajo ciertas circunstancias resultan ser independientes de esta elección, lo que se investigará con mayor detalle enseguida.

Supóngase que en lugar de elegir el origen en O de la figura 8-1 se eligiera el nuevo origen, O_n, que se obtiene trasladando los ejes (sin rotación) mediante un desplazamiento

a, como se muestra en la figura 8-2. La posición de q_i con respecto a este nuevo origen es $\mathbf{r}_{in}$ y se puede ver en la figura que $\mathbf{a} + \mathbf{r}_{in} = \mathbf{r}_i$, de manera que los vectores de posición nuevos y viejos quedan relacionados entre sí por

$$\mathbf{r}_{en} = \mathbf{r}_i - \mathbf{a} \tag{8-41}$$

Si se sustituyen estos valores en (8-19) para encontrar el nuevo valor del momento dipolar $\mathbf{P}_n$, se obtiene

$$\mathbf{p}_n = \sum_i q_i \mathbf{r}_{in} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i - \mathbf{a} \sum_i q_i = \mathbf{p} - Q\mathbf{a} \tag{8-42}$$

lo que demuestra que los momentos dipolares calculados con respecto a estos nuevos orígenes serán generalmente diferentes. Sin embargo, también se puede observar que el mo-

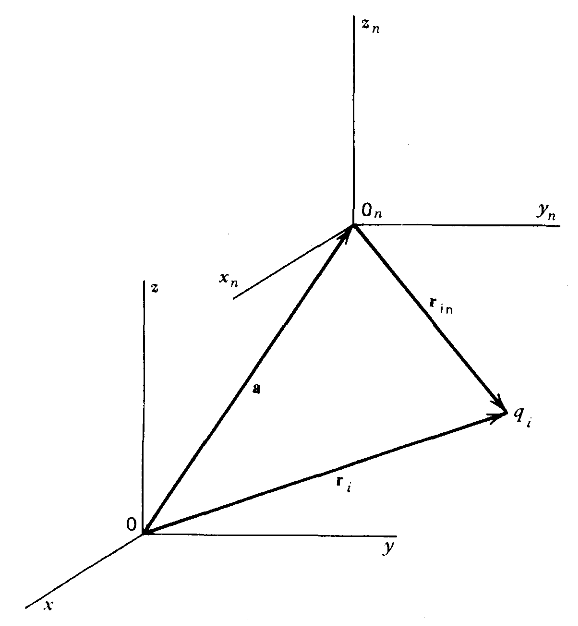


Figura 8-2 El nuevo origen de coordenadas se desplaza una distancia **a** del anterior.

mento dipolar será independiente de la elección del origen y, por tanto, una función singular de la distribución de carga, siempre y cuando el momento monopolar se anule, es decir,

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p} \qquad \text{si } Q = 0 \tag{8-43}$$

Además, el término dipolar será el término principal de la expansión (8-7). Para que $Q = 0$, se requieren por lo menos *dos* cargas en la distribución; esta es la razón de nombre "dipolar".

Ejemplo

Dos cargas puntuales iguales y opuestas. Este es el ejemplo más simple para el que se anula Q. Las dos cargas y sus posiciones se muestran en la figura 8-3. A partir de (8-19) se encuentra que **p** es

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}_+ - q\mathbf{r}_- = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = q\mathbf{l} \tag{8-44}$$

de modo que el momento dipolar es igual al producto de la magnitud de la carga y el vector de desplazamiento, **l**, de la carga negativa a la positiva. Aunque esta distribución de carga es considerada por lo general como el prototipo de un dipolo, y se le llama simplemente "dipolo", generalmente sus momentos de orden superior no se anulan, de manera que (8-8) necesariamente incluye más del término $\phi_D(\mathbf{r})$.

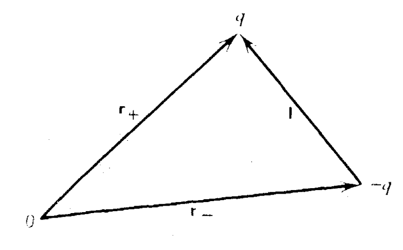


Figura 8-3 Dos cargas puntuales iguales y opuestas poseen un momento dipolar en la dirección de **l**.

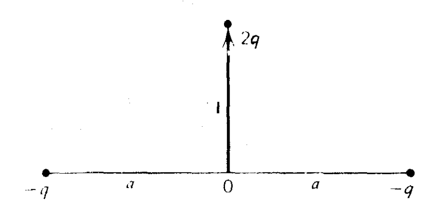


Figura 8-4 Una distribución de carga que posee momento dipolar.

Otro ejemplo sencillo que satisface (8-43) se muestra en la figura 8-4 y por medio de (8-19) se puede verificar fácilmente que su momento dipolar es $\mathbf{p} = 2q\mathbf{l}$.

Se pueden obtener resultados similares para el momento cuadripolar. Será suficiente considerar una sola componente, por ejemplo Q_{xy}. Las componentes x y y de (8-41) son $x_{in} = x_i - a_x$ y $y_{in} = y_i - a_y$ y cuando se sustituyen éstas en (8-28) se obtiene que la nueva componente $Q_{xy}{}''$ es

$$Q_{xy}{}'' = 3\sum_i q_i x_{en} y_{en} = 3\sum_i q_i (x_i - a_x)(y_i - a_y)$$

$$= Q_{xy} - 3a_y p_x - 3a_x p_y + 3a_x a_y Q \tag{8-45}$$

por medio de (8-19) y (8-15). Dado que existen expresiones similares para las otras componentes Q_{jk}, se puede concluir que por lo general el momento cuadripolar no es tampoco una propiedad exclusiva de la distribución de carga. Sin embargo, en (8-45) se puede observar que será independiente del origen si los momentos *tanto* monopolar *como* dipolar desaparecen, es decir,

$$Q_{jk}{}'' = Q_{jk} \qquad \text{si } Q = 0 \text{ y } \mathbf{p} = 0 \tag{8-46}$$

Además, el término cuadripolar será el término principal del desarrollo (8-7).

Por lo general, se pueden satisfacer ambas condiciones de (8-46) por lo menos con *cuatro* cargas de la distribución; de aquí la razón del nombre "cuadripolar". Los ejemplos más simples generalmente se obtienen colocando dos dipolos de manera tal que se cancele el momento dipolar total. Dos de estos ejemplos se muestran en la figura 8-5, en la que los

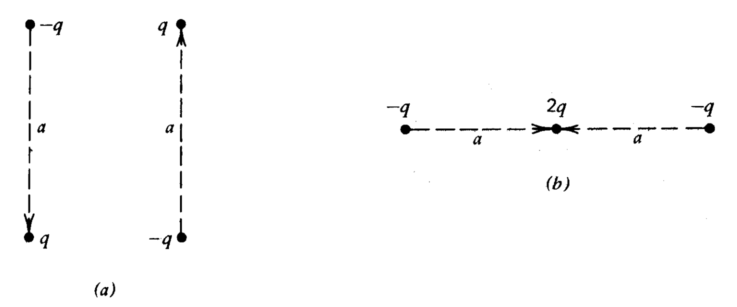


Figura 8.5. Distribución de carga que poseen momentos cuadripolares.

dipolos se han indicado con flechas punteadas. Nótese que la figura 8-5*b* es una variante de la figura 8-4 con $\mathbf{l} = 0$; nótese también que para que concuerde con la necesidad de tener por lo menos cuatro cargas, se debe realizar una división mental de la carga central de valor $2q$ en dos cargas superpuestas de valor individual q. Debe tenerse cuidado al diseñar arreglos de este tipo. Por ejemplo, si se intercambian las dos cargas en la parte superior de la figura 8-5*a*, las condiciones de (8-46) ya no se cumplen completamente, dando como resultado que la configuración de carga así tendría un momento cuadripolar dependiente de la posición de origen.

Para resumir esta sección tan larga, se puede decir que cuando la distancia a una distribución de carga es lo suficientemente grande, el potencial que ésta produce puede desarrollarse en la forma:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{1}{2r^3}\sum_{j,k} l_j l_k Q_{jk} + \cdots\right) \tag{8-47}$$

tal como se obtuvo en (8-8), (8-16), (8-21) y (8-30). Dado que en (8-47) solamente aparece la posición del punto de campo a través de su distancia al origen y la dirección de $\mathbf{r}$, se puede pensar qûe todos los momentos se encuentran localizados en el origen, sin importar la extensión espacial de la distribución de carga fuente.

Hasta ahora se ha prestado atención a la forma del potencial. A continuación se consideran algunas de sus propiedades, así como el campo eléctrico que describe. Resulta útil analizar cada una de las contribuciones que resultan de (8-47); el $\mathbf{E}$ total será la suma vectorial de todas ellas. El primer término corresponde a una carga puntual localizada en el origen, y dado que ya se han visto a fondo sus propiedades, se procede directamente con el segundo término.

8-2 Campo del dipolo eléctrico

El potencial que se desea investigar es el dado por (8-21), y será el término principal cuando $Q = 0$. Aunque ϕ_D se obtuvo al analizar el potencial a una gran distancia de la distribución de carga, resulta conveniente estudiar sus propiedades al suponer que ϕ_D es verdadero para *todos* los puntos del espacio. Un campo con estas características recibe generalmente el nombre de *campo dipolar*, suponiéndose que está producido por un *dipolo puntual*, $\mathbf{P}$, situado en el origen. Esta suposición ficticia pero conveniente puede resultar de un proceso de límite aplicado a la distribución de cargas iguales de la figura 8-3. En este proceso, la separación $\mathbf{l}$ se va reduciendo a cero mientras que la carga q va aumentando de tal manera que el momento dipolar, que es su producto de acuerdo con (8-44), permanezca constante

e igual a **p**. Si se utilizan coordenadas esféricas para localizar el punto de campo p, y se elige el eje z en la dirección de **p**, se llega a la situación que se ilustra en la figura 8-6. Al utilizar (8-21) y (1-15) se encuentra que se puede expresar el potencial dipolar como

$$\phi_D(\mathbf{r}) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{8-48}$$

La ecuación que da las superficies equipotenciales que corresponden a ϕ_D = const es entonces

$$r^2 = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0\phi_D}\right)\cos\theta = C_D\cos\theta \tag{8-49}$$

donde la constante C_D que caracteriza a una superficie dada depende del valor de ϕ_D. Estas equipotenciales se muestran en la figura 8-7 como líneas continuas; las superficies reales se generan al rotar imaginariamente esta figura bidimensional alrededor del eje z. Dado que r^2 en (8-49) debe ser positivo, se puede observar que C_D debe también ser positivo

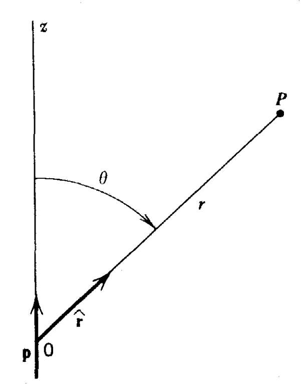


Figura 8-6 Un dipolo puntual en el origen y paralelo al eje z.

para $\theta < \frac{1}{2}\pi$ cuando cos θ es positivo; así, los valores positivos de ϕ_D corresponden a las curvas equipotenciales de la mitad superior de la figura. De manera similar, las curvas en la parte inferior de la misma corresponden a valores negativos de ϕ_D, dado que cos θ es negativo para $\theta > \frac{1}{2}\pi$, de modo que C_D debe también ser negativo.

Las componentes de **E** pueden encontrarse a partir de (8-48), (5-3) y (1-101), los resultados son:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\phi_D}{\partial r} = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{2\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_D}{\partial\theta} = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{\operatorname{sen}\theta}{r^3} \end{aligned} \tag{8-50}$$

y $E\varphi \sim -\partial\phi_D/\partial\varphi = 0$. Estas componentes poseen una dependencia angular diferente pero ambas presentan la variación inversa al cubo de la distancia, que es característica del campo dipolar.

Se puede encontrar la ecuación de las líneas de **E** a partir de la expresión anterior (5-39), que expresa el hecho de que la línea es paralela a **E** en todos sus puntos. Si se escriben tanto ds_{lf} como **E** en coordenadas esféricas por medio de (1-98), se tiene que

$$dr = kE_r \qquad \text{y} \qquad r\,d\theta = kE_\theta \tag{8-51}$$

de manera que

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{2\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{d\ln r}{d\theta} = \frac{2d(\ln\operatorname{sen}\theta)}{d\theta}$$

que se integra para dar

$$\ln r = \ln\operatorname{sen}^2\theta + \ln K_D = \ln(K_D\operatorname{sen}^2\theta)$$

Donde K_D es una constante de integración. Al despejar r se obtiene la ecuación para estas curvas:

$$r = K_D\operatorname{sen}^2\theta \tag{8-52}$$

de modo que cada una de las líneas queda caracterizada por un valor particular de K_D. Cuando se grafican las curvas, se obtienen las líneas de **E** que se muestran punteadas en la

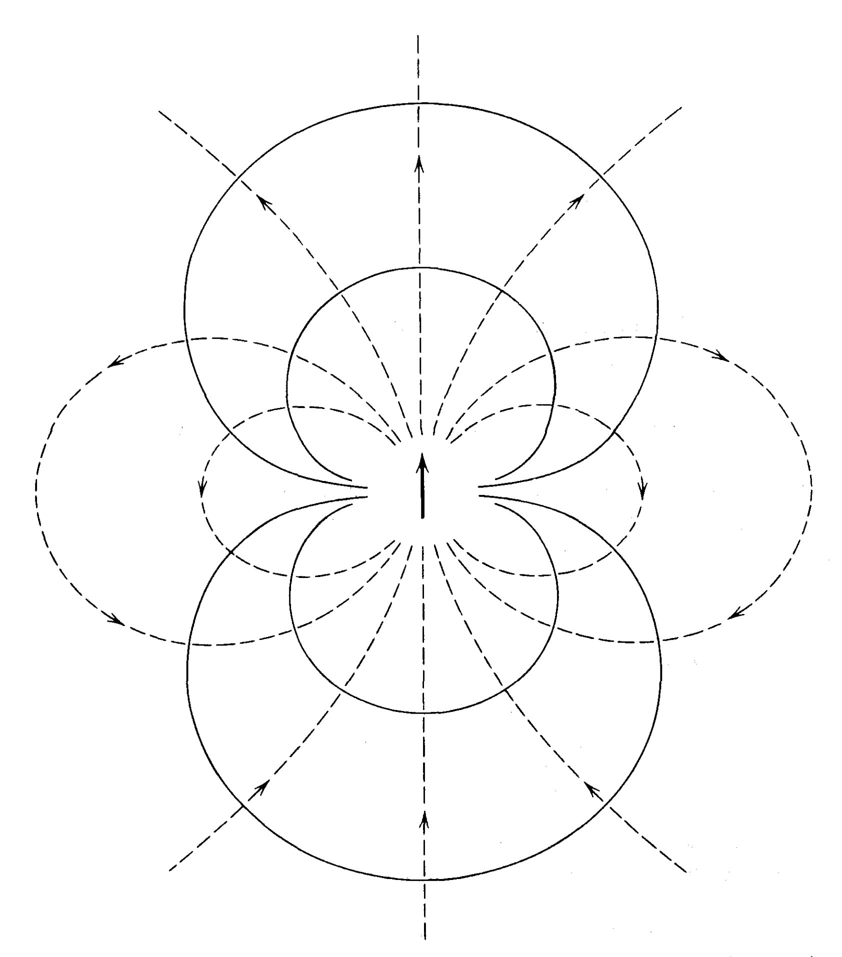


Figura 8-7 Equipotenciales (líneas llenas) y líneas de campo eléctrico (punteadas) de un dipolo puntual.

figura 8-7. Se observa que son consistentes con los casos especiales de (8-50), que indica que $E_r = 0$ cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y que $E_\theta = 0$ cuando $\theta = 0$ y π. Es necesario asegurarse a satisfacción propia que las direcciones de **E** que se indican por medio de la flechas resultan de las expresiones para las componentes dadas en (8-50), y que las líneas de **E** son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

8-3 Campo del cuadripolo lineal

La expresión general para el potencial cuadripolar dada en (8-30) puede llegar a ser muy complicada dependiendo de las componentes Q_{jk} que sean diferentes de cero. En consecuencia, se analiza solamente el caso para el que el sistema tiene un eje de simetría, de modo que el potencial dado por (8-40) sea

$$\phi_Q{}^a = \frac{Q^a}{4\pi\epsilon_0}\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{4r^3} \tag{8-53}$$

Aunque muchos tipos de distribuciones de carga pueden producir este potencial, es conveniente tomar como prototipo para este caso la sencilla distribución de carga de la figura 8-5*b*, ya que posee la simetría deseada; Q^a es, de hecho, negativa en esta situación, como puede verse en (8-39) y (8-26). En consecuencia, se puede considerar a (8-53) como un campo cuadripolar lineal (o axial). La ecuación para las superficies equipotenciales que se obtienen al hacer que ϕ_Q = const en (8-53) es

$$r^3 = \left(\frac{Q^a}{8\pi\epsilon_0\phi_Q}\right)\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2} = \frac{1}{2}C_Q(3\cos^2\theta - 1) \tag{8-54}$$

donde la constante C_Q que caracteriza una superficie dada depende del correspondiente valor de ϕ_Q. Por simplicidad, sólo se muestra una de estas curvas con línea llena en la figura 8-8; las demás son de forma similar. Dado que (8-54) es independiente de φ, las superficies reales se generan aquí también al rotar estas curvas alrededor del eje de simetría (en este caso el eje z).

Las componentes del campo eléctrico que se obtienen a partir de (8-53), (5-3) y (1-101) son

$$\begin{aligned} E_r &= \left(\frac{3Q^a}{8\pi\epsilon_0}\right)\frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2r^4} \\ E_\theta &= \left(\frac{3Q^a}{8\pi\epsilon_0}\right)\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^4} \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{8-55}$$

Las componentes de campo disminuyen con el inverso de la cuarta potencia de la distancia al punto de campo.

Para encontrar la ecuación de una línea de campo, se vuelve a eliminar k de (8-51) por división y usando (8-55). De esta forma se obtiene

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{E_r}{E_\theta} = \frac{(3\cos^2\theta - 1)}{2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

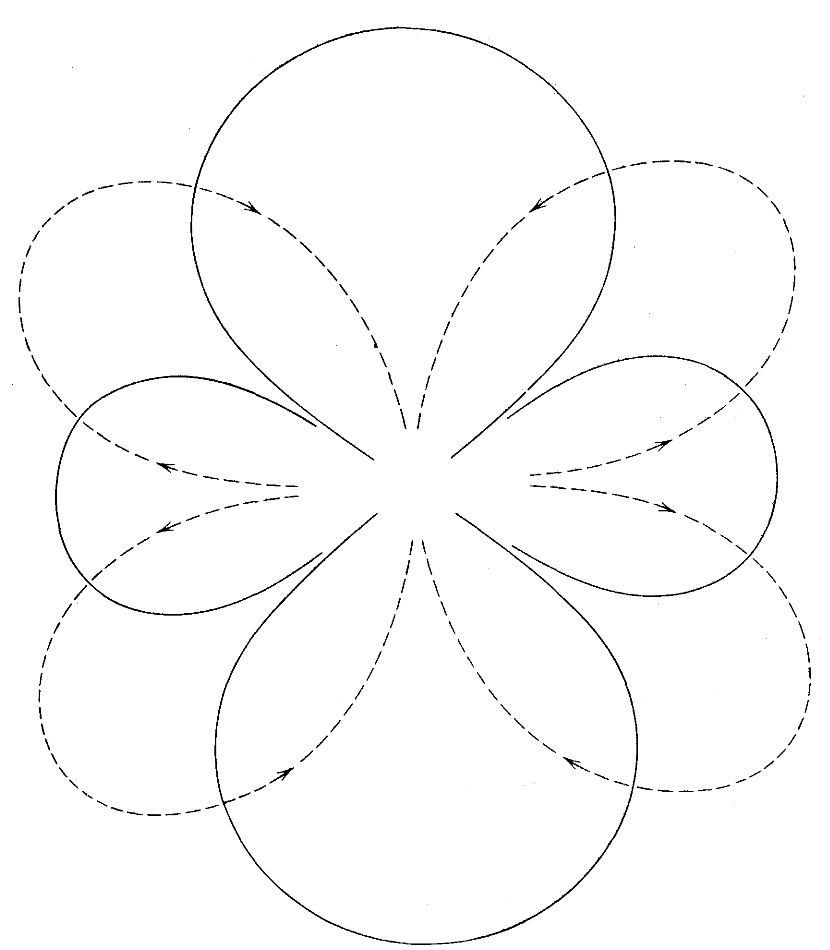


Figura 8-8 Una equipotencial (línea llena) y línea de campo eléctrico de un cuadripolo lineal.

que, al integrarse, da

$$r^2 = K_Q \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta \tag{8-56}$$

donde K_Q es una constante de integración. De nuevo por simplicidad, la figura 8-8 solamente muestra una de estas líneas, como una curva punteada. Como se sugirió en relación con la figura 8-7, debe uno asegurarse de verificar que las direcciones de **E** indicadas por las flechas son consistentes con las expresiones para las componentes que se dan en (8-55) bajo el supuesto de que Q^a es negativa, como sería el caso para la figura 8-5*b*. Nótese de nuevo que, como debe ser, las líneas de **E** son perpendiculares a esta superficie equipotencial mucho más complicada.

8-4 Energía de una distribución de carga en un campo externo

En el capítulo anterior se estudió la energía electrostática mutua de una distribución arbitraria de cargas y se obtuvo el trabajo reversible requerido para acomodar estas cargas en con-

tra de sus fuerzas conservativas de atracción o repulsión mutua. En algunas circunstancias, el interés no se centra en toda esta energía sólo sino en una parte de ella. Para entender mejor esto, considérese una situación en la que la distribución total de carga se puede divi-

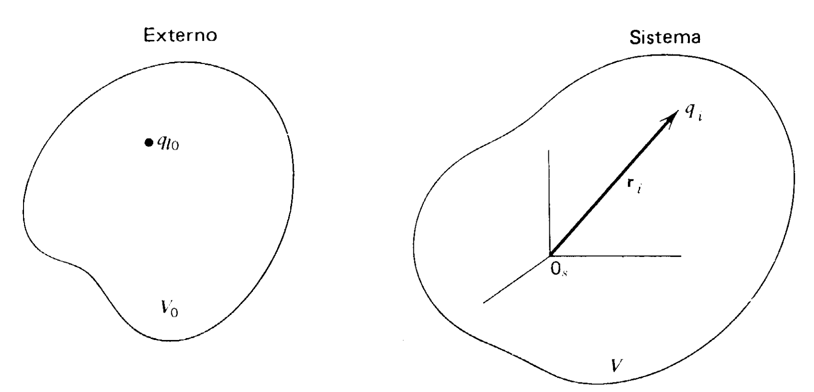


Figura 8-9 Un sistema de cargas bajo la influencia de una distribución de carga externa.

dir en dos grupos, de forma que las cargas de cada uno de los grupos ocupen su propio volumen, y que estos dos volúmenes se encuentran separados una cierta distancia a fin de que puedan ser confundidos los grupos entre sí. La figura 8-9 ilustra una situación de este tipo; las cargas de uno de los grupos se denominan q_{l0} y ocupan el volumen V_0, mientras que a las del otro grupo simplemente se les denomina q_i con un solo subíndice, siendo V; su volumen también se han designado los grupos con los nombres de "sistema" y "extremo", por motivos que resultarán obvios más adelante. Considérese una carga q_i en la posición $\mathbf{r}_i$ con respecto al origen 0_s que, por conveniencia posterior, se ha elegido dentro del volumen del sistema. De acuerdo con (5-48) se puede expresar la energía de esta carga como

$$U_{ei} = q_i\phi(\mathbf{r}_i) \tag{8-57}$$

en función del potencial total $\phi(\mathbf{r}_i)$ en este punto. Por (5-2) se sabe que ϕ queda determinado por todas las cargas y, de hecho, puede dividirse la suma total de las contribuciones en dos grupos, una parte que represente las contribuciones de las cargas externas q_{l0} y otra que requiera las de las cargas restantes en el sistema. Así se puede expresar que $\phi = \phi_s + \phi_0$, donde, por ejemplo,

$$\phi_0(\mathbf{r}_i) = \sum_{l=1}^{N_0} \frac{q_{l0}}{4\pi\epsilon_0 R_{il}} \tag{8-58}$$

siendo N_0 el número total de cargas externas y $R_{il} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l|$, donde $\mathbf{r}_l$ es el vector de posición de q_{l0}. La otra parte ϕ_s estará dada por una expresión similar. Al sustituir esto en (8-57) se encuentra que la energía de q_i puede expresarse como la suma

$$U_{ei} = q_i\phi_s(\mathbf{r}_i) + q_i\phi_0(\mathbf{r}_i) \tag{8-59}$$

Aquí, el primer término representa la energía de interacción entre las cargas del sistema, y al sumársele sobre las N cargas de este tipo se llega a un resultado como (7-3). Así, este término viene a ser la *energía interna* del sistema y expresa la cantidad de trabajo que se requiere para lograr su configuración. Para los casos que son de interés aquí, el sistema es

una entidad definida en el que las cargas que lo forman tienen posiciones especiales relativas que son fijas, y esta energía electrostática interna es una constante definida para el mismo.

El segundo término de (8-59) representa entonces la energía que resulta de las interacciones entre una de las cargas del sistema con el grupo de cargas externas. Cuando se realiza la suma sobre i, se obtiene la energía de este tipo que puede ser considerada como la energía de las cargas del sistema de interés, producida por los efectos del campo externo; si a esta energía se le denomina U_{e0}, se tiene que

$$U_{e0} = \sum_{i=1}^{N} q_i \phi_0(\mathbf{r}_i) \tag{8-60}$$

y recibe el nombre de *energía interacción*, objeto del interés de este estudio.

Se puede realizar un análisis similar para las cargas externas y llegar a las mismas conclusiones. Sin embargo, en los casos prácticos de interés, generalmente se hace que estas cargas externas producidas en un laboratorio por medio de cargas en las placas de un capacitor o en otros conductores, por ejemplo, y se desea estudiar el sistema de interés observando cómo responde a la influencia de las cargas de la fuente externa. En un caso así, por lo común no se estudian los cambios energéticos en las cargas externas, de manera que no resulta necesario preocuparse de ellas en adelante. Así, el término energético de valor es aquélla *parte* de la energía total representada en (8-60); en consecuencia, en lo que sigue solamente se maneja esa porción.

Tal como está, (8-60) no corresponde completamente a la realidad experimental. Por lo general, las fuentes externas se encuentran lo suficientemente lejos y el sistema es tan pequeño en extensión espacial que ϕ_0 no varía gran cosa en todo el volumen V. Por lo tanto, es suficientemente exacto desarrollar $\phi_0(\mathbf{r}_i)$ en una serie de potencias en torno al origen, e incluir únicamente los primeros términos de dicho desarrollo. Si se utilizan coordenadas rectangulares, el desarrollo en serie de ϕ_0 puede expresarse como

$$\begin{aligned}\phi_0(\mathbf{r}_i) = \phi_0(x_i, y_i, z_i) = \phi_0(0,0,0) \\ + \left[x_i\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\right)_0 + y_i\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial y}\right)_0 + z_i\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial z}\right)_0 \right] \\ + \frac{1}{2}\left[x_i^2\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}\right)_0 + y_i^2\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2}\right)_0 + z_i^2\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2}\right)_0 \right. \\ \left. + 2x_i y_i\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y}\right)_0 + 2y_i z_i\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y \partial z}\right)_0 + 2z_i x_i\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z \partial x}\right)_0 \right] + \cdots\end{aligned} \tag{8-61}$$

donde el subíndice 0 en las derivadas indica que deben evaluarse en el origen. Resulta conveniente considerar el resultado que se obtiene al sustituir (8-61) en (8-60) parte por parte.

El primer término de (8-61) es una constante, de modo que cuando se le introduce en (8-60) puede sacarse de la suma, por lo que resulta que su contribución a U_{e0} es

$$U_{e0M} = \phi_0(0,0,0) \sum_i q_i = Q\phi_0(0) \tag{8-62}$$

donde Q es el momento monopolar dado por (8-15). Así, esta parte de la energía de interacción es simplemente la producida por una carga puntual igual a la carga total multiplicada por el potencial externo en el origen, de acuerdo y en armonía con (5-48).

El primer término entre corchetes en (8-61) puede expresarse como

$$\mathbf{r}_i\cdot(\nabla\phi_0)_0 = -\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{E}_0 \tag{8-63}$$

debido a (5-3), donde $\mathbf{E}_0$ es el campo eléctrico externo. Dado que $\mathbf{E}_0$ también es constante, al sustituir (8-63) en (8-60) se obtiene la siguiente contribución a la energía:

$$U_{e0D} = -\mathbf{E}_0\cdot\sum_i q_i\mathbf{r}_i = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_0 \tag{8-64}$$

donde $\mathbf{p}$ es el momento dipolar dado por (8-19). Así, este término representa la energía de un dipolo en un campo eléctrico externo.

Ya para ahora debe resultar claro que los siguientes términos de (8-61) darán una contribución energética que contendrá las componentes del momento cuadripolar, aunque estos términos no hayan sido escritos todavía en su forma más conveniente. Dado que se supone que las cargas fuente se encuentran separadas físicamente del sistema, tal como en la figura 8-9, su densidad de carga es $\rho_0 = 0$ en todo el volumen del sistema, V. Por lo tanto, en todos los puntos del sistema, ϕ_0 satisface la ecuación de Laplace de acuerdo con (5-15) y (5-16); es decir,

$$\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}\right)_0 = 0 \tag{8-65}$$

Así, se puede sumar cualquier múltiplo de (8-65) a los términos de segundo orden de (8-61) sin afectar su valor; de acuerdo con esto, se multiplica (8-65) por $-(r_i^2/6)$, se suma esto a lo que queda de (8-61) y se reacomodan los términos utilizando el hecho de que las segundas derivadas parciales mixtas son iguales, [por ejemplo, $(\partial^2\phi_0/\partial x\partial y)_0 = (\partial^2\phi_0/\partial y\partial x)_0$]; también se les puede expresar como

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\Bigg[&(3x_i^2 - r_i^2)\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}\right)_0 + 3x_iy_i\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x\partial y}\right)_0 + 3x_iz_i\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x\partial z}\right)_0\\ &+ 3y_ix_i\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y\partial x}\right)_0 + (3y_i^2 - r_i^2)\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2}\right)_0 + 3y_iz_i\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y\partial z}\right)_0\\ &+ 3z_ix_i\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z\partial x}\right)_0 + 3z_iy_i\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z\partial y}\right)_0 + (3z_i^2 - r_i^2)\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}\right)_0\Bigg]\end{aligned} \tag{8-66}$$

Si ahora se introduce (8-66) en (8-60) y se utiliza la definición de las componentes del momento cuadripolar dada en (8-26) e ilustra en (8-28), se encuentra que la contribución restante a la energía en el campo externo viene a ser

$$\begin{aligned}U_{e0Q} = \frac{1}{6}\Bigg[&Q_{xx}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}\right)_0 + Q_{xy}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x\partial y}\right)_0 + Q_{xz}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x\partial z}\right)_0\\ &+ Q_{yx}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y\partial x}\right)_0 + Q_{yy}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2}\right)_0 + Q_{yz}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y\partial z}\right)_0\\ &+ Q_{zx}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z\partial x}\right)_0 + Q_{zy}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z\partial y}\right)_0 + Q_{zz}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial z^2}\right)_0\Bigg]\end{aligned} \tag{8-67}$$

o, en forma más concreta,

$$U_{e0Q}=\frac{1}{6}\sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z}Q_{jk}\left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial j\partial k}\right)_0 \tag{8-68}$$

También se puede expresar esto en función del campo eléctrico externo, $\mathbf{E}_0$, observando que $(\partial\phi_0/\partial j)_0 = -E_{0j}$ debido a (5-3), de manera que

$$U_{e0Q}=-\frac{1}{6}\sum_{j=x,y,z}\sum_{k=x,y,z}Q_{jk}\left(\frac{\partial E_{0j}}{\partial k}\right)_0 \tag{8-69}$$

lo que escrito en forma desarrollada es

$$\begin{aligned}U_{e0Q}=-\frac{1}{6}\Bigg[&Q_{xx}\left(\frac{\partial E_{0x}}{\partial x}\right)_0+Q_{xy}\left(\frac{\partial E_{0x}}{\partial y}\right)_0+Q_{xz}\left(\frac{\partial E_{0x}}{\partial z}\right)_0\\&+Q_{yx}\left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x}\right)_0+Q_{yy}\left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial y}\right)_0+Q_{yz}\left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial z}\right)_0\\&+Q_{zx}\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial x}\right)_0+Q_{zy}\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial y}\right)_0+Q_{zz}\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial z}\right)_0\Bigg]\end{aligned} \tag{8-70}$$

demostrando en forma explícita que la energía de un momento cuadripolar en un campo externo depende de las derivadas espaciales de las componentes del campo eléctrico.

Si se combinan (8-62), (8-64) y (8-69), se obtiene una expresión final para la energía del sistema de cargas debida a las interacciones con cargas de una fuente externa:

$$U_{e0}=Q\phi_0(0)-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_0-\frac{1}{6}\sum_{j,k}Q_{jk}\left(\frac{\partial E_{0j}}{\partial k}\right)_0+\cdots \tag{8-71}$$

Es posible proseguir aún más con este proceso desarrollando el potencial ϕ_0 en función de los momentos multipolares de las cargas fuente *externas* para así obtener una serie para la energía de interacción en función de la energía de un dipolo en el campo de un dipolo, y así sucesivamente. Sin embargo, no se hará tal cosa aquí, pero sí se calcularán algunos de los más importantes de estos términos en los ejercicios.

Se puede expresar (8-71) de una manera más general. Como se observó después de (8-47), los momentos pueden considerarse localizados en el origen, que en este caso es el origen del sistema 0_s de la figura 8-9. Dado que el sistema mismo podría moverse, es conveniente referir su posición a un sistema coordenado fijo en el espacio. Así, si se hace que $\mathbf{r}$ sea el vector de posición de 0_s con respecto a este sistema coordenado fijo, entonces los términos de (8-71) que están evaluados todos en 0_s, la "posición" del sistema de interés, serán realmente evaluados en $\mathbf{r}$, de manera que se puede escribir finalmente

$$U_{e0}=Q\phi_0(\mathbf{r})-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_0(\mathbf{r})-\frac{1}{6}\sum_{j,k}Q_{jk}\left(\frac{\partial E_{0j}}{\partial k}\right)_{\mathbf{r}}+\cdots \tag{8-72}$$

Ahora que se han obtenido estos resultados, se investigan algunas de las consecuencias provocadas por los términos menos comunes: las energías dipolar y cuadripolar.

I. La energía dipolar

Si se le escribe simplemente como U_D, la energía de un dipolo **p** en un campo externo $\mathbf{E}_0$ es

$$U_D = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_0 = -pE_0\cos\Theta \tag{8-73}$$

donde Θ es el ángulo entre ellos, como se muestra en la figura 8-10. Esta sería una forma apropiada para utilizarse con relación a un dipolo puntual tal como se definió anteriormente. En la figura 8-11 se muestra esta energía en función de Θ. Se puede observar que el rango de variación de la energía es finito y que la energía tiene un mínimo en $\Theta = 0$

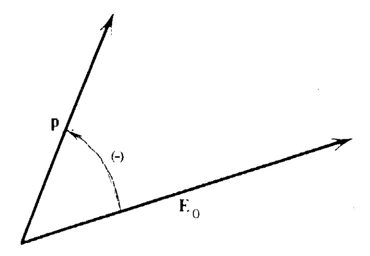


Figura 8-10 Un dipolo que forma un ángulo con un campo eléctrico externo.

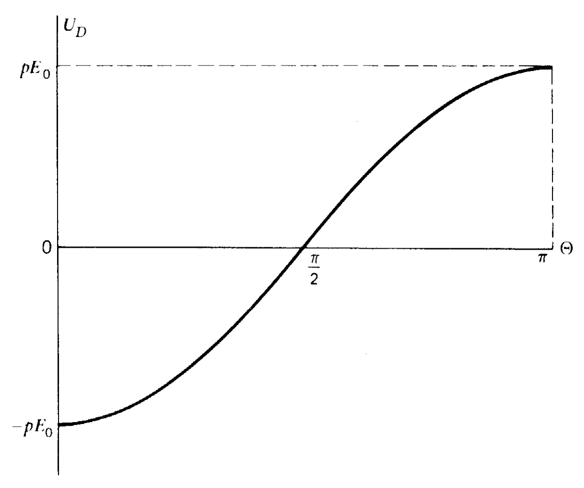


Figura 8-11 La energía de un dipolo en un campo externo en función del ángulo que forman el dipolo y el campo.

cuando los dos vectores son paralelos. Esto indica que la tendencia del sistema es hacia la alineación del momento del dipolo con el campo externo. Se puede evaluar este efecto de la siguiente manera. Dado que la energía es una función de Θ, es decir, $U_D = U_D(\Theta)$, se sabe (de la mecánica) que existirá un momento de torsión sobre **p**, y que su componente en la dirección en que Θ aumenta, τ, estará dada por

$$\tau = -\frac{\partial U_D}{\partial\Theta} = -pE_0\,\mathrm{sen}\,\Theta = -|\mathbf{p}\times\mathbf{E}_0| \tag{8-74}$$

Dado que τ es negativa, significa que el sentido del momento de torsión sobre **p** es tal que tiende a hacer girar a **p** en la dirección de $\mathbf{E}_0$; así, si se utiliza la definición de la dirección

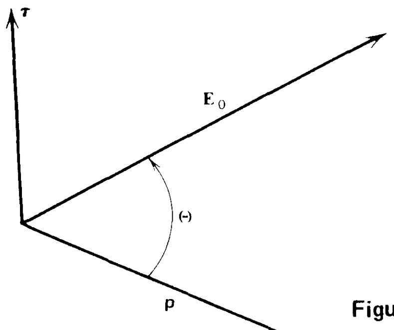


Figura 8-12 El momento de torsión sobre un dipolo en un campo externo.

del producto cruz que se dio en la figura 1-14, se puede observar que el momento de torsión vectorial τ se encuentra en la dirección de $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_0$, tal como se muestra en la figura 8-12. Al combinar esto con (8-74), el momento de torsión sobre $\mathbf{p}$ estará dado correctamente en magnitud y dirección por

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}_0 \tag{8-75}$$

Nótese que $\tau = 0$ cuando $\Theta = 0$ y π, de manera que estos dos valores del ángulo corresponden respectivamente a un valor mínimo y a un valor máximo de la energía U_D, tal como se muestra en la figura 8-11; $\Theta = 0$ es una posición de equilibrio estable, mientras que $\Theta = \pi$ es de equilibrio inestable. Para lograr el equilibrio en un ángulo intermedio, es necesario que un agente externo aplique un momento de torsión mecánico, τ_m, igual y opuesto al valor de τ dado en (8-75), de modo que el momento de torsión neto sobre $\mathbf{p}$ es igual a cero

$$\tau + \tau_m = 0 \tag{8-76}$$

Si se vuelve a mirar (8-73), se puede observar que si $\mathbf{E}_0$ no fuese constante sino una función de la posición $\mathbf{r}$, entonces sería posible que un dipolo disminuyera su energía al moverse a otra posición diferente; en otras palabras, se tiene la posibilidad de una fuerza traslacional, $\mathbf{F}_D$, no nula sobre el dipolo, debida al campo externo. De la mecánica, otra vez, ésta está dada por

$$\mathbf{F}_D = -\nabla U_D = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0) \tag{8-77}$$

El hecho de que $\mathbf{p}$ sea constante permite poner esto en en una forma más útil. Si se utiliza (1-115), se puede escribir (8-77) como

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{E}_0 \times (\nabla \times \mathbf{p}) + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}_0) + (\mathbf{E}_0 \cdot \nabla)\mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}_0 \tag{8-78}$$

El primero y tercer términos desaparecen porque $\mathbf{p}$ es constante, de modo que todas sus derivadas espaciales son iguales a cero; el segundo término también desaparece porque $\mathbf{E}_0$ es conservativo y $\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0$, de acuerdo con (5-4). Así, (8-78) se reduce a

$$\mathbf{F}_D = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}_0 \tag{8-79}$$

Por ejemplo, si con la ayuda de (1-123) se escribe la componente x de dicha fuerza se obtiene

$$F_{Dx} = p_x \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_{0x}}{\partial z} \tag{8-80}$$

Existen expresiones similares para las otras dos componentes restangulares. El resultado (8-79) verifica así la expectativa de que existirá una fuerza traslacional sobre un dipolo

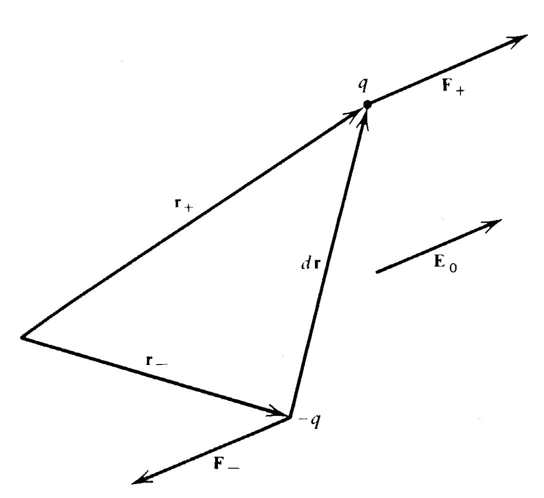


Figura 8-13 Las fuerzas sobre las cargas de un dipolo prototipo.

cuando el campo externo varíe con la posición. [El torque dado por (8-75) se encuentra presente aun en un campo externo uniforme.]

Todos estos resultados para el momento dipolar han sido obtenidos de una manera completamente general y, por lo tanto, son aplicables al momento dipolar de cualquier tipo de distribución de carga que sea de interés. Sin embargo, resulta de utilidad ver que también es posible obtenerlos de una forma muy directa y sencilla para el caso simple de dos cargas iguales y opuestas, como las que se muestran el figura 8-3, que pueden ser tomadas como el prototipo del dipolo puntual si se hace que $\mathbf{l} \to 0$ y $q \to \infty$, de tal manera que $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ se mantengan constante. Para resaltar este aspecto, escríbase la separación entre ellas como $d\mathbf{r}$, como se ilustra en la figura 8-13, de modo que se tenga $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_- + d\mathbf{r}$. También se muestran el campo externo $\mathbf{E}_0$ y las fuerzas sobre las cargas, que se calculan a partir de (3-1).

De nuevo, si $\phi_0(\mathbf{r})$ es el potencial externo, la energía se obtiene de (8-60) y resulta

$$U_{e0} = q\phi_0(\mathbf{r}_+) - q\phi_0(\mathbf{r}_-) = q\,d\phi_0 = q\,d\mathbf{r}\cdot\nabla\phi_0 = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_0$$

con la ayuda de (1-38), (5-3) y (8-44). Así, este resultado que se ha obtenido para una situación especial, concuerda exactamente con el que se halló de manera más general en (8-64). La fuerza neta sobre el sistema será

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q[\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_+) - \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_-)] = q\,d\mathbf{E}_0$$

Se puede encontrar la componente x de ésta mediante (1-38) y (8-44), resultando

$$F_{\text{net}\,x} = q dE_{0x} = q d\mathbf{r}\cdot\nabla E_{0x} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)E_{0x}$$

lo que concuerda con (8-80), de tal forma que una vez más se llega a (8-79). De manera similar, el momento de torsión resultante en un campo uniforme estará dado por.

$$\tau=\mathbf{r}_+\times\mathbf{F}_+ +\mathbf{r}_-\times\mathbf{F}_- = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)\times\mathbf{E}_0=\mathbf{p}\times\mathbf{E}_0$$

y concuerda exactamente con (8-75).

II. La energía lineal

Como en la sección previa, será suficiente considerar la energía de interacción solamente para el caso de una distribución de carga con simetría axial. Si se le denota simplemente como $U_Q{}^a$, y se sustituyen los valores para las componentes del momento dados en (8-36) y (8-39) en el último término de (8-72), se obtiene

$$U_Q{}^a = -\frac{Q^a}{6}\left[\frac{\partial E_{0z}}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y}\right)\right] \tag{8-81}$$

donde las derivadas deben evaluarse en la posición del sistema. De nuevo, dado que las cargas externas se encuentran todas ellas localizadas fuera de sistema, de tal forma que $\rho_0 = 0$, se tendrá que $\nabla.\mathbf{E}_0 = 0$, de acuerdo con (4-10). Se puede utilizar esto, junto con (1-42), para expresar (8-81) completamente como una función de $\partial E_{0z}/\partial_z$; el resultado es

$$U_Q{}^a = -\frac{Q^a}{4}\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial z}\right) = \frac{Q^a}{4}\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2}\right) \tag{8-82}$$

donde el último término proviene de (5-3). Así, el término de energía se reduce a una forma compacta muy simple para este tipo especial de distribución de carga. Nótese que sólo depende de la variación, a lo largo del eje de simetría, de la componente del campo eléctrico que está también a lo largo del eje de simetría. Si Q_a es positiva, la energía será mínima en el punto en el que $\partial E_{0z}/\partial z$ posee su máximo valor positivo. Así, puede existir una fuerza traslacional sobre este cuadripolo dada por

$$\mathbf{F}_Q{}^a = -\nabla U_Q{}^a = \frac{1}{4}Q^a\nabla\left(\frac{\partial E_{0z}}{\partial z}\right) = \frac{1}{4}Q^a\frac{\partial}{\partial z}(\nabla E_{0z}) \tag{8-83}$$

Ejercicios

8-1 Llevar a cabo el desarrollo de $1/R_i$ para incluir todos los términos de orden de $(r_i/r)^3$ y así demostrar directamente que el siguiente término en (8-7) se obtiene correctamente de (8-13) con $l = 3$. A esta parte del desarrollo de ϕ se le denomina el *término octopolar.*

8-2 Una *única* carga puntual, q, se encuentra situada en el punto (a,b,c). Encontrar Q, $\mathbf{p}$ y todas las componentes de Q_{jk} para este sistema. ¿Cuál de estas cantidades, si las hay, varía si se sitúa una nueva carga $-q$ en el origen del sistema?

8-3 Supóngase que las cargas de la figura 8-3 se encuentran sobre el eje z con el origen en medio de ellas. Encontrar ϕ exactamente para un punto de campo situado sobre el eje z. ¿Qué tan grande deberá ser z para que se pueda aproximar el potencial exacto sobre el eje z mediante un término dipolar con un grado de exactitud de 1 por ciento? ¿Qué tan grande debe ser z para que se pueda examinar E_z sobre el eje z mediante la expresión dipolar con una exactitud del 1 por ciento?

8-4 Evaluar (8-47) para la distribución de carga de la figura 8-4 y expresar ϕ en coorde-

nadas rectangulares. Utilizar el origen mostrado y tomar las cargas negativas como si estuvieran situadas sobre el eje x y la carga positiva sobre el eje y positivo.

8-5 Se colocan cargas puntuales en los vértices de un cubo de lado a. Las cargas y sus localizaciones son las siguientes: $-3q$ en $(0,0,0)$; $-2q$ en $(a,0,0)$; $-q$ en $(a,a,0)$; q en $(0,a,0)$; $2q$ en $(0,a,a)$; $3q$ en (a,a,a); $4q$ en $(a,0,a)$; $5q$ en $(0,0,a)$. Para esta distribución, encontrar el momento monopolar, el momento dipolar y todas las componentes del tensor del momento cuadripolar. Demostrar que los resultados satisfacen (8-35). Si fuera posible encontrar un origen de coordenadas diferente tal que el momento dipolar se anulara, ¿dónde se localizaría dicho origen?

8-6 Demostrar que la distribución de carga de la figura 8-5b lleva a (8-40), y evaluar Q_a para este caso.

8-7 Una carga lineal de densidad lineal de carga, λ, constante y de longitud L está sobre el primer cuadrante del plano xy con uno de sus extremos en el origen. Forma un ángulo α con el eje x positivo. Encontrar Q, **p** y todas las Q_{jk}. Expresar el término cuadripolar del potencial debido a esta distribución de cargas en función de las coordenadas rectangulares del punto de campo.

8-8 Una esfera de radio a posee una densidad superficial de carga dada en coordenadas esféricas por $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, donde $\sigma_0 = \text{const.}$, y el origen se encuentra en el centro de la esfera. Encontrar Q, **p** y todas las Q_{jk}. Expresar (8-47) para esta distribución de carga en función de las coordenadas esféricas de un punto de campo situado fuera de la esfera.

8-9 La carga se encuentra distribuida con densidad volumétrica, ρ, constante en todo el volumen del cuerpo mostrando en la figura 1-41. Encontrar Q, **p** y todas las Q_{jk}. Interpretar el resultado obtenido para **p**. Considerar entonces el caso especial en que el volumen es un cubo de lado a, y expresar (8-31) en función de las coordenadas esféricas de un punto de campo situado fuera del cubo.

8-10 Si se tiene una distribución de carga cuyo momento monopolar no es igual a cero, demostrar que es siempre posible encontrar un origen tal que el momento dipolar sea cero. A este punto se le llama el *centro de carga* de la distribución.

8-11 Encontrar la expresión análoga a (8-45) para Q_{xx}.

8-12 Una distribución de carga esférica esféricamente simétrica tiene el origen en su centro. Demostrar que **p** y todas las Q_{jk} son iguales a cero.

8-13 Un dipolo puntual, **p**, está situado en el origen pero no tiene ninguna orientación particular con respecto a los ejes de las coordenadas. (Por ejemplo, **p** no es paralelo a ninguno de los ejes.) Expresar su potencial en un punto **r** en coordenadas rectangulares y encontrar las componentes rectangulares de **E**. Demostrar que **E** puede expresarse en la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] \tag{8-84}$$

¿Puede **E** ser igual a cero, además de en el caso en que $r \to \infty$? Si ahora **p** se localiza en $\mathbf{r}'$, en lugar de en el origen, ¿Cómo se puede obtener **E** en **r**?

8-14 La constante K_D en (8-52) que caracteriza una línea de **E** dada, puede relacionarse con la magnitud del campo eléctrico para el punto de la curva que corresponde a $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Encontrar esta relación.

8-15 Evaluar (8-47) para la distribución de carga de la figura 8-5a y expresar el potencial en función de las coordenadas cilíndricas del punto de campo. Supóngase que la figura es un cuadrado de lado a sobre el plano xy, origen en el centro, lados paralelos a los ejes y q en el primer cuadrante. Encontrar las componentes cilíndricas de **E**. Encontrar las curvas

equipotenciales en el plano xy y graficar el resultado. Encontrar la ecuación para una línea de **E** en el plano xy y graficar el resultado.

8-16 La constante K_Q en (8-56) que caracteriza una determinada línea de **E** puede relacionarse con la magnitud E del campo eléctrico para el punto de la curva en el que E_r se vuelve cero. Encontrar esta relación.

8-17 Un dipolo puntual, **p**, en **r** se encuentra en el campo de una carga puntual, q, situada en el origen. Encontrar la energía de **p**, el momento de torsión y la fuerza neta que actúan sobre él.

8-18 El cuadripolo lineal de la sección 8-3 se encuentra en el campo de una carga puntual, q, situada en el origen. Encontrar la energía del cuadripolo y la fuerza traslacional, si es que existe, que actúa sobre él.

8-19 Un dipolo puntual, $\mathbf{p}_1$, está situado en $\mathbf{r}_1$ y otro dipolo puntual, $\mathbf{p}_2$, está en $\mathbf{r}_2$. Demostrar que la energía de $\mathbf{p}_2$ en el campo de $\mathbf{p}_1$ está dada por la *energía de interacción dipolo-dipolo*

$$U_{DD} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3}[(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{R}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{R}})] \tag{8-85}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. ¿Existe alguna diferencia si **R** se traza de 2 a 1? Encontrar la fuerza $\mathbf{F}_2$ sobre $\mathbf{p}_2$. Evaluar $\mathbf{F}_2$ para los siguientes casos especiales: (a) $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ son paralelos entre sí pero perpendiculares a **R**; (b) $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ son paralelos entre sí y también a **R**.

8-20 El cuadripolo lineal de la sección 8-3 está situada en el campo de un dipolo puntual, **p**, situado en el origen. Encontrar la energía del cuadripolo.

8-21 Un cuadripolo lineal, $Q_1{}^a$, está situado en **r** y se encuentra en el campo de otro cuadripolo lineal, $Q_2{}^a$, situado en el origen. Ambos son del tipo descrito en la sección 8-3, es decir, que el eje de simetría de cada uno de ellos es paralelo al eje z. Encontrar la energía de $Q_1{}^a$.

Capítulo

9
Condiciones de frontera en una superficie de discontinuidad

Al tomar en cuenta la posibilidad de que exista materia presente que esté sujeta a la influencia de otras cargas, inmediatamente se crea la necesidad de considerar una situación en la que coincidan dos tipos de materia en una frontera común. Por ejemplo, se podría tener un bloque de cera en contacto con un vidrio, o vidrio en contacto con un conductor o con el vacío, y así sucesivamente. Es de esperarse que estas diferentes clases de materiales tengan "propiedades" electromagnéticas diferentes, de tal forma que estas propiedades cambien abruptamente a medida que se cruza la superficie de separación. Como resultado, es posible que los diversos campos sean diferentes en las dos regiones, y es muy útil conocer qué cambios sufren al cruzar la frontera entre ellas. Estos cambios, o la ausencia de ellos como pudiera ser el caso, reciben a menudo el nombre de "condiciones de frontera", y aquí se les analiza en términos generales.

Como se verá más adelante, estas condiciones de frontera pueden encontrarse para cualquier vector en función de su divergencia y de su rotacional, de modo que resulta conveniente derivarlas aquí. De esta manera se podrá contar con un conjunto de expresiones "prefabricadas" que se pueden aplicar a campos específicos a medida que se requiera.

9-1 Origen de una superficie de discontinuidad

En la figura 9-1 se ilustra lo que se podría llamar la "situación real" en la frontera entre dos materiales o medios, que se han denotado como 1 y 2. Se ha graficado la variación de alguna "propiedad" electromagnética todavía no específica, en función de x; la "frontera" entre el medio 1 y el 2 se indica por medio de la línea llena vertical. A medida que uno se aleja lo suficiente hacia la izquierda, esta propiedad se vuelve constante y completamente característica del medio 1; de manera similar, a medida que uno se aleja hacia la derecha, la propiedad se vuelve otra vez constante, pero con un valor diferente, de modo que no hay duda que se encuentra ya en el medio 2. Como se ilustra, es de esperarse que en un caso real esta propiedad no cambiará en forma abrupta, sino *continuamente*, aunque quizá muy rápido en una región angosta entre los dos medios; a esta región se le llama "capa de transición". Esta expectativa concuerda con la suposición que se ha hecho constantemente de que los campos físicos que se están estudiando son continuos y poseen derivadas continuas. Aunque se indica la anchura de esta capa de transición por medio de las líneas punteadas y se le ha asignado un valor h, no es posible esperar que se lograrán conocer los detalles específicos de lo que realmente ocurre en ella. Por lo tanto, es costum-

bre remplazar esta situación real por una situación *idealizada*, que se muestra en la figura 9-2. Esto se puede lograr si se imagina que la capa de transición se contrajo a una anchura cero, provocando con ello una discontinuidad de las propiedades electromagnéticas. Como resultado de ello, es posible que los campos mismos puedan considerarse como discontinuos en este límite a medida que $h \to 0$, y es eso precisamente lo que se desea considerar.

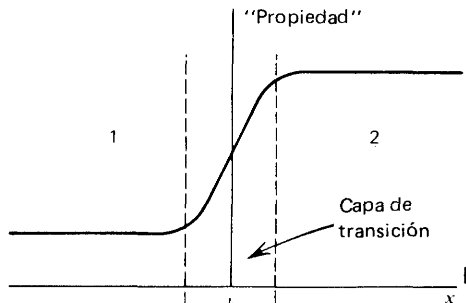


Figura 9-1 El origen físico de una capa de transición entre dos medios.

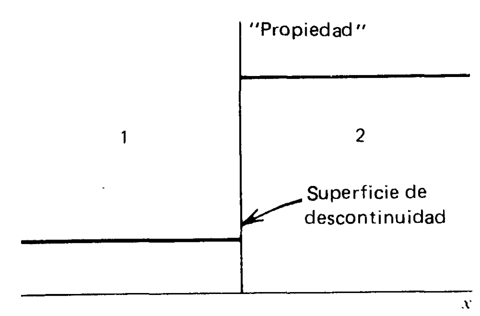


Figura 9-2 La superficie de discontinuidad idealizada entre dos medios.

Supóngase un campo vectorial general, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Como en la sección 1-18, se escriben sus ecuaciones fuente en la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = b(\mathbf{r}) \qquad \text{y} \qquad \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{c}(\mathbf{r}) \tag{9-1}$$

Estas proporcionan la información deseada pero no es posible aplicarlas directamente a una discontinuidad. Lo que se hace es utilizar estas ecuaciones en la capa de transición en la que todo es continuo, y *después* pasar al límite $h \to 0$.

En la figura 9-3 se da una definición importante, muestra la dirección de la normal $\hat{\mathbf{n}}$ a la superficie de discontinuidad. Como está ilustrado

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}_{\text{de 1 a 2}} \tag{9-2}$$

y *siempre* se seguirá esta convención de signos; es muy importante no olvidarla.

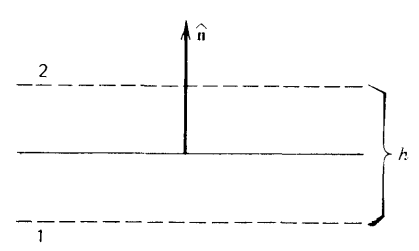


Figura 9-3 Definición de la normal a la superficie de discontinuidad.

9-2 La divergencia y las componentes normales

El teorema de la divergencia (1-59) combinado con (9-1) conduce a

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,d\tau = \int_V b(\mathbf{r})\,d\tau \tag{9-3}$$

Se aplica esto a un pequeño cilindro recto de altura h y sección Δa, construido en la capa de transición como se muestra en la vista de perfil de la figura 9-4. Esto se hace para poder obtener contribuciones de las dos regiones 1 y 2. Las normales exteriores de las caras son $\hat{\mathbf{n}}_2$ y $\hat{\mathbf{n}}_1$, mientras que $\hat{\mathbf{n}}_w$ es una de las normales exteriores de la pared curva. El área Δa debe ser lo suficientemente pequeña para que pueda hacerse la aproximación de que $\mathbf{F}$ es constante en estas caras. (Se contempla la posibilidad de que $\Delta a \to 0$ en un momento dado, con lo que se obtendrían relaciones válidas para un punto; en tal caso las correcciones de orden superior que resulten, por ejemplo, al desarrollar $\mathbf{F}$ en una serie, desaparecerán al ser multiplicadas por Δa en el resultado final, como ya se verá más adelante). La integral de superficie en (9-3) puede expresarse como

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \mathbf{F}_2\cdot\Delta\mathbf{a}_2 + \mathbf{F}_1\cdot\Delta\mathbf{a}_1 + W \tag{9-4}$$

donde $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_1$ son los valores sobre las caras en las respectivas regiones y W es la contribución de la pared curva. W tendrá algún valor finito y se puede escribir que $W \sim h$ por el teorema del valor medio. En la figura se puede observar que $\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}$, de manera que cuando se utiliza (1-52) se pueden expresar (9-4) y (9-3) como

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1)\Delta a + W = \int_V b\,d\tau = (hb)\Delta a \tag{9-5}$$

donde b debería realmente escribirse como su valor promedio en el volumen $h\,\Delta a$; sin embargo, se puede tomar a b como aproximadamente constante en todo este volumen pequeño que después se hará tender a cero.

Se puede ahora iniciar el proceso de límite haciendo que la anchura de la capa de transición se reduzca a cero, haciendo que $h \to 0$ mientras que Δa se mantiene constante. Dado que W es proporcional a h, $W \to 0$ a medida que $h \to 0$. No hay seguridad acerca de cómo se comportará el producto hb, ya que bien podría pasar que b aumentara de manera

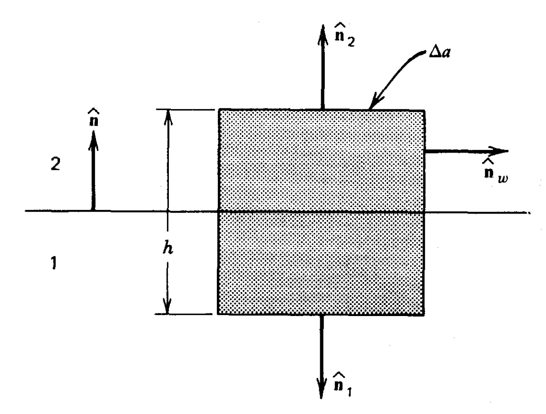


Figura 9-4 Volumen usado para encontrar la condicon de frontera a partir del teorema de la divergencia.

tal en este proceso que $\lim_{h\to 0}(hb)$ siguiese siendo finito. Al realizar esto con (9-5), se observa que es posible cancelar Δa de ambos miembros del resultado, obteniendo así la siguiente expresión aplicable a la situación en la superficie de discontinuidad:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{F}_2-\mathbf{F}_1)=\lim_{h\to 0}(hb)=\lim_{h\to 0}(h\nabla\cdot\mathbf{F}) \tag{9-6}$$

Dado que $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{F}=\mathbf{F}_n$ es la componente normal de $\mathbf{F}$, es decir, la que se encuentra en la misma dirección que la normal, de acuerdo con (1-21) se puede escribir también (9-6) como

$$F_{2n}-F_{1n}=\lim_{h\to 0}(hb)=\lim_{h\to 0}(h\nabla\cdot\mathbf{F}) \tag{9-7}$$

Puesto que esta diferencia pudiera no ser igual a cero, se tiene la posibilidad de una discontinuidad en las componentes normales del vector $\mathbf{F}$.

9-3 El rotacional y las componentes tangenciales

El teorema de Stokes (1-67) combinado con (9-1) conduce a

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{a}=\int_S \mathbf{c}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{a} \tag{9-8}$$

Se aplica esto a una pequeña trayectoria rectangular construida en la capa de transición y perpendicular a la superficie de discontinuidad, como se muestra en la figura 9-5; los lados de longitud Δs dan contribuciones de ambas regiones. Las flechas indican el sentido de la integración a lo largo de la trayectoria C; $\hat{t}_1$ y $\hat{t}_2$ son vectores unitarios en sus direcciones respectivas de integración y son paralelos a la superficie de discontinuidad. El vector $\hat{\mathbf{n}}'$ es el vector normal a la superficie encerrada por la trayectoria y es paralelo a la superficie entre 1 y 2; así $\hat{\mathbf{n}}'$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$, el vector normal a la superficie. La figura también muestra un vector tangencial, $\hat{\mathbf{t}}$, paralelo al plano de C definido de manera tal que $\hat{\mathbf{t}}_2=\hat{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{t}}_1=-\hat{\mathbf{t}}$. Por lo tanto, $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{n}}'$ forman un conjunto de vectores unitarios mutuamente perpendiculares que satisfacen las relaciones análogas a (1-25), es decir,

$$\hat{\mathbf{n}}'=\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{t}} \qquad \hat{\mathbf{t}}=\hat{\mathbf{n}}'\times\hat{\mathbf{n}} \qquad \hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{t}}\times\hat{\mathbf{n}}' \tag{9-9}$$

El área vectorial del rectángulo, según (1-52), es $\hat{\mathbf{n}}'h\Delta s$. Al aplicar (9-8) a esta situación se obtiene

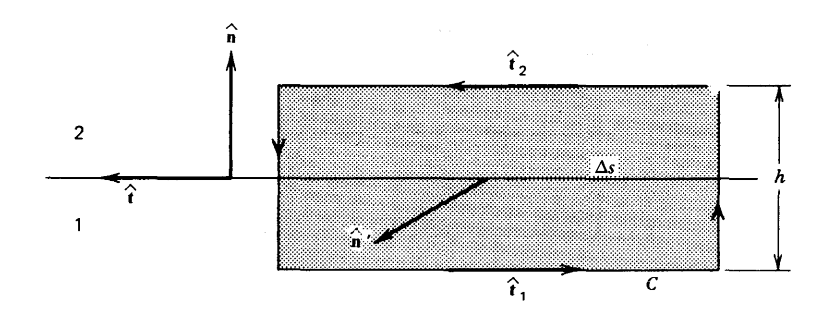


Figura 9-5 Superficie usada para encontrar la condición de frontera a partir del teorema de Stokes.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F}_2\cdot\hat{\mathbf{t}}_2\Delta s + \mathbf{F}_1\cdot\hat{\mathbf{t}}_1\Delta s + \mathcal{W}$$

$$= \hat{\mathbf{t}}\cdot(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1)\Delta s + \mathcal{W} = \mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{n}}' h\Delta s \qquad (9\text{-}10)$$

donde $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_1$ son los valores de $\mathbf{F}$ en sus respectivas regiones, y $\mathcal{W}$ es la contribución a la integral de línea que resulta de los extremos de la trayectoria. De nuevo, desde un punto de vista estricto, los valores de $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{c}$ son valores promedio, pero como Δs y $h\Delta s$ son muy pequeños, se pueden tomar los vectores como casi constantes. Si se remplaza $\hat{\mathbf{t}}$ por la expresión central de (9-9) y se utiliza (1-29), se puede escribir (9-10) como

$$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\left[\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) - h\mathbf{c}\right]\Delta s + \mathcal{W} = 0 \qquad (9\text{-}11)$$

Se deja ahora que la capa de transición vuelva a encogerse a cero, de modo que $h\rightarrow 0$ mientras que Δs se mantiene constante. De manera similar a la anterior $\mathcal{W}$ será proporcional a h y se anulará en este proceso. Una vez realizado lo anterior, se observa que Δs puede cancelarse de ambos miembros de lo que queda de (9-11), por lo que se llega a

$$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\left[\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) - \lim_{h\to 0}(h\mathbf{c})\right] = 0 \qquad (9\text{-}12)$$

La orientación de la trayectoria de integración fue completamente arbitraria, por lo que $\hat{\mathbf{n}}'$ corresponde a una dirección arbitraria en la superficie. La única posibilidad de que (9-12), sea siempre verdadera bajo estas circunstancias se tiene cuando el término entre corchetes se anula; así se obtiene

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = \lim_{h\to 0}(h\mathbf{c}) = \lim_{h\to 0}\left[h(\nabla\times\mathbf{F})\right] \qquad (9\text{-}13)$$

como resultdo final.

Se puede poner (9-13) en una forma más fácil de interpretar. Escríbase primero $\mathbf{F}$ como la suma de su componente normal a la superficie de separación (la componente normal $\mathbf{F}_n$) y su componente paralela a la superficie (la componente tangencial $\mathbf{F}_t$ es decir,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t = F_n\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{F}_t \qquad (9\text{-}14)$$

en consecuencia,

$$\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{F} = F_n\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{F}_t = \hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{F}_t \qquad (9\text{-}15)$$

debido a (1-24). Usando este resultado, se observa que (9-13) en realidad incluye solamente las componentes tangenciales de $\mathbf{F}$:

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{F}_{2t} - \mathbf{F}_{1t}) = \lim_{h\to 0}(h\mathbf{c}) \qquad (9\text{-}16)$$

Se puede, de hecho, escribir este resultado de una forma aún más explícita en función de las componentes tangenciales. Por medio de (1-23), (1-30), (1-17) y (9-14) se encuentra que

$$(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{F})\times\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F} - F_n\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}_t \qquad (9\text{-}17)$$

Así, al realizar un producto cruz de ambos miembros de (9-13) con $\hat{\mathbf{n}}$ y utilizar (9-17), se obtiene

$$\mathbf{F}_{2t}-\mathbf{F}_{1t}=\lim_{h\to 0}\left[h(\mathbf{c}\times\hat{\mathbf{n}})\right]=\lim_{h\to 0}\left\{h\left[(\nabla\times\mathbf{F})\times\hat{\mathbf{n}}\right]\right\} \tag{9-18}$$

y si esta diferencia no es igual a cero, se tiene discontinuidad en las componentes tangenciales de **F**.

Al combinar estos resultados con los obtenidos en la sección anterior, se puede ver que se ha logrado obtener una manera de encontrar cómo cambia el vector **F** *en* la superficie de discontinuidad, a medida que se *atraviesa* la superficie de frontera. Supóngase que se conoce $\mathbf{F}_1$. El primer paso consiste en descomponerlo en sus componentes normal y tangencial, $\mathbf{F}_{1n}$ y $\mathbf{F}_{1t}$. Se obtiene la componente normal de $\mathbf{F}_2$ por medio de (9-7) y su componente tangencial por (9-18). Conociéndolas, se puede obtener el vector $\mathbf{F}_2$ al combinarlas de acuerdo con (9-14). Dado que en principio, tanto la componente normal como la tangencial pueden cambiar a medida que se atraviesa la superficie de frontera, se observa que el vector $\mathbf{F}_1$ puede tener magnitud y dirección diferentes a ambos lados de la superficie de discontinuidad.

9-4 Condiciones de frontera para el campo eléctrico

Hasta ahora, el único campo vectorial que se ha considerado es el campo eléctrico **E**, pero ya se ha encontrado la información acerca de él que se puede necesitar, es decir,

$$\nabla\times\mathbf{E}=0 \qquad \text{y} \qquad \nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9-19}$$

de acuerdo con (5-4) y (4-10). Por comparación con (9-1), se observa que en este caso

$$\mathbf{c}=0 \qquad \text{y} \qquad b=\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9-20}$$

Al aplicar la primera de éstas a (9-18), se ve inmediatamente que las componentes tangenciales de **E** no sufren cambio, o sea, que son *continuas* a través de la superficie de discontinuidad:

$$\mathbf{E}_{2t}-\mathbf{E}_{1t}=0 \tag{9-21}$$

o, simplificando,

$$E_{2t}=E_{1t} \tag{9-22}$$

dado que las componentes tangenciales son paralelas entre sí. [Más adelante se verá que (9-21) resulta ser verdadera bajo cualquier cincunstancia].

Si se utiliza el valor de **b** dado en (9-20), se observa que

$$\int_V b\,d\tau=\frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho d\tau=\frac{\rho h\Delta a}{\epsilon_0}=\frac{\Delta q}{\epsilon_0} \tag{9-23}$$

donde Δq es la carga total contenida en el volumen $h\Delta a$ de esta porción de la capa de transición. Esta carga Δq puede surgir debido a las propiedades de los dos medios, como

se verá en el siguiente capítulo, o puede estar ahí porque ahí se encontraba desde el inicio. De cualquier manera, cuando se imagina que la capa de transición se encoge a una anchura cero para producir el caso idealizado de la figura 9-2, esta carga total Δq debe conservarse. En el límite, la carga debe describirse entonces como una *carga superficial* con alguna densidad σ tal que $\Delta q = \sigma\Delta a$. Por lo tanto, se tiene

$$\Delta q = \sigma\Delta a = \left(\lim_{h\to 0} h\rho\right)\Delta a$$

de manera que

$$\sigma = \lim_{h\to 0}(h\rho) \tag{9-24}$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}(hb) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{9-25}$$

en este caso. Al sustituir esto en (9-6) se encuentra que la condición de frontera que deben satisfacer las componentes normales del campo eléctrico es

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{9-26}$$

Así, existe una discontinuidad en las componentes normales de **E** *únicamente* si existe una carga superficial sobre la superficie de separación de las dos regiones. (Esto también resultará cierto bajo toda circunstancia).

La figura 9-6 ilustra la aplicación de (9-22) y (9-26) para encontrar la relación entre $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$; la figura se dibujó bajo la suposición de que

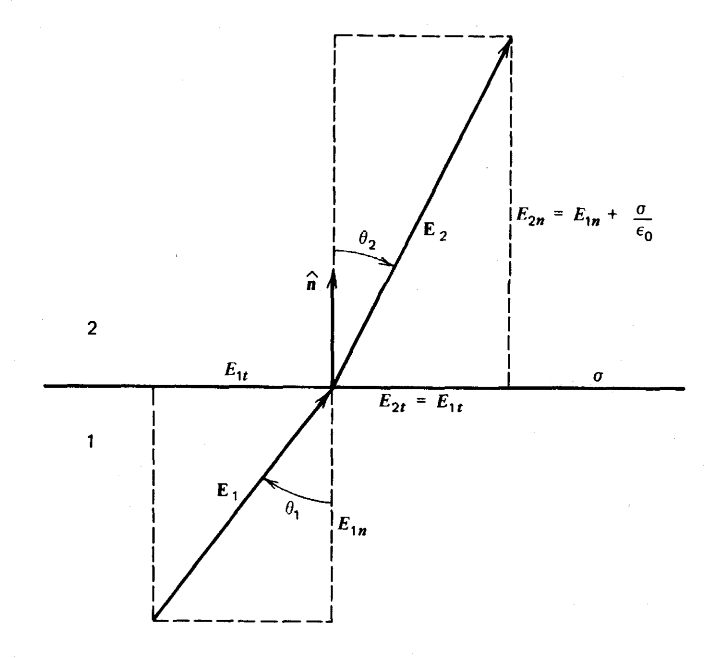


Figura 9-6 Refracción de las líneas de campo eléctrico en una superficie de discontinuidad cargada.

$\mathbf{E}_1$ ya era conocido y que σ es positiva. Si θ_1 y θ_2 son los ángulos que el campo forma con la normal, se observa de la construcción de la figura que $\theta_2 < \theta_1$; en otras palabras, el vector **E** es "refractado" al cruzar la frontera. En este caso, su dirección cambia acercándose más a la normal. Si σ fuera negativa, **E** se refractaría alejándose de la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ y $\theta_2 > \theta_1$.

Analícese ahora qué tanto concuerdan los resultados obtenidos en esta sección con algunos de los resultados previos de **E**.

Ejemplo

Plano infinito uniformemente cargado. Como se aprecia en (3-12), el campo eléctrico posee la magnitud constante $E = \sigma/2\epsilon_0$ y se dirige hacia afuera del plano cargado como se muestra para una σ positiva en la figura 9-7. En este caso, la superficie no separa dos regiones de diferentes propiedades, ya que se había supuesto la existencia del vacío a ambos lados, pero los resultados obtenidos son realmente aplicables a cualquier superficie. Se observa que $\mathbf{E}_2 = E\hat{\mathbf{n}}$ y que $\mathbf{E}_1 = -E\hat{\mathbf{n}}$, debido a (9-2) y a la elección de la nomenclatura para las regiones. Dado que no existen componentes tangenciales, (9-22) se satisface automáticamente. Al aplicar (9-26) se obtiene

$$E_{2n} - E_{1n} = E - (-E) = 2E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

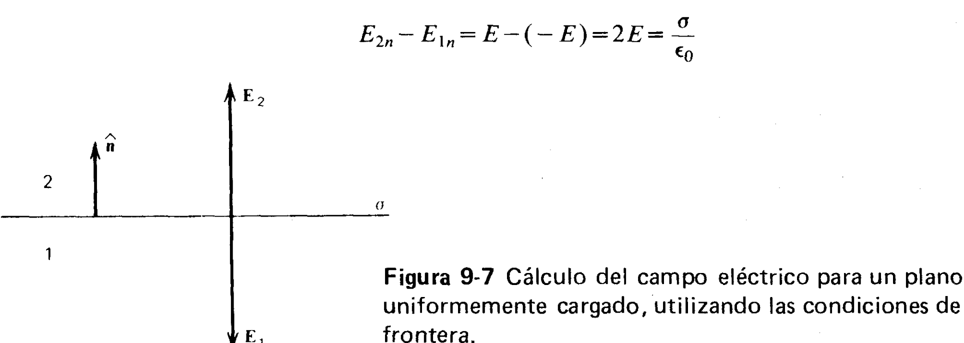


Figura 9-7 Cálculo del campo eléctrico para un plano uniformemente cargado, utilizando las condiciones de frontera.

de manera que $E = \sigma/2\epsilon_0$ concuerda perfectamente con (3-12). (De hecho, ya se había hablado de este resultado en la última frase de la sección 3-3).

Ejemplo

Superficie de un conductor. Aquí tampoco existen componentes tangenciales y la situación es la que se muestra en el figura 6-1**b**. Si se le llama 1 a la región del conductor y2 a la región al vacío fuera de él, entonces $\hat{\mathbf{n}}$ será la normal exterior de la superficie del conductor. En este caso, $E_{1n} = 0$ debido a (6-1) y $E_{2n} = E$, de tal manera que (9-26) queda $E_{2n} - E_{1n} = E = \sigma/\epsilon_0$, concordando exactamente con (6-4), que fue obtenida por otros medios.

Por lo tanto, estos dos ejemplos concuerdan con los resultados generales que se obtuvieron y, de paso, demuestran que el uso de las condiciones de frontera, de esta manera resulta ser una forma rápida para calcular el campo en situaciones suficientemente simples.

9-5 Condiciones de frontera para el potencial escalar

Dado que ϕ es un campo escalar en lugar de vectorial, no se pueden utilizar los resultados generales obtenidos en las secciones 9-2 y 9-3 para estudiar su comportamiento en una superficie de discontinuidad. Sin embargo, se puede lograr este propósito fácilmente a

través de (5-11). Si ϕ_2 y ϕ_1 son los valores de ϕ a cada lado de la capa de transición, se tiene

$$\phi_2-\phi_1=-\int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{9-27}$$

donde la integración se realiza sobre cualquier trayectoria conveniente a través de la capa de transición. Si se elige esta trayectoria en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$, se puede escribir entonces (9-27) como

$$\phi_2-\phi_1=-\int_1^2 E_n\,ds=-\langle E_n\rangle h \tag{9-28}$$

donde $\langle E_n\rangle$ es el valor promedio de la componente normal de **E** en la capa de transición de anchura h. En cualquier situación física real, el campo eléctrico no será infinito cuando $h\to 0$, ya que ello implicaría una fuerza infinita sobre una carga puntual. En realidad, como se vio en (9-26), lo más que podría ocurrir es que E_n tuviera una discontinuidad, pero seguiría siendo finito. Por lo tanto, $\langle E_n\rangle$ será siempre finito, de manera que $\lim_{h\to 0} \langle E_n\rangle h=0$ y (9-28) da entonces

$$\phi_2=\phi_1 \tag{9-29}$$

Así, el potencial escalar deberá ser continuo a través de una superficie de discontinuidad.

Aunque ϕ es continuo, sus derivadas normales a la superficie no necesariamente lo son. Por (1-21) y (5-3) se tiene que

$$E_n=-\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\phi \tag{9-30}$$

de manera que se puede escribir (9-26) en función del potencial como

$$(\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\phi)_2-(\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\phi)_1=-\frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{9-31}$$

[Mientras que (9-29) es correcta para cualquier situación física real, ocasionalmente se manejan *idealizaciones matemáticas* que dan por resultado una discontinuidad de ϕ a través de la superficie. El ejemplo más común de esto es una "capa dipolar" que resulta al suponer que la superficie de separación contiene dipolos eléctricos del tipo que se estudia en el siguiente capítulo, pero con una separación infinitesimal entre las cargas de signo opuesto. Sin embargo, aquí no se considera necesario entrar en detalles acerca de tales casos especiales].

Ejercicios

9-1 La superficie de separación entre las regiones 1 y 2 es un plano cuya ecuación es $2x+y+z=1$. Si $\mathbf{E}_1=4\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}-3\hat{\mathbf{z}}$, encontrar las componentes normal y tangencial de $\mathbf{E}_1$.

9-2 La relación física real entre $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ no puede depender de la elección arbitraria de la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$. Demostrar que si la dirección del vector unitario normal se definiera *de* la región 2 *a* la región 1, la relación entre $\mathbf{E}_2$ y $\mathbf{E}_1$ que se muestra en la figura 9-6 no se alteraría.

9-3 Una esfera de radio a tiene su centro en el origen. Dentro de la esfera, el campo eléctrico está dado por $\mathbf{E}_1 = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}} + \gamma\mathbf{z}$, donde α,β,γ son constantes. Existe una densidad superficial de carga sobre la superficie de la esfera, dada en coordenadas esféricas por $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, donde σ_0=const. Encuentre $\mathbf{E}_2$ en todos los puntos justo afuera de la esfera y expréselo en coordinadas rectangulares.

9-4 Demostrar que los ángulos de la figura 9-6 están relacionados entre sí por

$$\tan\theta_2 = \frac{\tan\theta_1}{1 + \left(\dfrac{\sigma}{\epsilon_0 E_1 \cos\theta_1}\right)}$$

¿Cómo se relacionarían los ángulos si $\mathbf{E}_1$ fuera muy grande? ¿Es esto razonable?

9-5 En la figura 9-8 se muestran dos puntos, P_2 y P_1, situados en dos medios distintos pero justamente enfrente uno del otro y muy próximos a la superficie de separación. El punto P_3 se localiza en la orilla de la interfase, dondequiera que ésta quede. Utilizar (9-27) para encontrar la diferencia de potencial entre P_2 y P_3 al seguir una trayectoria de integración en la dirección de la superficie de separación pero del lado de la región 2, como se indica con la flecha curva. (¿Por qué está bien esto?) De manera similar, encontrar la diferencia de potencial entre P_1 y P_3 manteniéndose del lado de la región 1 pero pegado a la superficie. A partir de los resultados obtenidos, demostrar una vez más que los potenciales en P_2 y P_1 son iguales, en concordancia con (9-29).

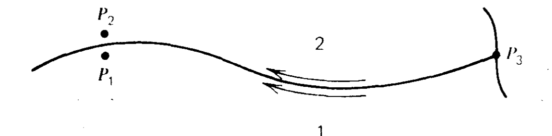


Figura 9-8 Trayectoria de integración para el ejercicio 9-5.

Capítulo 10
Electrostática en presencia de materia

Como se comentó antes, aquí se considera que la materia es una colección de las cargas positivas y negativas de los núcleos y electrones que la forman. Se supone que una cantidad dada de materia está hecha de átomos y moléculas que tienen igual cantidad de cargas positivas y negativas, es decir, cuyos momentos monopolares son iguales a cero. En el capítulo 6 se consideró una clase especial de materia—los conductores—que posee cargas que son libres de moverse bajo la influencia de campos. En este capítulo se tratará con materia que no es conductora. A esta última clase de materia se le denomina *dieléctrica*, y de sus cargas se dice que son *cargas ligadas*. No siempre es posible hacer una distinción clara y precisa acerca de si una sustancia dada es un conductor o un dieléctrico (aislante), pero sigue siendo útil mantener estas dos categorías como esquema de clasificación. Más adelante se combinan estas dos propiedades en una descripción global.

10-1 Polarización

Aunque el objetivo principal aquí es desarrollar una descripción macroscópica empírica del electromagnetismo, se seguirá usando una imagen microscópica de la materia desde un punto de vista cualitativo a fin de obtener una clara idea de cómo proceder. Existen varias posibilidades cuando se trata de considerar el efecto de un campo eléctrico sobre un átomo o una molécula.

En ausencia de un campo eléctrico, puede muy bien suceder que la molécula tenga su carga electrónica negativa simétricamente distribuida alrededor de sus núcleos positivos. En este caso, la molécula tiene un momento dipolar igual a cero, como puede inferirse fácilmente de (8-22). Si existe un campo eléctrico presente, existirán fuerzas que actúen sobre las cargas. Las cargas positivas tenderán a moverse en la dirección del campo, y las cargas negativas en dirección contraria. En un momento dado, las fuerzas internas en la molécula producirán un nuevo estado de equilibrio, pero la distribución de carga molecular habrá sufrido una distorsión en su forma original esféricamente simétrica. Así, las cargas negativas y positivas que antes "coincidían" habrán sufrido un desplazamiento de sus "centros de gravedad", y el resultado neto será una nueva distribución de carga de más o menos la forma que se muestra en la figura 8-3. Pero, como ya se sabe, esto significa que la molécula tendrá ahora un momento dipolar no nulo, y probablemente otros multipolos de

mayor orden también. Se dice en este caso que la molécula tiene un *momento dipolar inducido* y que se ha *polarizado.*

Una segunda posibilidad es que, debido a su estructura interna, algunas moléculas ya tengan sus distribuciones de carga positiva y negativa separadas, de modo que ya exista un momento dipolar aún en ausencia del campo eléctrico. Tales moléculas reciben el nombre de *moléculas polares* y a su momento dipolar se le llama *momento dipolar permanente*; el momento monopolar sigue siendo cero, desde luego. Un ejemplo de este caso es la molécula del agua, H_2O. Sus cargas negativas tienden a agruparse más alrededor del oxígeno, dejando a los hidrógenos cargados positivamente; el resultado neto es una distribución de carga parecida a la de la figura 8-4 (con los signos intercambiados) y con q aproximadamente igual a e, la magnitud de la carga electrónica. En ausencia de una campo eléctrico, estos momentos dipolares permanentes estarán, por lo general, orientados al azar, de manera que el momento dipolar *total* de todas las moléculas que forman ese trozo de materia seguirá siendo igual a cero. En presencia de un campo, sin embargo, existirá una torsión vectorial sobre el dipolo que tenderá a hacerlo rotar en la dirección del campo, tal como se vio en (8-75). Es lógico suponer que esta tendencia encontrará oposición en otras fuerzas internas del sistema y, en especial en los casos de gases y líquidos, por agitación térmica de las moléculas, que provocará colisiones entre ellas con la consiguiente tendencia a producir una distribución azarosa. Pero cuando el nuevo equilibrio se logra, es de esperarse que los dipolos permanentes hayan girado, en promedio, hasta un cierto grado de alineamiento con el campo eléctrico. Así, se puede concluir que este material también se ha polarizado, pues en conjunto presentará un momento dipolar neto en la dirección del campo.

Una última posibilidad consiste en que los momentos dipolares permanentes de algunos materiales se encuentren alineados de cierta manera aún en ausencia del campo eléctrico. A tales materiales se les denomina *electretos* y se dice que están polarizados permanentemente. Son comparativamente escasos, y no comparten la importancia comercial y técnica de sus análogos magnéticos —los imanes permanentes.

Como ya se vio arriba, es razonable pensar que las moléculas, especialmente al distorsionarse por el campo, tengan multipolos de orden superior, como los momentos cuadripolares, además de sus momentos dipolares. Por otro lado, en el capítulo 8 se vio que las contribuciones de estos otros multipolos al potencial y al campo decrecen mucho más rápidamente con la distancia a la molécula y que, además, sus contribuciones variarán, por lo general, de acuerdo con el ángulo de una manera mucho más complicada. Dado que se trata de obtener una descripción macroscópica en función del comportamiento microscópico *promedio* de los constituyentes de la materia, aquí se supondrá que, en promedio, las características dominantes de la materia que pueden ser de interés para este propósito son aquéllas asociadas exclusivamente con los momentos dipolares eléctricos. Así, todas estas consideraciones desembocan en la siguiente:

Hipótesis

En lo que concierne a sus propiedades eléctricas, la materia neutra es equivalente a una configuración de dipolos eléctricos.

Aunque se trata obviamente de una hipótesis, resulta claro que ésta debió funcionar muy bien en el desarrollo de este tema. El siguiente problema será tratar de formular esta hipótesis cuantitativamente.

Para ello, se define la *polarización* $\mathbf{P}$ como el momento dipolar por unidad de volumen, de manera que el momento dipolar total, $d\mathbf{p}$, en un pequeño volumen $d\tau$ centrado en $\mathbf{r}$ será

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r})\, d\tau \tag{10-1}$$

Por tanto, el momento dipolar de un volunen V de material será

$$\mathbf{p}_{\text{total}} = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r})\, d\tau \tag{10-2}$$

De su definición y de (8-19) se desprende que **P** se deberá medir en coulombs/metro^2. **P** será generalmente una función de la posición en el material, como está implícito en (10-1) y (10-2). Al igual que cuando se introdujo la densidad de carga en la sección 2-4, se supone que $d\tau$ es pequeño a escala macroscópica pero grande desde el punto de vista de la escala atómica, de manera que $d\tau$ contiene muchas moléculas. Esto hace posible obtener **P** como un promedio en volúmenes lo suficientemente grandes para que las ligeras fluctuaciones en el número de moléculas en un elemento de volumen dado no impida manejar a **P** como una función que varía en forma suave con la posición. Por ejemplo, si existen n moléculas por unidad de volumen, cada una de ellas con un momento dipolar **p**, entonces $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$, siempre y cuando todos los dipolos se encuentren en la misma dirección.

Debido a la manera como se llegó a definir la polarización es de esperarse que exista una relación funcional entre **P** y **E**, y más adelante habrá que considerar el problema de calcular **P**. Por ahora, simplemente se le considera una descripción del material, y se procederá a investigar las consecuencias de su existencia.

10-2 Densidades de carga ligada

Supóngase que se tiene un objeto polarizado y que se desea calcular el potencial que producirá en un punto de campo **r** situado fuera del cuerpo, tal como se indica en la

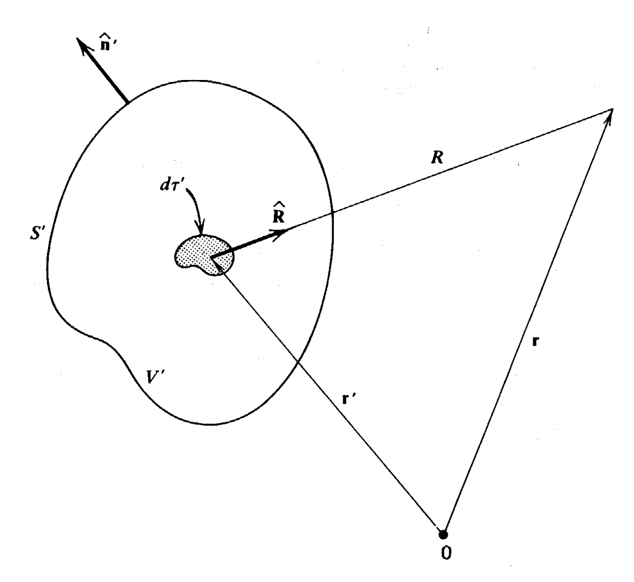


Figura 10-1. Cálculo del potencial fuera de un cuerpo polarizado.

figura 10-1. El momento dipolar del elemento de volumen $d\tau'$, dado por (10-1), es $d\mathbf{p}' = \mathbf{P}(\mathbf{r}')d\tau'$ y su contribución al potencial en **r** se obtiene de (8-21) como

$$d\phi = \frac{d\mathbf{p}'\cdot\hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\hat{\mathbf{R}}\,d\tau'}{4\pi\epsilon_0 R^2} \tag{10-3}$$

donde, como siempre, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y corresponde a la $\mathbf{r}$ de (8-21). Para encontrar el potencial total, éste se integra sobre el volumen total V' del material, obteniéndose

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\hat{\mathbf{R}}\,d\tau'}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)d\tau' \tag{10-4}$$

al usar (1-143). Esto puede escribirse de una mejor manera si se utiliza (1-117) para escribir el integrando como

$$\mathbf{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\nabla'\cdot\mathbf{P}}{R} + \nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{P}}{R}\right) \tag{10-5}$$

Si se sustituye esto en (10-4) y se usan (1-59) y (1-52) se obtiene

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{(-\nabla'\cdot\mathbf{P})\,d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{P}}{R}\right)d\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{(-\nabla'\cdot\mathbf{P})\,d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S'} \frac{\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}'\,da'}{R}\end{aligned} \tag{10-6}$$

donde S' es la superficie limitante de V' y $\hat{\mathbf{n}}'$ es la normal exterior de la superficie, como se muestra en la figura. Al comparar esto con (5-7) y (5-8), se observa que (10-6) es *exac-*

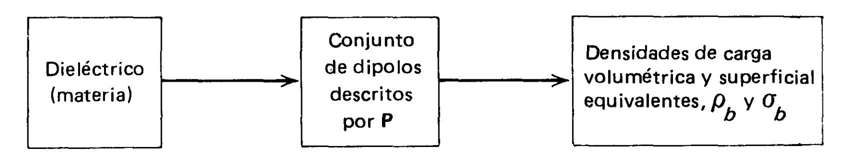


Figura 10-2. Esquema conceptual para el remplazo de un dieléctrico por densidades equivalentes de carga.

tamente el potencial ϕ que producirían una densidad de carga volumétrica ρ_b distribuida en todo el volumen y una densidad superficial de carga σ_b sobre la superficie limitante, siendo

$$\rho_b = -\nabla'\cdot\mathbf{P} \tag{10-7}$$

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}' = P_n \tag{10-8}$$

pues así se tendría

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho_b\,d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint_{S'} \frac{\sigma_b\,da'}{R} \tag{10-9}$$

como cabría esperar. [En (10-8), P_n es el componente normal de $\mathbf{P}$ evaluada *sobre* la superficie.]

Por lo tanto, se ha descubierto que, en lo que toca a sus efectos sobre el exterior, el dieléctrico puede ser *remplazado* por una distribución de densidades volumétrica y superficial de carga que se relacionan con la polarización **P** por medio de (10-7) y (10-8). Los diversos pasos que se siguieron para llegar a este esquema conceptual se resumen e ilustran en la figura 10-2. El potencial *total* en el punto de campo estará dado por (10-9) *más* el potencial debido a cualesquiera otras cargas que se encontrasen presentes.

Es práctica común omitir las primas en (10-7) para escribir simplemente

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \tag{10-10}$$

entendiéndose que se diferencia con respecto a las coordenadas del punto fuente.

El subíndice b que aparece en (10-7), (10-8) y (10-10) refleja el hecho de que estas densidades de carga surgen de cargas *ligadas* (en inglés: *bound*) del dieléctrico. En consecuencia, generalmente se les llama *densidades de carga ligada* o *densidades de carga de polarización.*

Aunque estas cantidades se identificaron por medio de comparaciones formales con la expresión del potencial en su forma general, es posible entender y calcular el origen de estas densidades de una manera más directamente "física"; sin embargo, aquí sólo se hará cualitativamente. Como un ejemplo extremo considérese un pedazo de material de polarización uniforme producida por dipolos de la misma magnitud, todos apuntando en la misma dirección, como se muestra en la figura 10-3. Como en la figura 8-3 se puede asociar una carga positiva a la punta de la flecha y una carga negativa de la misma magnitud a la cola de la flecha. Así, en un volumen pequeño dentro del material, indicado por la línea punteada, se tendrá en promedio el mismo número de cargas positivas que negativas, de manera que $\rho_b = 0$, de acuerdo con (10-10). Sin embargo, no podrá existir tal cancelación en las superficies, por lo que producirá una densidad superficial de carga del signo

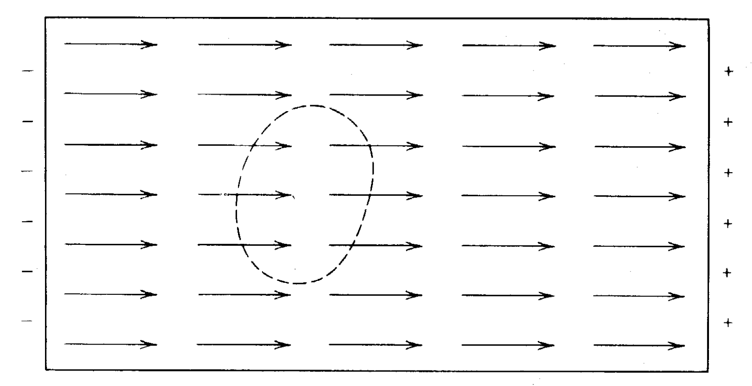


Figura 10-3. Origen de las cargas ligadas superficiales en un dieléctrico uniformemente polarizado.

indicado en cada caso; estos signos van de acuerdo con (10-8), dado que P_n es positiva para el lado derecho de la figura y negativa para el lado izquierdo. Supóngase ahora que **P** no es uniforme, de modo que la distribución de los dipolos pueda parecerse a la de la figura 10-4, ya que los dipolos pueden variar tanto en magnitud como en dirección. Considérese un volumen fijo de material como el indicado por la línea punteada. Antes de que se polarizara la materia, este volumen contenía muchas moléculas neutras, así que $\rho_b = 0$. Una vez que se ha polarizado el material y se han formado los dipolos, algunas de las cargas se habrán salido del volumen mientras que otras habrán ingresado en él. Si **P** no es unifor-

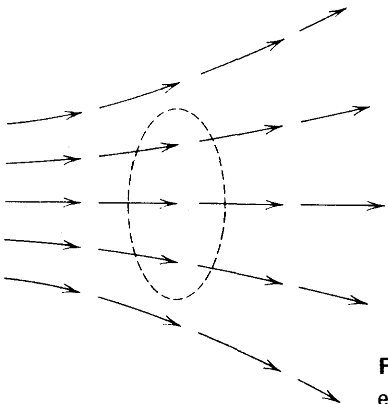


Figura 10-4. Origen de las cargas ligadas volumétricas en un dieléctrico con polarización no uniforme.

me, se puede observar que podría ocurrir que el volumen terminara con más cargas de un signo que del otro, por lo que habría una densidad de carga ligada neta en él. Este es exactamente el efecto que se describe en (10-10) y, de hecho, se pueden usar consideraciones de este tipo como otra alternativa para derivar $\rho_b = -\nabla \cdot P$.

Supóngase que se tienen dos dieléctricos polarizados que se tocan en una superficie común, como se muestra en la figura 10-5. Como cada uno de ellos tiene una componente de polarización normal a la superficie, se producirá una carga superficial dada por (10-8); la densidad superficial de carga neta $\sigma_{b,\text{neta}}$ será la suma de estos dos términos, de modo que

$$\sigma_{b,\text{ neta}} = \sigma_{b2} + \sigma_{b1} = P_{n2} + P_{n1} = \mathbf{P}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2' + \mathbf{P}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1' \tag{10-11}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_2'$ y $\hat{\mathbf{n}}_1'$ son las normales exteriores de los medios respectivos. Si ahora se introduce el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ que apunta de 1 a 2 como se definió en (9-2), se puede observar que $\hat{\mathbf{n}}_2' = -\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\mathbf{n}}_1' = \hat{\mathbf{n}}$, de manera que (10-11) queda

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = -\sigma_{b,\text{ neta}} \tag{10-12}$$

Este mismo resultado se puede obtener aplicando (9-6) y (9-24) a este caso, el cual queda descrito por (10-10); así, (10-7) y (10-8) son consistentes entre sí.

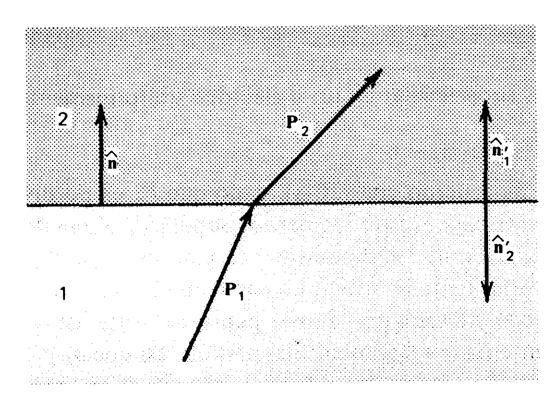


Figura 10-5. Una frontera entre dos regiones de diferente polarización.

Para demostrar más ampliamente la consistencia interna de estos resultados, encuéntrese la carga ligada total, Q_b, de un dieléctrico polarizado de dimensiones finitas. De acuerdo con (2-14) y (2-16), estará dada por

$$Q_b = \int_{V'} \rho_b \, d\tau' + \oint_{S'} \sigma_b \, da' = -\int_{V'} \nabla' \cdot \mathbf{P} \, d\tau' + \oint_{S'} \sigma_b \, da'$$

$$= -\oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da' + \oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \, da' = 0 \qquad (10\text{-}13)$$

usando (10-7), (10-8) y (1-59). Por lo tanto, la carga ligada total es igual a cero. Y esto es precisamente lo que se podría esperar si se le considera a la polarización como una *separación* de las cargas en un medio originalmente neutro, en vez de considerarla como una creación de carga nueva. (En el caso de dipolos permanentes, el origen de la polarización se basa en la reorientación de la carga ya separada con anterioridad, pero esto no involucra tampoco la creación de carga).

10-3 Campo eléctrico dentro de un dieléctrico

Hasta ahora todos los resultados se han obtenido considerando el potencial, y el correspondiente campo eléctrico, en una punto de campo en el vacío, fuera del cuerpo dieléctrico. La razón fue que si no había problema en cuanto a la interpretación del campo eléctrico en el sentido de (3-14), ya que se puede colocar una carga de prueba en ese punto y medir la fuerza ejercida sobre ella sin ningún problema. Sin embargo, al estudiar la situación dentro del dieléctrico no es posible medir la fuerza sobre una carga de prueba sin, por ejemplo, barrenar el material para poder introducir dicha carga de prueba. Pero si esto se hiciera, sería fácil predecir una alteración en la situación preexistente por el solo hecho de haber retirado algunas cargas ligadas volumétricas e introducido algunas cargas superficiales nuevas, ya que esto crearía una nueva superficie limitante. Existen varias formas de contestar a la pregunta de qué se entiende por campo eléctrico dentro del dieléctrico.

Lo más sencillo, y probablemente lo mejor, es calcular el potencial y su campo eléctrico asociado dentro del dieléctrico en exactamente la misma manera como si se tratara de un punto fuera de él. En otras palabras, se dice que (10-6) o (10-9) pueden usarse para calcular ϕ en cualquier punto, por definición. Ciertamente no hay nada malo en esto y es algo perfectamente razonable; es consistente con el remplazo conceptual del dieléctrico por un conjunto de distribuciones volumétricas y superficiales equivalentes de cada carga ligada, como se muestra en la figura 10-2. Se estudió este procedimiento anteriormente en la sección 3-4, y se puede volver a apuntar que la meta básica es desarrollar una descripción macroscópica del electromagnetismo que *esté de acuerdo con la experimentación.* Se volverá a tocar este punto más adelante.

Otra manera de resolver el problema es empezar con una imagen *microscópica* de la situación y tratar de determinar las ecuaciones macroscópicas como promedios adecuados. Este es un programa muy complicado de realizar con precisión para todo el electromagnetismo, por lo que deberá ser suficiente un breve bosquejo de qué es lo que ocurre en la electrostática. A esta escala, la mayor parte de la región interna consistirá en vacío, y el campo eléctrico estará determinado por todas las cargas nucleares y los electrones atómicos. Este campo eléctrico tendrá variaciones enormes a medida que se pasa de puntos cercanos a estas cargas a otros puntos que estén comparativamente lejos de ellas. Al mismo tiempo, variará muy rápidamente con respecto al tiempo, dado que las cargas que

lo constituyen están en movimiento. Así pues, cuando se define el campo macroscópico, es deseable hacerlo como un promedio lo suficientemente grande tanto en el tiempo como en un volumen como para contener un buen número de moléculas, más no tan grande que no pueda ser considerado infinitesimal a escala de laboratorio. (Este problema es similar al de difinir densidades de carga promedio, como se vio en la sección 2-4; ahí se concluyó que si se toma una división demasiado reducida, ρ puede acusar fluctuaciones demasiado grandes.) Si es el campo microscópico, se desea que tenga las mismas propiedades básicas en el vacío que aquéllas expresadas por (4-10) y (5-4), es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho_m}{\epsilon_0} \qquad \text{y} \qquad \nabla \times \mathbf{e} = 0 \tag{10-14}$$

donde ρ_m es la densidad de carga definida a escala microscópica. El campo macroscópico **E** se define entonces como

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle \tag{10-15}$$

donde $\langle \mathbf{e} \rangle$ es un promedio en tiempo y espacio. Dado que los operadores diferenciales son constantes en lo que toca a este proceso de promedios, de (10-14) y (10-15) se obtiene:

$$\nabla \times \langle \mathbf{e} \rangle = \nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{10-16}$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{e} \rangle = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho_m \rangle \tag{10-17}$$

Ahora la misma ρ_m puede esperarse que tenga grandes variaciones especiales y temporales, pero su promedio, debería reducirse a la densidad promedio de las cargas ligadas desplazadas; es decir, $\langle \rho_m \rangle = \rho_b$, de manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_b}{\epsilon_0} \tag{10-18}$$

Pero (10-16) Y (10-18) son equivalentes a simplemente utilizar (10-9) y (5-4) en primer lugar. Así, este procedimiento conduce a exactamente las mismas conclusiones que se alcanzaron en el párrafo anterior.

Este método de determinar **E** en el material, pasando de lo microscópico a lo macroscópico, es algo diferente de la cuestión de cómo ve realmente el campo eléctrico una molécula, lo cual, a final de cuentas, determinará el momento dipolar que se produzca. Este campo no necesariamente es igual al **E** macroscópico definido arriba, ya que la propia molécula contribuye al campo resultante. Este asunto se deja para el apéndice B; ahí se calculan las propiedades electromagnéticas de la materia como la respuesta resultante de sus átomos y moléculas constitutivas, pero no es necesario en este punto preocuparse por ello.

Aquí resulta de gran utilidad verificar que las definiciones de ϕ y **E** que se acaban de adoptar estén en concordancia con los experimentos iniciales con dieléctricos realizados por Faraday. Esto se hace únicamente en forma cualitativa aquí, aunque más adelante, en la sección 10-7, se dará el estudio cuantitativo. Se consideran dos experimentos sencillos. Se carga un capacitor a una carga Q y se mide su diferencia de potencial, $\Delta\phi_0$, cuando hay vacío entre las placas. La capacidad será

$$C_0 = \frac{Q}{\Delta\phi_0} \tag{10-19}$$

de acuerdo con (6-28). Ahora se llena la región entre las placas de este mismo capacitor con un dieléctrico "razonable" como cera o aceite, mientras se mantiene *Q constante,* y se vuelve a medir la diferencia de potencial $\Delta\phi$. La capacidad es ahora

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} \tag{10-20}$$

El *resultado experimental* es que $\Delta\phi < \Delta\phi_0$, y por lo tanto,

$$C > C_0 \tag{10-21}$$

¿Cómo se puede comprender que la diferencia de potencial haya disminuido? Supóngase, para ser específico, que se considera un capacitor de placas paralelas. Así se puede asumir que el campo eléctrico está dirigido de la placa cargada positivamente a la placa cargada negativamente como se muestra en la figura 6-9; al calcular $\Delta\phi_0$ por medio de (6-38) se obtiene

$$\Delta\phi_0 = \int_+^- \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{s} = E_0 d \tag{10-22}$$

donde $\mathbf{E}_0$ es el campo eléctrico en la presencia de vacío y d es la separación entre las placas. De manera similar, si $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico cuando el dieléctrico se encuentra entre las placas, se obtiene

$$\Delta\phi = Ed \tag{10-23}$$

y, dado que $\Delta\phi < \Delta\phi_0$, siendo d constante, se concluye que

$$E < E_0 \tag{10-24}$$

De esta manera, el campo eléctrico ha disminuido en presencia de materia eléctrica. ¿Cómo pudo ocurrir esto? En la figura 10-6 se muestra un capacitor con un dieléctrico entre las placas. Las superficies del dieléctrico se muestran ligeramente separadas de las placas del capacitor, por claridad, pero se supone que en realidad toda la región se encuentra llena. Si el dieléctrico está uniformemente polarizado, de manera que $\mathbf{P} = \text{const}$, entonces $\rho_b = 0$, de acuerdo con (10-10). Así,

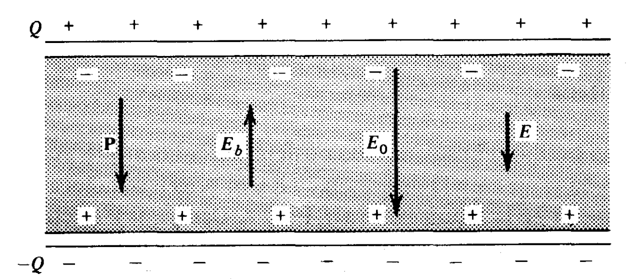


Figura 10-6. Cargas y campos en un capacitor de placas paralelas.

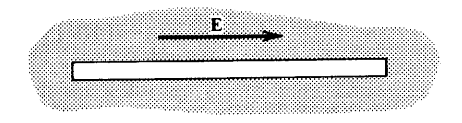


Figura 10-7. Cavidad utilizada para medir **E** en un dieléctrico.

las únicas cargas ligadas serían las superficiales dadas por (10-8) con los signos como se indican. Estas cargas superficiales producirán un campo E_b en la dirección señalada; como la carga Q seguirá produciendo el campo E_0, el campo resultante **E** será

$$E = E_0 - E_b \tag{10-25}$$

de manera que $E < E_0$, en concordancia con (10-24) y los resultados experimentales. Por tanto, este método para evaluar el campo dentro del material por medio de la carga ligada equivalente concuerda, por lo menos en este caso, con la experimentación y con las ideas generales que se han enunciado con respecto a la relación entre el campo eléctrico y el potencial, expresadas en (6-38).

Aunque ya se mencionó brevemente la dificultad para medir el campo eléctrico en el dieléctrico por medio de una carga prueba, todavía cabe preguntarse si existe alguna manera de hacerlo—obviamente se tendría que perforar el material para introducir una carga. Es posible reproducir un esquema así por medio del uso apropiado de las condiciones de frontera que debe satisfacer **E**; la más relevante es (9-21), que enuncia que $\mathbf{E}_t$ es continuo. El rozamiento detrás de esto es como sigue: (1) de alguna manera se determina la dirección de **E** en el dieléctrico (como se verá en la sección 10-6), esto es muy fácil de lograr para una gran cantidad de dieléctricos; (2) se perfora un agujero largo y delgado en el material en dirección paralela a **E**, como se ilustra en la figura 10-7—esta cavidad tiene ahora un vacío en su interior (una cavidad de este tipo generalmente recibe el nombre de cavidad "tipo aguja"); (3) cualesquiera cargas superficiales ligadas que pudieran alterar los campos se encuentran en los *extremos* de la cavidad, ya que son los únicos lugares donde **P** posee una componente normal, y, dado que los extremos se encuentran muy alejados en relación al área tan pequeña, se pueden despreciar sus efectos; (4) dado que sólo se implican componentes tangenciales, entonces $\mathbf{E}_c = \mathbf{E}$, donde $\mathbf{E}_c$ es el campo en la cavidad; (5) ahora se introduce una carga de prueba, δq, en la cavidad, y se mide la fuerza $\delta \mathbf{F}_c$ sobre ella. Por (3-14),

$$\mathbf{E}_c = \frac{\delta \mathbf{F}_c}{\delta q} = \mathbf{E} \tag{10-26}$$

y en esta forma es posible encontrar el campo *en el dieléctrico* a partir de mediciones realizadas *en la cavidad.* A este esquema se le conoce como la *definición de campo basada en la cavidad.*

10-4 Esfera uniformemente polarizada

Como un ejemplo del uso de cargas ligadas, considérese una esfera de radio a que posee una polarización **P** constante. Se toma el eje z en la dirección de **P** y el origen se coloca en el centro de la esfera, como se muestra en la figura 10-8; así, $\mathbf{P} = P\hat{\mathbf{z}}$. Dado que **P** es constante, $\rho_b = 0$ debido a (10-10). En la figura se aprecia que la normal exterior del dieléctrico es $\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{r}}$, y por lo tanto debe existir una densidad superficial de carga ligada que puede calcularse por medio de (10-8) y (1-94), resultando

$$\sigma_b(\theta') = P\cos\theta' \tag{10-27}$$

Como puede observarse, σ_b no es constante sino que varía en magnitud y signo con el ángulo, tal como se indica en la figura 10-9. Por simplicidad, únicamente se encontrarán

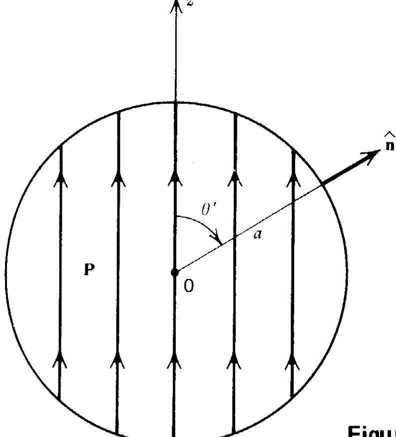


Figura 10-8. Una esfera uniformemente polarizada.

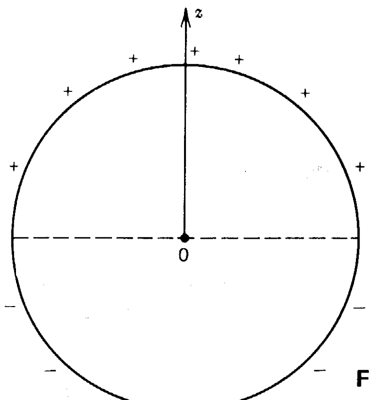


Figura 10-9. Distribución equivalente de carga en una esfera uniformemente polarizada.

el potencial y el campo eléctrico para puntos sobre el eje z positivo; en el próximo capítulo se resuelve este problema completamente por medio de un método muy diferente.

De la figura 10-10 se desprende que

$$R = (z^2 + a^2 - 2za\cos\theta')^{1/2} \tag{10-28}$$

y, por lo tanto, al utilizar (10-27), (1-100) (con $r = a$) y (2-22), se encuentra que ϕ, en la forma (10-9), queda

$$\phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{P\cos\theta'\cdot a^2\operatorname{sen}\theta'\,d\theta'\,d\varphi'}{(z^2+a^2-2za\cos\theta')^{1/2}}$$

$$= \frac{Pa^2}{2\epsilon_0}\int_{-1}^{1}\frac{\mu\,d\mu}{(z^2+a^2-2za\mu)^{1/2}} \tag{10-29}$$

La integral se encuentra con la ayuda de las tablas y resulta

$$-\left.\frac{(z^2+a^2+za\mu)(z^2+a^2-2za\mu)^{1/2}}{3z^2a^2}\right|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{3z^2a^2}\left[(z^2+a^2)(|z+a|-|z-a|)-za(|z+a|+|z-a|)\right] \qquad (10\text{-}30)$$

existiendo dos casos a considerar.

1. Fuera de la esfera. Aquí $z > a$ y $|z-a|=z-a$; también $|z+a|=z+a$, ya que tanto

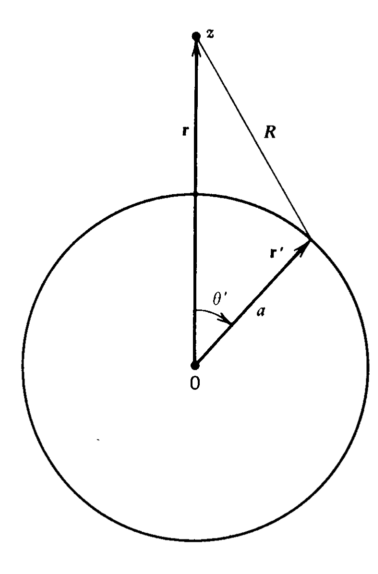


Figura 10-10. Cálculo del potencial en un punto sobre el eje.

a como z son positivos. Con estos valores se encuentra que (10-30) queda como $2a/3z^2$ y cuando se sustituye esto en (10-29) se encuentra que el potencial fuera de la esfera es

$$\phi_o(z)=\frac{Pa^3}{3\epsilon_0 z^2} \qquad (10\text{-}31)$$

y, por lo tanto,

$$E_{zo}(z)=-\frac{\partial\phi_o}{\partial z}=\frac{2Pa^3}{3\epsilon_0 z^3} \qquad (10\text{-}32)$$

Es más fácil entender estos resultados si se les expresa en función del momento dipolar total, **p**, de la esfera, el cual se calcula a partir de (10-2) y resulta ser

$$\mathbf{p}=\tfrac{4}{3}\pi a^3 P\hat{\mathbf{z}} \qquad (10\text{-}33)$$

de manera que (10-31) y (10-32) pueden también escribirse como

$$\phi_o(z)=\frac{p}{4\pi\epsilon_0 z^2} \qquad (10\text{-}34)$$

$$E_{zo}(z) = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 z^3} \tag{10-35}$$

Al comparar estos resultados con (8-48) y (8-50), y recordando que $\theta = 0$ y $r = z$ para un punto de campo sobre el eje z, se observa que son justamente los de un dipolo puntual de momento total **p**. Esto lleva a sospechar que el campo en cualquier punto exterior es un campo dipolar que corresponde a este momento dipolar total; como se verá en el siguiente capítulo, esta sospecha resulta ser correcta.

2. Dentro de la esfera. Aquí $z < a$, de modo que $|z - a| = a - z$; de nuevo, $|z + a| = z + a$. En este caso (10-30) queda como $2z/3a^2$, y cuando esto se introduce a (10-29) da el potencial dentro de la esfera como:

$$\phi_i(z) = \frac{Pz}{3\epsilon_0} \tag{10-36}$$

y, por lo tanto,

$$E_{zi}(z) = -\frac{\partial \phi_i}{\partial z} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \tag{10-37}$$

Nótese que el campo eléctrico es constante; esto puede provocar la sospecha de que **E** es constante en todo el interior de la esfera, lo que resulta ser cierto.

Uno de los ejercicios consiste en demostrar que se obtienen los mismos resultados para valores negativos de z, es decir, que E_{z0} está siempre en la dirección positiva, y E_{zi} es constante y dado por (10-37) para todas las z. La figura 10-11 ilustra las direcciones que se encontraron de **E**; se pueden entender estas direcciones al ver la distribución de la fuente de carga en la figura 10-9.

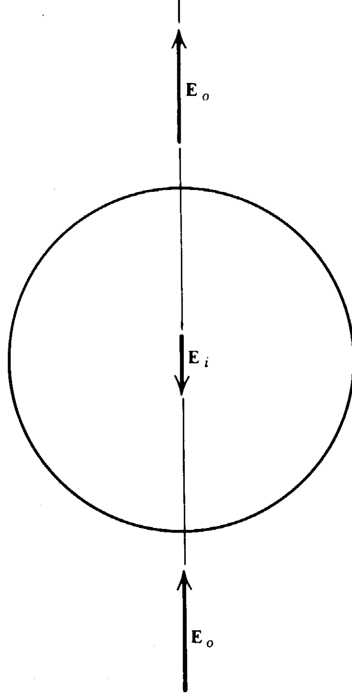


Figura 10-11. Campos eléctricos sobre el eje z producidos por una esfera uniformemente polarizada.

Un ejercicio que vale la pena considerar consiste en verificar que estos resultados estén en concordancia con las condiciones generales de frontera que ya se habían obtenido. De (10-31) y (10-36) se encuentra que el potencial es continuo en la superficie de la esfera, como se encontró en (9-29), es decir, cuando $z = a$, $\phi_0 = \phi_i = Pa/3\epsilon_0$. Sobre el eje z, E_z es una componente normal, por lo que se puede encontrar que

$$E_{2n} - E_{1n} = E_{zo}(a) - E_{zi}(a) = \left(\frac{2P}{3\epsilon_0}\right) - \left(-\frac{P}{3\epsilon_0}\right) = \frac{P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_b(0)}{\epsilon_0}$$

usando (10-32), (10-37) y (10-27). Este valor de la diferencia entre las componentes normales es justamente el que debería de ser según (9-26).

10-5 El campo D

Cuando en la sección 3-1 se definió **E**, se puntualizó que, por definición, **E** queda determinado por todas las cargas, sin importar su origen o tipo. En la sección 10-2 se manejó una clase muy especial de carga—la carga ligada— cuya densidad esta dada por (10-10) como $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. Resulta conveniente la convención de dividir las cargas en dos clases grandes, las *cargas ligadas* y las *cargas libres*, con sus correspondientes densidades ρ_b y ρ_f. Como ya se ha visto, se atribuye el origen de la carga ligada a los elementos que constituyen la materia, y por lo general no se tiene control sobre su distribución. Las cargas libres son, en esencia, todas las demás. El nombre "libre" se les da porque sí es posible controlar su distribución hasta cierto punto desplazándolas físicamente, esparciéndolas o introduciéndolas sobre o dentro de materiales por medio de haces electrónicos, o por otros medios. Esta clase también incluye las cargas movibles (libres) de los conductores. No siempre se puede hacer una diferenciación tajante en esta clasificación, pero aun así, resulta de mucha utilidad. Por tanto, se puede escribir la densidad total de carga como la suma de estas dos:

$$\rho_{\text{total}} = \rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \tag{10-38}$$

y cuando se sustituye en $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, como en (4-10), se obtiene

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \tag{10-39}$$

La forma de esta ecuación, en la que únicamente la densidad de carga libre aparece en el miembro derecho, sugiere que podría ser de utilidad definir un campo vectorial **D**(**r**) como sigue:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{10-40}$$

pues así

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \tag{10-41}$$

Al vector **D** se le llama el *desplazamiento eléctrico*, o simplemente el *desplazamiento*, o, todavía más corto, el *campo* **D**. La característica principal de **D**, y la razón fundamental para su definición, es que su divergencia depende exclusivamente de su densidad de carga libre. Las dimensiones de **D** son las mismas que las de **P**, por lo que **D** se mide en Coulomb/

metro^2. Se puede tomar a (10-41) como una expresión de la ley de Coulomb para la fuerza entre cargas puntuales más los efectos eléctricos de la materia presente.

Teniendo (10-41), algunas de las propiedades de **D** se encuentran muy fácilmente. La condición de frontera que debe satisfacer su componente normal es, de acuerdo con (10-41), (9-6), (9-7) y (9-24),

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f \tag{10-42}$$

donde σ_f es la densidad superficial de carga libre. Así, la componente normal de **D** será discontinua únicamente si existe alguna densidad de carga *libre*; esto contrasta con **E**, cuya componente normal es discontinua si existe alguna densidad superficial de carga de *cualquier* tipo.

La ley de Gauss para **D** se desprende fácilmente de (10 - 41) y (1-59) como

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f \, d\tau = Q_{f,\text{en}} \tag{10-43}$$

donde $Q_{f,en}$ es la carga *libre* neta contenida en el volumen V limitado por la superficie S. Nótense tanto la analogía como el contraste con el resultado correspondiente para **E** dado por (4-1). La ecuación 10-43 puede utilizarse ventajosamente a menudo para un cálculo de **D** en problemas con la suficiente simetría, parecido a lo que se hizo con **E** en el capítulo 4.

Aunque (10-41) contiene únicamente la densidad de carga libre, esto no significa que las cargas libres sean la única fuente de **D**, ya que, de acuerdo con el teorema de Helmholtz de la sección 1-18, hasta aquí se ha encontrado tan sólo una de las ecuaciones fuente. La que falta es $\nabla \times \mathbf{D}$. Esta se obtiene fácilmente al tomar el rotacional de la definición (10-40) y utilizar (5-4); el resultado es

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P} \tag{10-44}$$

de modo que **D** puede tener sus fuentes en cargas libres así como en cargas ligadas. La condición de frontera que debe satisfacer la componente tangencial de **D** es más fácil de encontrar de (9-21) y (10-40), resultando

$$\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t} = \mathbf{P}_{2t} - \mathbf{P}_{1t} \tag{10-45}$$

Es también posible desarrollar una definición de cavidad para **D** de una manera análoga a la que se usó para **E** en la figura 10-7. La definición se basa en la continuidad de las componentes normales de **D** en ausencia de carga libre superficial, como se indica en (10-42). Para ello, imagínese una cavidad en la forma de un pequeño cilindro recto cuya altura es muy chica comparada con el radio de su base. Se recorta en el dieléctrico de manera tal que su base sea perpendicular a **D** en el interior del dieléctrico, como se muestra en la figura 10-12. Si se considera un punto cercano al centro de la cavidad, las orillas se encontrarán demasiado alejadas como para afectar los campos, de modo que $\mathbf{D}_c$ (en la cavidad) será paralelo a **D** (en el dieléctrico), y ya que por construcción solamente poseen componentes normales, entonces $\mathbf{D}_c = \mathbf{D}$. Luego, $\mathbf{E}_c = \mathbf{D}_c/\epsilon_0$ ya que $\mathbf{P} = 0$ en el vacío de la cavidad. Si ahora se coloca una carga de prueba imaginaria, δq, en la cavidad y se mide la fuerza $\delta \mathbf{F}_c$ que actúa sobre ella, se tendrá que $\delta \mathbf{F}_c = \delta q \mathbf{E}_c = \delta q \mathbf{D}/\epsilon_0$, de manera que $\mathbf{D} = \epsilon_0 (\delta \mathbf{F}_c / \delta q)$. Así, en principio, se puede calcular **D** *en el dieléctrico* a partir de mediciones realizadas *en la cavidad.*

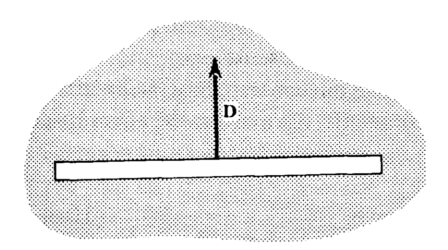


Figura 10-12. Cavidad usada para medir **D** en un dieléctrico.

A pesar de su aparente simplicidad, resulta claro que ni (10-41) ni (10-44) serán de utilidad a menos que puedan relacionarse **E**, **P** y **D** de una manera mejor; esto se logra en la dos secciones que siguen. Sin embargo, antes se verá rápidamente un ejemplo.

Ejemplo

Esfera uniformemente polarizada. Este es el sistema que se estudió en la sección anterior, y cuyos resultados se resumen en las figuras 10-8, 10-9 y 10-11. Se desea encontrar resultados similares para **D**; se considerarán solamente puntos de campo sobre el eje z positivo. Fuera de la esfera, donde no existe materia, $\mathbf{P} = 0$, y de (10-40) y (10-32) se encuentra directamente que

$$D_{zo}(z) = \epsilon_0 E_{zo} = \frac{2Pa^3}{3z^3} \tag{10-46}$$

El valor de D_z dentro de la esfera se encuentra por (10-40) y (10-37):

$$D_{zi}(z) = \epsilon_0 E_{zi} + P = -\tfrac{1}{3}P + P = \tfrac{2}{3}P \tag{10-47}$$

notándose que es independiente de z y en la misma dirección de P. Estos resultados se muestran en la figura 10-13. Ya que que no hay carga libre sobre la superficie, es de espe-

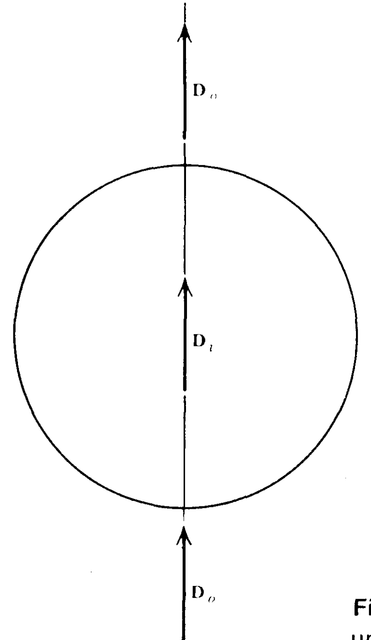


Figura 10-13. Campos **D** sobre el eje z producidos por una esfera uniformemente polarizada.

rarse que las componentes normales de **D** sean continuas allí de acuerdo con (10-42). Se puede verificar esto y al mismo tiempo comprobar los resultados obtenidos. Se obtiene, como se esperaba, $D_{2n} - D_{1n} = D_{z0}(a) - D_{zi}(a) = (2P/3) - (2P/3) = 0$.

10-6 Clasificación de dieléctricos

Como ya se mencionaba al final de la sección 10-1, es de esperarse que generalmente exista una relación funcional entre la polarización y el campo eléctrico, es decir, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ o $P_x = P_x(E_x, E_y, E_z)$ y así sucesivamente. La teoría electromagnética macroscópica descriptiva *no* puede predecir la forma de estas funciones, pero sí las admite como información externa, Desde este punto de vista, estas relaciones se dejan para ser determinadas por la experimentación o para ser calculadas en forma teórica a partir de propiedades microscópicas de la materia, usando otras ramas de la física como son la mecánica estadística y la física del estado sólido. Esto no lleva a una situación desesperada, sin embargo, porque una combinación de la teoría general y la experimentación demuestra que la mayoría de los materiales caen dentro de ciertos grupos de fácil clasificación, y este hecho se puede utilizar para simplificar la teoría y volverla más práctica. Es deseable llevar a cabo esto paso a paso, para poder entender mejor las limitaciones de la forma final.

I. Polarización permanente

Si $\mathbf{E} = 0$, entonces existen dos posibilidades para el valor de $\mathbf{P}(0)$. Si $\mathbf{P}(0) \neq 0$, el material se encuentra polarizado aún en la ausencia de un campo y, como ya se vio antes, se dice que posee *polarización permanente* y recibe el nombre de *electreto*. Aunque los electretos existen, no se tratarán más en esta sección. La situación en donde $\mathbf{P}(0) = 0$ es más característica y representativa de lo que comúnmente se puede esperar cuando se habla de una polarización producida por un campo; en general se utilizará el nombre de *dieléctrico* sólo para este tipo de material.

II. Dieléctricos no lineales

Aún cuando $\mathbf{P}(0) = 0$, todavía es posible que la relación entre **P** y **E** sea muy complicada. Para la mayoría de los materiales, sin embargo, esto sólo ocurre en condiciones muy excepcionales, tales como campos extremadamente grandes, temperaturas bajas, o ambas. Así se encuentra que a menudo es suficiente expresar **P** como una serie de potencias de las componentes de **E**, es decir, que se puede escribir

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j + \sum_j \sum_k \beta_{ijk} E_j E_k + \cdots \tag{10-48}$$

donde los índices i, j y k toman los valores de x, y y z; nótese que esta forma satisface la suposición de que $\mathbf{P}(0) = 0$. Los valores específicos de los coeficientes $\alpha_{ij}, \beta_{ijk}, \ldots$ dependerán del dieléctrico en particular de que se trate. Si se requieren los términos de segundo orden o superiores de las componentes de **E** para describir adecuadamente el material, se dice que el dieléctrico es *no-lineal*. Sólo por el experimento se puede saber si (10-48) resulta necesaria en un caso dado; por ejemplo, algunas cerámicas se encuentran en esta categoría. No se consideran aquí los dieléctricos no lineales con mayor profundidad, sino que se restringirá el tratamiento a los casos para los que solamente se requiera del primer término de (10-48); tales materiales reciben el nombre de *dieléctricos lineales*.

III. Dieléctricos lineales

En este caso, la expresión general que relaciona las componentes de **P** con las componentes de **E** puede escribirse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0(\chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z) \\ P_y &= \epsilon_0(\chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z) \\ P_z &= \epsilon_0(\chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z) \end{aligned} \tag{10-49}$$

donde los factores de proporcionalidad χ_{ij} reciben el nombre de componentes del *tensor de susceptibilidad eléctrica.* Se ha introducido el factor ϵ_0 de manera que las X_{ij} no tengan dimensiones como puede deducirse de (10-40). En general, las χ_{ij} no necesitan ser constantes y pueden ser función de la posición en el material. Las χ_{ij} no pueden depender de **E** porque eso sería regresar al caso de los dieléctricos no lineales de (10-48). Se desprende de estas relaciones que **P** no será en, general, paralelo a **E** ni aun en los dielétricos lineales, y que **D** tampoco será paralelo a **E**. Esta situación es muy común en los cristales, y provoca tales fenómenos como la doble retracción. Se pasa ahora a la siguiente suposición simplificadora.

IV. Dieléctricos isotrópicos lineales

Ahora se hace la suposición adicional de que *en un punto dado* las propiedades eléctricas del dieléctrico son independientes de la dirección de **E**; a tal condición se le conoce como *isotropía.* Dado que una dirección es completamente equivalente a la otra, **P** debe ser necesariamente paralelo a **E** y las $\chi_{ij} = 0$ si $i \neq j$, y $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz}$, de manera que (10-49) puede escribirse en función de un solo factor de proporcionalidad como sigue:

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{10-50}$$

donde χ_e recibe el nombre de *susceptibilidad eléctrica.* Al combinar (10-50) con (10-40) se encuentra que

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_e)\epsilon_0 \mathbf{E} = \kappa_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \tag{10-51}$$

donde

$\kappa_e = 1 + \chi_e$ = constante dieléctrica = capacidad inductiva específica relativa (10-52)

$\epsilon = \kappa_e \epsilon_0$ = capacidad inductiva específica (absoluta) (10-53)

Las cantidades χ_e, κ_e y ϵ caracterizan las propiedades eléctricas del material y se encuentran por experimentación; existen muchas tablas que consignan sus valores. Para todas las sustancias conocidas, χ_e es positiva y por lo tanto $K_e > 1$. De (10-51) se puede observar que **D** y **E** son paralelos en esta situación. La ecuación $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ recibe el nombre de *ecuación constitutiva*; no es una de las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, sino que se aplica solamente donde resulte aplicable, por decirlo así.

En este caso de los dieléctricos isotrópicos lineales también se puede encontrar la

ecuación diferencial que debe satisfacer el potencial escalar. Utilizando (5-3) se puede expresar (10-51) como $\mathbf{D} = -\epsilon \nabla \phi$, y si se sustituye esto en (10-41) y se usan (1-117) y (1-45), se obtiene

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \epsilon \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \epsilon = -\rho_f \tag{10-54}$$

como la ecuación de la que habría de despejar ϕ, ya que se debe respetar la posibilidad de que ϵ sea una función de la posición, no pudiendo proseguir hasta no conocer esta dependencia.

La siguiente simplificación desemboca en una situación muy importante que merecerá una sección aparte.

10-7 Dieléctricos isotrópicos homogéneos lineales (i.h.l.)

Se hace ahora la suposición adicional de que las propiedades eléctricas son independientes de la posición; a tales materiales se les llama eléctricamente homogéneos. Por lo general, los gases y los líquidos así como muchos sólidos caen en esta categoría por lo que no resulta ser una situación tan especial como se podría pensar. Aquí la cantidades χ_e, κ_e y ϵ son *constantes*; sin embargo, siguen siendo características del material. Las ecuaciones (10-50) a (10-53) siguen siendo aplicables y, además, (10-54) se simplifica a

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{10-55}$$

ya que ahora $\nabla \epsilon = 0$. Por comparación con (5-15), se puede observar que para los dieléctricos i.h.l. el potencial cumple de nuevo con la ecuación de Poisson, remplazando ϵ_0 por ϵ y poniendo ρ_f en lugar de la densidad total de carga ρ. (Las cargas ligadas del material no han desaparecido, desde luego, pero sus efectos se resumen en el factor ϵ.) El hecho de que ϕ satisfaga la ecuación (10-55) también significa que para los dieléctricos i.h.l. se puede, *con precaución,* tomar las soluciones que ya se habían encontrado antes para el caso del vacío y simplemente remplazar ϵ_0 por ϵ; se hará poco uso de esto, sin embargo. También, si $\rho_f = 0$, ϕ satisfará la ecuación laplaciana $\nabla^2 \phi = 0$ en esta región.

Las condiciones de frontera en una superficie de discontinuidad ahora pueden expresarse completamente en función de **E**. Si se introduce (10-51) en (10-42) y se recuerda que (9-21) sigue siendo aplicable, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\epsilon_2 \mathbf{E}_2 - \epsilon_1 \mathbf{E}_1) &= \sigma_f \\ \mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} &= 0 \end{aligned} \tag{10-56}$$

Pero ahora se observa que aún cuando $\sigma_f = 0$, las componentes normales de **E** no serán continuas, por lo general, a través de la superficie de separación entre los dos dieléctricos, de modo que, como se ilustra en la figura 10-14, la dirección de **E** puede cambiar en la frontera. Así, las líneas de **E** pueden refractarse aún en la ausencia de una densidad de carga libre y θ_2 será diferente de θ_1.

En un dieléctrico i.h.l. las densidades de carga libre y ligada se relacionan entre sí de una manera simple, como lo hacen la polarización y el desplazamiento. Si se elimina **E** entre (10-50) y (10-51) y se usa (10-52), se encuentra que

$$\mathbf{P} = \frac{\chi_e}{\kappa_e}\mathbf{D} = \frac{(\kappa_e - 1)}{\kappa_e}\mathbf{D} \tag{10-57}$$

lo que permite demostrar que **P** y **D** también son paralelos y que $|\mathbf{P}| < |\mathbf{D}|$. Si ahora se toma la divergencia de (10-57) y se utilizan (10-10) y (10-41), se obtiene

$$\rho_b = -\frac{(\kappa_e - 1)}{\kappa_e}\rho_f \tag{10-58}$$

de manera que $|\rho_b| < |\rho_f|$. Si se sustituye este resultado en (10-38) se encuentra que la densidad total de carga en un dieléctrico i.h.l. siempre se podrá expresar como

$$\rho = \frac{\rho_f}{\kappa_e} = -\frac{\rho_b}{\kappa_e - 1} \tag{10-59}$$

lo que demuestra que la densidad total de carga siempre será menor que la densidad de carga libre, ya que $\kappa_e > 1$. Como un caso especial, se puede observar que si $\rho_f = 0$, entonces $\rho_b = 0$, de manera que en cualquier punto de un dieléctrico i.h.l. en el que no haya densidad de carga libre, no existirá densidad de carga ligada tampoco.

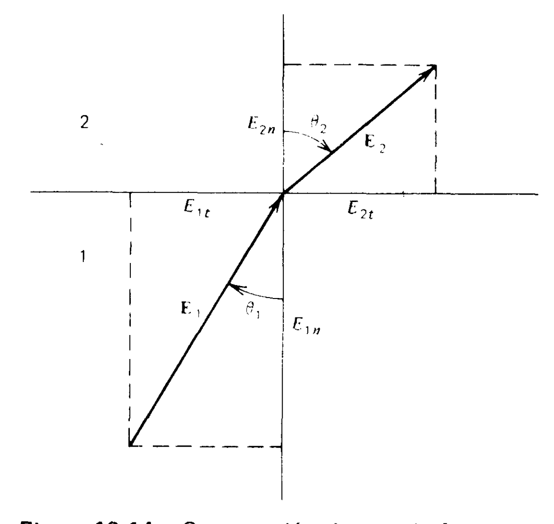


Figura 10-14. Campos eléctricos en la frontera entre dos dieléctricos.

De ahora en adelante en todos los ejemplos y ejercicios, excepto en donde se indique expresamente otra cosa, se manejarán exclusivamente dieléctricos i.h.l. En este punto se pueden considerar ya algunos ejemplos cuantitativos; se comienza con el capacitor, ya que fue lo primero que se consideró cualitativamente en la sección 10-3.

Ejemplo

Capacitor de placas paralelas con carga constante. En la figura 10-5 se muestra un capacitor de carga libre total Q_f, con vacío entre las placas en (a) y con un dieléctrico que llena completamente la región entre las placas en (b). También se muestran las direcciones de los diversos vectores de campo. El valor para el campo en el vacío ya se discutió en el texto justo antes de (6-40) y es igual a $E_0 = \sigma_f/\epsilon_0$, donde $\sigma_f = Q_f/A$ es la densidad super-

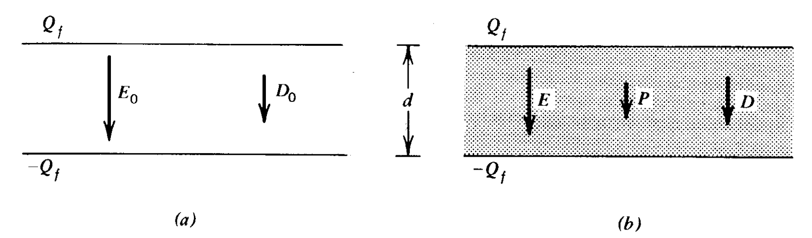


Figura 10-15. Capacitor de placas paralelas a carga constante. (a) Vacío entre las placas. (b) Dieléctrico entre las placas.

ficial de carga libre y A es la superficie de las placas. Dado que $\mathbf{P}_0 = 0$, de (10-40) resulta que el desplazamiento D_0 es

$$D_0 = \epsilon_0 E_0 = \sigma_f \tag{10-60}$$

Ahora se mantienen Q_f y σ_f constantes mientras se introduce un dieléctrico entre las placas, de manera que **D** no cambia y es igual a su valor en el vacío:

$$D = D_0 = \sigma_f \tag{10-61}$$

Este resultado también está en concordancia con (10-42), ya que los campos son iguales a cero dentro de la placa conductora y, por lo tanto, $D_{2n} - D_{1n} = D - 0 = \sigma_f$. Sin embargo, el campo eléctrico sí cambia ya que, de acuerdo con (10-51),(10-61) y (10-60), se tiene que

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{D_0}{\kappa_e \epsilon_0} = \frac{E_0}{\kappa_e} \tag{10-62}$$

y por tanto $E < E_0$ en concordancia con (10-42). Se aprecia ahora que el factor de reducción del campo eléctrico es exactamente igual a la capacidad inductiva específica relativa. La diferencia de potencial es ahora

$$\Delta\phi = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Ed = \frac{E_0 d}{\kappa_e} = \frac{\Delta\phi_0}{\kappa_e} \tag{10-63}$$

de acuerdo con (10-62) y (10-22), Así, la diferencia de potencial es menor que en el vacío por el mismo factor κ_e, de modo que $\Delta\phi < \Delta\phi_0$, en concordancia con el resultado experimental. Se puede encontrar la capacitancia al expresar (10-63) en función de la carga total:

$$\Delta\phi = \frac{E_0 d}{\kappa_e} = \frac{\sigma_f d}{\kappa_e \epsilon_0} = \left(\frac{d}{\kappa_e \epsilon_0 A}\right) Q_f$$

y, por lo tanto,

$$C = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{d} = \kappa_e C_0 \tag{10-64}$$

donde se han utilizado (10-20) y (6-41) para identificar el valor al vacío de la capacitancia C_0. Se observa así que la presencia del dieléctrico ha hecho incrementar la capacitancia, de acuerdo con (10-21), y que la relación de las capacitancias con y sin el dieléctrico es exactamente igual a la constante dieléctrica, es decir, $C/C_0 = \kappa_e$.

La polarización se encuentra de (10-50) y (10-62) y es

$$P = \chi_e \epsilon_0 E = (\kappa_e - 1)\epsilon_0 E = \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e}\right)\epsilon_0 E_0 \tag{10-65}$$

Al seguir utilizando (10-62), se puede escribir el tercer término como

$$P = \epsilon_0(E_0 - E) \tag{10-66}$$

de tal manera que

$$E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \tag{10-67}$$

lo que es también consecuencia de (10-40) y (10-61), es decir, $D = \epsilon_0 E + P = D_0 = \epsilon_0 E_0$. Este último resultado tiene exactamente la misma forma que ya se había encontrado en (10-25), siendo una expresión cuantitativa de E_b. Ya que **P** es constante, $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, por lo que no hay cargas ligadas volumétricas, en consistencia con (10-58), ya que las únicas cargas libres se encuentran en las superficies de las placas conductoras. Sin embargo, existen cargas ligadas en la superficie del dieléctrico. Su magnitud puede encontrarse de (10-8), (10-65) y (10-60) y es

$$|\sigma_b| = |P_n| = P = \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e}\right)\epsilon_0 E_0 = \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e}\right)\sigma_f \tag{10-68}$$

y los signos son exactamente los mismos que ya se mostraron en la figura 10-6. Se observa en la figura que el signo de σ_b es siempre opuesto al de la σ_f inmediata; tomando esto en cuenta, se puede escribir (10-68) como

$$\sigma_b = -\left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e}\right)\sigma_f \tag{10-69}$$

que es completamente análoga al resultado encontrado con anterioridad para las densidades volumétricas de carga de (10-58). Estas cargas superficiales ligadas, al actuar como dos planos infinitos cargados, producirán el campo E_b. La magnitud de E_b puede encontrarse a través del resultado previo (3-12) junto con (10-68), encontrándose que

$$E_b = \frac{|\sigma_b|}{2\epsilon_0} + \frac{|\sigma_b|}{2\epsilon_0} = \frac{|\sigma_b|}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0} \tag{10-70}$$

Esto está en completa concordancia con (10-67), que se encontró por otros métodos, y también verifica el análisis que se hizo para llegar a la forma $E = E_0 - E_b$ dado en (10-25). A este campo E_b a menudo se le denomina el *campo local* y se dice que el campo resultante **E** es la suma del campo en el vacío $\mathbf{E}_0$, producido por las cargas libres como si no hubiera materia presente, más el campo local $\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_b$ producido por las cargas ligadas que resultan de la polarización del dieléctrico.

Ejemplo

Capacitancia en general. Aunque (10-64) se obtuvo al considerar el caso especial de un capacitor de placas paralelas, la simplicidad de ese resultado, así como el hecho de que la expresión $C = \kappa_e C_0$ no contienen ninguna característica que lo restrinja al capacitor de placas paralelas, sugieren que ésta bien podría ser una relación de carácter general válida para cualquier capacitor. Esto resulta ser verdad. Si se combinan (10-41) y (10-51), se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\frac{\rho_f}{\kappa_e}\right) \tag{10-71}$$

ya que ϵ es constante para una dieléctrico i.h.l. Se tiene también que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ya que E sigue siendo conservativo. Supóngase que se da una distribución de una carga libre descrita por ρ_f. Si no existe materia en la región de interés, se resuelven las dos ecuaciones fuente para obtener un campo eléctrico $\mathbf{E}_0$. Si ahora se llena *toda* la región con un dieléctrico por κ_e, y si *se mantiene a ρ_f sin cambio*, se puede ver de (10-71) que el problema es exactamente el mismo que en el caso al vacío ya resuelto, *excepto* que las cargas fuente son menores *en todos lados* por el factor κ_e. Así, como se aprecia en (3-3), por ejemplo, el campo **E** que se obtiene ahora también será menor por el mismo factor; es decir,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\kappa_e}$$

es un resultado general. La diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre las placas del capacitor está dada por (6-38) y es

$$\Delta\phi = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_+^- \frac{\mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{s}}{\kappa_e} = \frac{\Delta\phi_0}{\kappa_e} \tag{10-72}$$

como en el resultado especial (10-63). Nótese que este resultado es consistente con lo que se comentó después de ver (10-55).

Dado que Q_f es la misma en ambos casos, la capacitancia es

$$C = \frac{Q_f}{\Delta\phi} = \frac{\kappa_e Q_f}{\Delta\phi_0} = \kappa_e C_0 \tag{10-73}$$

demostrando así en el caso general que la capacitancia de cualquier capacitor aumenta por un factor κ_e cuando se llena todo el espacio entre sus placas con un dieléctrico. Este resultado viene a ser una buena manera de medir κ_e.

Si el dieléctrico no es homogéneo, o si todo el espacio se llena con el dieléctrico, (10-73) no es válida en términos generales. Tales problemas se pueden resolver escribiendo la diferencia de potencial como

$$\Delta\phi = \int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_+^- \frac{\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{\epsilon} \tag{10-74}$$

Así, se puede expresar **D** en función de la carga libre total Q_f por medio de (10-41), o por (10-43) si el problema posee la suficiente simetría, de manera que cuando se integra, la capacitancia se encuentra por (6-38). En tal caso, la condición de frontera (10-42) resulta a menudo de gran ayuda.

Ejemplo

Carga puntual en un dieléctrico infinito. Supóngase que una carga puntual, q, se encuentra metida en un dieléctrico como se muestra en la figura 10-16. El campo de esta carga polarizará el dieléctrico. Si el dieléctrico es de tamaño finito, las cargas ligadas de las superficies contribuirán al campo resultante y el cálculo del campo en cualquier punto sería un problema muy complicado. Sin embargo, si el dieléctrico es de extensión infinita, se puede despreciar el efecto de las cargas ligadas de su superficie, pudiendo asumir que existe simetría esférica. En este caso se puede escribir $\mathbf{D} = D(R)\hat{\mathbf{R}}$ y utilizar la ley de Gauss para **D**

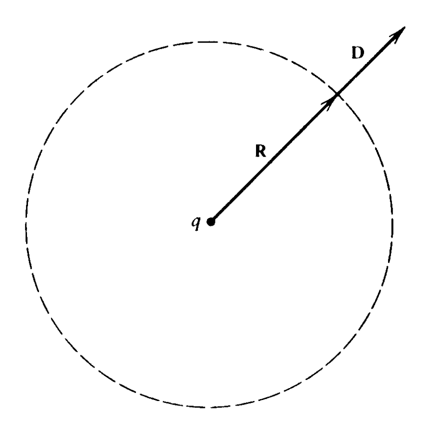


Figura 10-16. Carga puntual en un dieléctrico infinito.

como en (10-43). Si se integra sobre la esfera de radio R que se ilustra con línea punteada en la figura, se obtiene

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = \oint_S D\hat{\mathbf{R}}\cdot da\,\hat{\mathbf{R}} = 4\pi R^2 D = Q_{f,\text{en}} = q$$

de manera que

$$\mathbf{D} = \frac{q\hat{\mathbf{R}}}{4\pi R^2} \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \frac{q\hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon R^2} \tag{10-75}$$

y, como era de esperarse, el campo es el mismo que el de una carga puntual, pero reducido por el factor $\epsilon/\epsilon_0 = \kappa_e$. Imagínese ahora una carga puntual, q', situada en $\mathbf{R}$; la fuerza que actúa sobre ella es

$$\mathbf{F}' = q'\mathbf{E} = \frac{qq'\hat{\mathbf{R}}}{4\pi\epsilon R^2} \tag{10-76}$$

que no es sino la ley del cuadrado inverso de Coulomb con ϵ en lugar de ϵ_0.

Este resultado (10-76) es la base para el enunciado de que la presencia de un dieléctrico reduce las fuerzas entre las cargas por el factor $\epsilon/\epsilon_0 = \kappa_e$. Sin embargo, puede observarse que esto es cierto solamente para un dieléctrico i.h.l. de magnitud infinita, o para uno tan grande que las cargas ligadas superficiales no afecten el campo y pueda aceptarse con seguridad una simetría esférica. De hecho, es posible que la fuerza que actúa sobre q' resulte aumentada si se dan las circunstancias precisas.

Se puede encontrar la polarización de dieléctrico de (10-57) y de (10-75), y resulta

$$\mathbf{P} = \frac{(\kappa_e - 1)q\hat{\mathbf{R}}}{\kappa_e 4\pi R^2} \tag{10-77}$$

estando dicho vector dirigido radialmente alejándose de q. De acuerdo con (10-58), la densidad de carga ligada debe anularse. De (10-10), (10-77) y (1-147) se desprende que tal es el caso.

10-8 Energía

Recuérdese el resultado (7-10) para la energía de un sistema de cargas:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \rho\phi\,\mathrm{d}\tau \qquad (10\text{-}78)$$

Cuando se obtuvo esa expresión, se calculó como la cantidad de trabajo reversible necesaria para mantener una configuración dada de cargas y no se hizo distinción alguna en cuanto a si las cargas eran libre o ligadas, ni fue necesario hacerla. La implicación aquí presente es que dicha energía podría ser *extraída* del sistema como trabajo reversible, y en ese sentido resulta apropiado considerarla como una energía potencial, tal y como se hizo. Cuando se consideran ahora las cargas en presencia de materia, es necesario indicar cual es la definición *útil* de la energía. Debe ser, desde luego, la cantidad de trabajo necesario para lograr una configuración de cargas *sobre las que se toma control,* de manera que, en principio, la energía pueda ser extraída del sistema. Pero las únicas cargas en las que se puede tener algún tipo de control son las cargas libres, y es solamente con estas, en un sentido amplio, que se puede almacenar o extraer energía, como en el proceso de carga y descarga de un capacitor de manera reversible. Así, la energía que aquí interesa es la de la distribución de carga libre en presencia de materia. En otras palabras, se toma como expresión para la energía electrostática de un sistema:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \rho_f\phi\,\mathrm{d}\tau \qquad (10\text{-}79)$$

Desde luego, las cargas ligadas de la materia se han desaparecido, puesto que ϕ es el potencial resultante de todas las cargas; por ejemplo, podría evaluarse sustituyendo (10-38) en (5-7).

Utilizando (10-41) se puede expresar (10-79) como

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \phi(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D})\,\mathrm{d}\tau \qquad (10\text{-}80)$$

Si ahora se compara esta expresión con (7-22) se observa que son de exactamente la misma forma, con $\mathbf{D}$ en lugar de $\varepsilon_0\mathbf{E}$. La argumentación que condujo de (7-22) a (7-28) puede ser aplicada de exactamente la misma manera que antes, de manera que (10-80) puede expresarse como

$$U_e = \int_{\text{todo el espacio}} \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}\tau \qquad (10\text{-}81)$$

Puede interpretarse (10-81), como se hizo con (7-28), introduciendo una *densidad de energía* u_e dada por

$$u_e = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \qquad (10\text{-}82)$$

La cual, al usar (10-51) puede también escribirse como

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon\mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{D}^2}{2\epsilon} \qquad (10\text{-}83)$$

Ejemplo

Capacitor esférico. Imagínese que todo el espacio entre las placas del capacitor que se

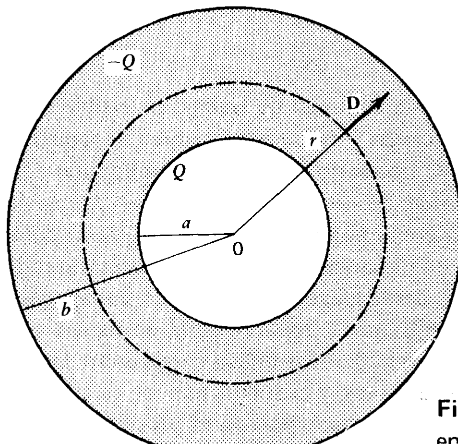


Figura 10-17. Capacitor esférico con dieléctrico entre las placas.

muestra en la figura 10-17 está lleno de un dieléctrico de capacidad inductiva específica ϵ. La carga libre total en el capacitor es Q. Como siempre, **D** será radial, en razón de la simetría esférica, de manera que $|\mathbf{D}|$ será constante sobre la superficie esférica de línea punteada de radio r. Si se aplica (10-43) a esta esfera se obtiene, como en la sección anterior,

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = 4\pi r^2 D = Q_{f,\text{in}} = Q$$

de manera que $D = Q/4\pi r^2$ y (10-83) queda como

$$u_e = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon r^4} \tag{10-84}$$

Esto se aplica a la región entre las esferas; $u_e = 0$ en cualquier otro punto, porque los campos son no nulos únicamente en la región ocupada por el dieléctrico. Sustituyendo (10-84) en (10-81) y utilizando (1-99), se encuentra la energía total del capacitor:

$$U_e = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{b}\frac{1}{r^4}\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{10-85}$$

Si existiera vacío entre las placas la energía U_{e0} estaría dada por (10-85) con ϵ remplazada por ϵ_0. Por lo tanto, y dado que $\epsilon/\epsilon_0 = \kappa_e$, se puede observar que

$$U_e = \frac{U_{e0}}{\kappa_e} \tag{10-86}$$

de modo que $U_e < U_{e0}$, lo que representa una disminución de la energía total en presencia del dieléctrico en todos los casos donde Q se mantiene constante.

Se encontró en (7-21) que la energía de un capacitor es igual a $Q^2/2C$. Este resultado se obtuvo al utilizar propiedades muy generales de los conductores, por lo que debe ser válido independientemente de si hay dieléctricos o no presentes; también se resolvió este mismo problema por medio de propiedades generales de trabajo y diferencia de potencial en el ejercicio 7-3. Por lo tanto, es posible calcular la capacitancia por medio de métodos basados en la energía, que resultan, en ocasiones, más convenientes. En este ejemplo, si se igualan (10-85) y (7-21), se encuentra la capacitancia:

$$C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a} = \kappa_e C_0 \tag{10-87}$$

con auxilio de (10-53), donde C_0 es un valor dado por (6-37). Como es lógico, este resultado concuerda con la expresión (10-73) relativa a los efectos del dieléctrico sobre la capacitancia.

Como se pudo apreciar en este último ejemplo, por lo general la presencia de un dieléctrico puede alterar los valores de **D** y **E** en todos los puntos, por lo que es de esperarse que la energía total, dada en (10-81), cambie también. El monto exacto de este cambio depende normalmente de la manera particular en que este proceso se lleve a cabo; por ejemplo, con cargas constantes, con potenciales constantes, con el dieléctrico llenando tan sólo una parte del espacio entre las placas, con más de un dieléctrico, etc. En resumen, el problema general de la energía en presencia de dieléctricos puede llegar a ser muy complejo, y a veces resulta imposible hacer una clara distinción entre las contribuciones energéticas de cada parte específica del sistema. Sin embargo, existe un caso comparativamente sencillo para el que es posible asignar el cambio energético al dieléctrico mismo; se da el siguiente caso como ilustración.

Supóngase que para empezar existe vacío en todas partes y una distribución de carga que produce en todo el espacio los campos $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$. Por medio de (10-81) se puede evaluar la energía inicial U_{e0}:

$$U_{e0} = \tfrac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \, d\tau \tag{10-88}$$

Supóngase ahora que *se mantienen fijas las cargas fuente* tanto en valores como en posiciones y que se introduce en el dieléctrico de volumen V en este campo $\mathbf{E}_0$ prexistente. (El contraste entre este ejemplo y el anterior es que en aquél el dieléctrico llenaba *toda* la región en la que estaba presente el campo). Como ya se sabe, la presencia del dieléctrico alterará los valores de **E** y **D** en todo el espacio; se puede calcular la nueva energía U_e por medio de (10-81) y estos nuevos valores de **E** y **D**. El *cambio* en la energía, en este caso $U_e - U_{e0}$, puede asignarse completamente a la presencia del dieléctrico, y si se le llama U_{eb}, se tiene

$$U_{eb} = U_e - U_{e0} = \tfrac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} (\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{E}_0)\, d\tau \tag{10-89}$$

Se puede ahora demostrar que bajo las circunstancias, (10-89) puede ser expresada como una integral sobre el volumen V del dieléctrico únicamente. Ya que resulta ser un cálculo muy largo se deja como ejercicio, y aquí sólo se da el resultado, que es

$$U_{eb} = -\tfrac{1}{2}\int_V \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_0 \, d\tau \tag{10-90}$$

Puesto que ésta sólo involucra el volumen del dieléctrico, es razonable pensar que se encuentra localizada *en* el dieléctrico y que representa la energía *del* dieléctrico. Ahora se puede introducir una densidad de energía para estas cargas ligadas, dada por

$$u_{eb} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_0 = -\tfrac{1}{2}\chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}_0 \tag{10-91}$$

donde también se hizo uso de (10-50). Las expresiones (10-90) y (10-91) resultan apro-

piadas para los casos en que se considere que la polarización fue producida por el campo.

En toda esta argumentación se supone que κ_e es constante durante los procesos descritos. Como se verá en el apéndice B, en realidad resulta que muchos dieléctricos poseen κ_e que depende de la temperatura, de modo que aquí es correcta la suposición de que los procesos estudiados son isotérmicos. Esto viene a ser consistente con el énfasis puesto en la relación de U_e con el trabajo reversible, de manera que en realidad es más análoga a la función de Helmholtz o energía libre en termodinámica, pues no existe una distinción entre sus cambios para sistemas a temperatura constante. Con esto en mente, se puede considerar que (10-90) viene a ser una contribución a la energía interna del sistema dieléctrico.

Debe también tenerse presente la distinción entre estas energías y la *energía de interacción* entre una distribución de cargas y un *campo externo*, lo que ya se estudió en la sección 8-4. En particular, se obtuvo la energía de un dipolo en (8-64). Si se deseara aplicar esto a un material polarizado, se deberá escoger entre considerar que la polarización es permanente, o que el campo externo es tan pequeño que no afecta a **P** de manera apreciable. En ese caso, (10-1) es el momento dipolar de un volumen pequeño y la energía de interacción externa que se obtiene de (8-64) puede expresarse como

$$dU_{e,\text{ext}} = -\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_{\text{ext}}\,d\tau \tag{10-92}$$

donde el campo externo se denota con $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ en lugar de $\mathbf{E}_0$, el que se ha estado usando hasta ahora para los valores al vacío. Al integrar (10-92) sobre el dieléctrico, se obtiene la energía de interacción total como

$$U_{e,\text{ext}} = -\int \mathbf{P}\cdot\mathbf{E}_{\text{ext}}\,d\tau \tag{10-93}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ no varía mucho en el volumen, se puede sacar de la integral y utilizar (10-2) para obtener $U_{e,\text{ext}} = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_{\text{ext}}$, lo que concuerda con (8-64).

Ejemplo

Energía de un capacitor en general. En el caso especial en que se obtuvo (10-86), se estudió el efecto que produce la presencia de un dieléctrico sobre un capacitor. Aquí se examinará brevemente el caso generalizado.

La energía está dada por (7-21), y se ha obtenido además la expresión (10-73) del efecto sobre la capacitancia, todo esto en forma general. Por lo tanto, si se mantiene constante la carga Q, la energía U_e con el dieléctrico entre las placas es $U_e = Q^2/2C = Q^2/2\kappa_e C_0 = U_0/\kappa_e$, donde U_0 es la energía en vacío, de modo que la energía disminuida queda dada por

$$U_e = \frac{U_0}{\kappa_e} \qquad (Q = \text{constante}) \tag{10-94}$$

y, de acuerdo con (10-86), viene a ser un resultado completamente general.

Supóngase ahora que es la diferencia de potencial $\Delta\phi$ la que se mantiene constante. Al combinar (7-21) con (10-73) se encuentra que $U_e = \frac{1}{2}C(\Delta\phi)^2 = \frac{1}{2}\kappa_e C_0(\Delta\phi)^2 = \kappa_e U_0$, de manera que

$$U_e = \kappa_e U_0 \qquad (\Delta\phi = \text{constante}) \tag{10-95}$$

y, en contraste con (10-94), la energía del capacitor ha aumentado por un factor κ_e. La razón es que al aumentar la capacitancia de carga también aumenta, por lo que la batería debe realizar trabajo sobre estas cargas libres para separarlas. Además, también debe polarizar al dieléctrico, de modo que el efecto neto de todos estos cambios es el expresado en (10-95).

10-9 Fuerzas

Cuando un dieléctrico se polariza, el campo eléctrico ejercerá fuerzas sobre las densidades de carga ligada resultantes. Ya que todo este tema de las fuerzas sobre dieléctricos y sobre conductores en presencia de dieléctricos es muy complicado, es fácil obtener resultados equivocados. Por ello, aquí solamente se verán dos situaciones de las más sencillas que existen. Es más, ni siquiera se tocará lo concerniente al balance que debe existir entre las fuerzas eléctricas y mecánicas de un sistema para mantenerlo en equilibrio mecánico o para producir un nuevo equilibrio cuando se aplican los campos eléctricos. Si el dieléctrico no es rígido, por lo general sufrirá una deformación bajo la influencia de estas fuerzas eléctricas. A este fenómeno se le denomina *electrostricción*; por lo común suele ser un efecto muy pequeño, pero bajo ciertas circunstancias puede revestir gran interés e importancia.

Ejemplo

Fuerza superficial promedio sobre un dieléctrico. Considérese el caso particular de un capacitor. Como ya se vio en (10-94), la energía de un capacitor, a carga constante, disminuirá en la presencia de un dieléctrico. Ya que la tendencia natural de todos los sistemas es hacia la disminución de su energía, se puede considerar que un capacitor "desea" que el dieléctrico se encuentre presente. En otras palabras, debe existir una fuerza tal sobre el dieléctrico que tienda a hacer que permanezca entre las placas del capacitor.

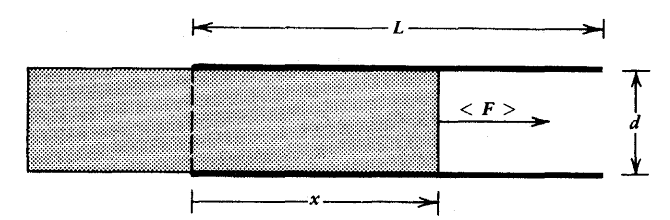


Figura 10-18. Fuerza sobre un dieléctrico.

De manera más específica, considérese un capacitor de placas paralelas cuyas placas son cuadrados de lado L, de manera que $A = L^2$. Supóngase también que se cuenta con un trozo de dieléctrico de dimensiones tales que entra justamente en el espacio entre placas. Se desprecian efectos de borde y se supone que el campo es diferente de cero sólo en la región entre las placas. La figura 10-18 muestra una vista de perfil de la situación, en la que se aprecia que el dieléctrico se encuentra introducido a medias entre las placas. Por medio de (10-94) se puede encontrar el cambio total en la energía cuando el dieléctrico está totalmente introducido:

$$\Delta U_e = U_e - U_0 = -\left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e}\right) U_0 \tag{10-96}$$

Si $\langle F \rangle$ es la fuerza promedio sobre el dieléctrico y L es el desplazamiento total del mismo, por medio de (7-37) se tiene que

$$\langle F \rangle = -\frac{\Delta U_e}{L} = \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e}\right)\frac{U_0}{L} \tag{10-97}$$

que es positiva, con lo que se confirma que el dieléctrico será atraído hacia la región entre las placas. Al expresar este resultado en función de la densidad de energía original constante, u_{e0}, de (10-93) resulta que $U_0 = u_{e0}$ (volumen) $= u_{e0}L^2 d$, de manera que

$$\langle F \rangle = \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e}\right)u_{e0}(Ld)$$

Pero Ld es el área de la cara del dieléctrico sobre la que $\langle F \rangle$ actúa, de modo que si $\langle f_a \rangle$ es la fuerza promedio por unidad de superficie, se tiene que

$$\langle f_a \rangle = \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e}\right)u_{e0} \tag{10-98}$$

expresada en función de la situación original en vacío.

Ejemplo

Conductor en contacto con un fluido dieléctrico. En (7-50) se encontró una expresión para la fuerza por unidad de área sobre la superficie de un conductor. Se vio que era numéricamente igual a la densidad de energía y en dirección de la normal exterior de la superficie conductora: $\mathbf{f}_e = u_e\hat{\mathbf{n}}$. Aquí se llegará a la misma conclusión, pero debe tenerse mucho cuidado.

Si se recuerda, (7-50) se obtuvo al considerar los cambios energéticos producidos y la fuerza requerida cuando se cambia la separación entre las placas de una capacitor en una cantidad muy pequeña. El tratamiento fue lo suficientemente general para usar aquí los mismos resultados, siendo tan sólo necesario completarlos con lo que se indica en (10-37) acerca de los efectos que un dieléctrico ejerce sobre la capacitancia, es decir, $C = \kappa_e C_0$. Si la carga se mantiene constante, la fuerza total sobre las placas en presencia del dieléctrico seguirá siendo la de (7-39), con lo que se tiene que

$$F_e = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx} = \frac{Q^2}{2(\kappa_e C_0)^2}\frac{d(\kappa_e C_0)}{dx} = \frac{F_{e0}}{\kappa_e} \tag{10-99}$$

en función de la fuerza F_{e0} correspondiente a la situación de vacío entre las placas. Se ve así que la fuerza entre las placas se ha reducido por el factor κ_e. Para poder utilizar $C = \kappa_e C_0$ de esta manera, es esencial que el dieléctrico llene por completo la región entre las placas, como quedará ilustrado en algunos de los ejercicios. Lo que esto significa es que, de hecho, se está suponiendo que el dieléctrico es un fluido y que el capacitor se encuentra sumergido en él. Así, cuando la distancia entre las placas disminuye, el dieléctrico fluye hacia afuera, mientras que si se aumentara la separación entre placas, el dieléctrico llenaría el nuevo volumen de inmediato ya que se encuentra disponible en la región externa a las placas.

Si se mantiene constante la diferencia de potencial, la forma de en medio de (7-46) es la más apropiada, con la que se obtiene que

$$F_e = \tfrac{1}{2}(\Delta\phi)^2\frac{dC}{dx} = \tfrac{1}{2}(\Delta\phi)^2\frac{d(\kappa_e C_0)}{dx} = \kappa_e F_{e0} \tag{10-100}$$

y, en este caso, la fuerza se incrementa por el factor κ_e.

Una de las razones para expresar (7-39) como se hizo, para obtener $f_e = u_e$ usando las propiedades específicas del capacitor de placas paralelas, fue para obtener un resultado de forma más sencilla y de mayor generalidad que los métodos que se usaron. Es natural preguntarse si se puede hacer lo mismo aquí. Uno de los problemas es que en presencia de un dieléctrico los dos métodos, el de carga constante y el de diferencia de potencial constante, tienen en realidad consecuencias *diferentes*. Aún si se pudiera lograr, la manera de hacerlo parecería algo artificial. Si se mantiene constante la carga libre Q, $\mathbf{D}$ también será constante, por lo que se podrá expresar la densidad de energía de (10-83) como $\mathbf{D}^2/2\epsilon$ y, por lo tanto, la fuerza por unidad de área será

$$f_e = u_e = \frac{\mathbf{D}^2}{2\epsilon} \qquad (Q = \text{constante}) \qquad \text{(10-101)}$$

Así, para $\mathbf{D}$ = const , la relación de las fuerzas con y sin el dieléctrico será de $f_e/f_{e0} = \epsilon_0/\epsilon = 1/\kappa_e$, lo que concuerda con (10-99). Por otro lado, si la diferencia de potencial $\Delta\phi$ se mantiene constante, $\mathbf{E}$ también será constante, por lo que se puede escribir u_e más apropiadamente como $\frac{1}{2}\epsilon\mathbf{E}^2$, de acuerdo con (10-83), de manera que

$$f_e = u_e = \tfrac{1}{2}\epsilon\mathbf{E}^2 \qquad (\Delta\phi = \text{constante}) \qquad \text{(10-102)}$$

Así, la relación entre las fuerzas con y sin el dieléctrico será de $f_e/f_{e0} = \epsilon/\epsilon_0 = \kappa_e$ como lo requiere (10-100).

Ejercicios

10-1 El momento dipolar permanente de la molécula de agua es de aproximadamente 6.2×10^{-30} coulomb-metro. ¿Cuál es la polarización máxima posible para el valor de agua a 100°C y a presión atmosférica?

10-2 La electrostática se inició con la observación de que la materia cargada atraía pequeños objetos de materia. Describir cualitativamente cómo un objeto cargado puede ejercer una fuerza neta sobre un campo neutral y demostrar que esta fuerza es de atracción, de acuerdo con la experiencia.

10-3 Un trozo de material tiene caras paralelas. Una de ellas coincide con el plano xy y la otra está dada por $z = t$. El material posee una polarización no uniforme $\mathbf{P} = P(1 + \alpha z)\hat{\mathbf{z}}$, donde P y α son constantes. Encontrar las densidades superficial y volumétrica de carga ligada. Encontrar la carga ligada total contenida en un cilindro del material de sección A y lados paralelos al eje z, y así verificar directamente que (10-13) es válida en este caso.

10-4 Considérese un paralelepípedo de volumen $\Delta_x\Delta_y\Delta_z$ fijo dentro de un dieléctrico. Si ρ_+ es la densidad promedio de carga ligada positiva y $\mathbf{R}_+$ es el desplazamiento promedio de estas cargas cuando el material está polarizado, demostrar que la ganancia neta de cargas positivas a través de las cargas paralelas al plano yz será

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_+ R_{+x})\Delta x\Delta y\Delta z$$

De manera similar, encontrar la ganancia neta debida al movimiento de carga negativa de densidad $-\rho_+$ (¿por qué?) y el desplazamiento promedio $\mathbf{R}_-$. Combinar los resultados obtenidos para todas las caras y así demostrar que la ganancia neta de carga por unidad de volumen es $\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P}$.

10-5 Encontrar el potencial ϕ y E_z sobre el eje, producidos por la esfera polarizada uniformemente que se estudió en la sección 10-4, para valores negativos de z. Demostrar que sus respuestas concuerdan con los resultados obtenidos para $z > 0$ y con la figura 10-11.

10-6 Encontrar la carga ligada positiva total de la esfera uniformemente polarizada de la figura 10-8.
10-7 Una esfera de radio a posee una polarización radial dada por $\mathbf{P} = \alpha r^n \hat{\mathbf{r}}$, donde α y n son constantes, siendo $n \geqslant 0$. Encontrar las densidades superficial y volumétrica de carga ligada. Encontrar **E** dentro y fuera de la esfera. Verificar que los resultados obtenidos para **E** satisfacen las condiciones de frontera apropiadas. Encontrar ϕ dentro y fuera de la esfera. Dibujar los resultados de **E** y ϕ.
10-8 Repetir el ejercicio 10-7 para el caso en que $n = -1$. Demostrar también que $n = -2$ no es una posibilidad, de acuerdo con (10-13).
10-9 Un cubo de arista $2a$ tiene sus caras perpendiculares a los ejes x, y y z, y centro en el origen. Está uniformemente polarizado en la dirección de z. Encontrar **E** en el centro del cubo.
10-10 Una cavidad esférica de radio a se encuentra dentro de un dieléctrico muy grande uniformemente polarizado. Encontrar **E** en el centro de la cavidad.
10-11 Un cilindro de $2L$ de longitud tiene su eje sobre el eje z y el radio de su sección circular es a. El origen se encuentra en el centro del cilindro, mismo que está uniformemente polarizado en la dirección del eje, es decir, $\mathbf{P} = P\hat{\mathbf{z}}$, siendo $\mathbf{P}$ = const.
(a) Encontrar las densidades de carga ligada ρ_b y σ_b. (b) Encontrar el campo eléctrico en todos los puntos sobre el eje z para los que $z \geqslant 0$. (c) Verificar que los resultados en (b) satisfacen la condición de frontera en $z = L$. (d) A partir del resultado de (b), encontrar **E** en el origen. (e) Dibujar el resultado de (d) como una función de a/L. ¿Para qué valor de a/L se alcanza el valor máximo de **E** en el origen y cuál es este valor? ¿Es razonable?
10-12 Un cilindro infinito de sección circular de radio a tiene su eje sobre el eje z. Se encuentra uniformemente polarizado en dirección transversal a su eje, es decir, $\mathbf{P} = P\hat{\mathbf{x}}$, siendo P = const. Encontrar **E** para cualquier punto sobre el eje del cilindro. (Es más fácil si se elige el punto de campo en el origen.)
10-13 ¿Cuál o cuáles de los resultados (10-55) a (10-59) siguen siendo válidos si el dieléctrico es lineal e isotrópico pero no homogéneo?
10-14 Demostrar que los ángulos de la figura 10-14 satisfacen la relación $\kappa_{e1} \cot \theta_1 = \kappa_{e2} \cot \theta_2$. Supóngase que la región 1 es polietileno, para el cual $\kappa_e = 2.31$, y que la región 2 es vidrio, para el que $\kappa_{e2} = 4.00$. Encontrar θ_2 si $\theta_1 = 36°$. Demostrar que la relación entre la densidad superficial de carga ligada de la región 1 y la densidad superficial de carga ligada total es independiente del ángulo, y evaluarla para este caso.
10-15 Encontrar las expresiones análogas a (10-58) y (10-59) para el caso en que el dieléctrico no es homogéneo y así demostrar que puede existir densidad de carga ligada aún en ausencia de carga libre. ¿Qué condiciones adicionales son necesarias para que $\rho_b = 0$ cuando $\rho_f = 0$?
10-16 Dos cargas puntuales q y $-q$ se encuentran inicialmente en el vacío y separadas por una distancia a. Se introduce entonces una placa dieléctrica de grueso $d < a$ a la mitad de la distancia entre ellas, con las caras de las placas perpendiculares a la recta que conecta las cargas. Demostrar cualitativamente que la fuerza total sobre q aumentará.
10-17 Una carga puntual q está situada en el centro de una esfera dieléctrica de radio a. Encontrar **D**, **E** y **P** en todo punto y graficar los resultados. ¿Cuál es la carga ligada total sobre la superficie de la esfera?
10-18 Un dieléctrico infinito con constante dieléctrica κ_e tiene una cavidad esférica de radio a en su interior. Hay una carga puntual q en el centro de la cavidad. Encontrar ρ_b y σ_b. Encontrar la carga ligada total sobre la superficie de la cavidad. ¿Cómo pueden reconciliarse estos resultados con (10-13)?
10-19 Los conductores coaxiales infinitamente largos de la figura 6-12 tienen el espacio entre ellos lleno de un dieléctrico cuyo κ_e está dada por $\alpha\rho^n$ en coordenadas cilíndricas, siendo α y n constantes. Existe carga libre, λ_f, por unidad de longitud en el cilindro interior. Encontrar **D**, **E** y ρ_b en todos los puntos de la región entre los conductores. ¿Bajo qué circunstancias será constante la magnitud de **E**? ¿Cuáles serían los valores de **D** y ρ_b correspondientes?

10-20 Una placa dieléctrica infinita de grueso t y caras paralelas posee una densidad superficial de carga libre constante, σ_f, sobre *una* de sus caras. Encontrar **E** en todo lugar. ¿Cuál es la densidad superficial de carga ligada en la cara que no posee carga libre?

10-21 Una línea infinita de carga libre por unidad de longitud λ_f constante coincide con el eje z. Es coaxial con un cilindro dieléctrico de radio a cuya constante dieléctrica varía a lo largo del eje de acuerdo con $\kappa_e = \alpha + \beta z$, siendo α y β constantes. Encontrar **D**, **E**, **P** y ρ_b en todos los puntos dentro del cilindro. ¿Es consistente este resultado con los resultados del ejercicio 10-15?

10-22 ¿Cómo se afectan los valores de los coeficientes de potencial, capacitancia e inducción al introducir un dieléctrico i.h.l. en todas las regiones de un sistema general? [Estos coeficientes se encuentran definidos en (6-11) y (6-43).]

10-23 Una placa dieléctrica de grueso t se introduce en un capacitor de placas paralelas cuya separación entre placas es d y cuya área de placas es A, como se muestra en la figura 10-19. Las superficies de la placa son paralelas a las superficies de las placas del capacitor. Encontrar **D**, **E** y **P** en función de x y graficar los resultados. (Expresarlos en función de Q.) Encontrar la capacitancia de este sistema. Verificar que el resultado para C se reduce a los valores apropiados cuando $t = 0$ y $t = d$.

10-24 Considerar de nuevo el ejemplo usado para encontrar (10-73) para el caso en que la diferencia de potencial se mantiene constante mientras se introduce el dieléctrico entre las placas. Encontrar qué les ocurre a **E**, **D** y Q y así demostrar que (10-37) es correcta

10-25 La región entre las placas de un capacitor de placas paralelas se llena con un dieléctrico cuya κ_e varía linealmente con la distancia, desde un valor κ_{e1} en una de la placas hasta un valor κ_{e2} en la otra. Encontrar la capacitancia. Como comprobación del resultado, demostrar que C se reduce al resultado correcto cuando κ_e es constante. Demostrar también que el resultado es independiente de si κ_{e1} es mayor o menor que κ_{e2}.

10-26 La región entre las placas del capacitor esférico de la figura 10-17 se llena con un dieléctrico cuya κ_e varía de acuerdo con

$$\kappa_e = \kappa_{ea}\left[1 + \alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)\right]$$

donde κ_{ea} y α son constantes. Encontrar la capacitancia. ¿Se reduce este resultado al valor correcto cuando $\alpha = 0$?

10-27 El capacitor cilíndrico coaxial de la figura 6-12 tiene dos dieléctricos colocados entre sus placas. El valor de κ_e es κ_{e1} para $a \leqslant \rho < \rho_0$, y κ_{e2} para $\rho_0 \leqslant \rho \leqslant b$. Encontrar la capacitancia de una longitud L de este sistema.

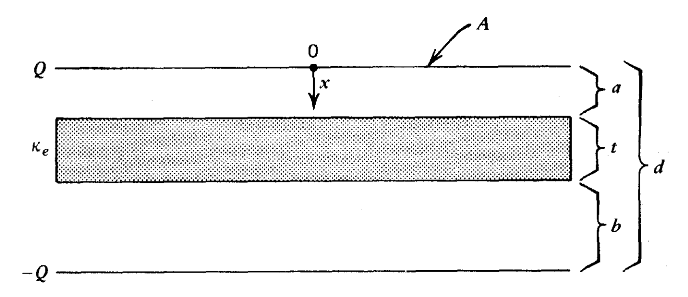


Figura 10-19. Capacitor del ejercicio 10-23.

10-28 La región entre las placas del capacitor esférico de la figura 10-20 se llena con dos dieléctricos i.h.l. con las capacidades inductivas específicas que se muestran. El volumen total se encuentra dividido exactamente a la mitad por un plano que pasa por el centro común de los conductores esféricos. Demostrar que la capacidad está dada por $C = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)\, ab/(b-a)$.

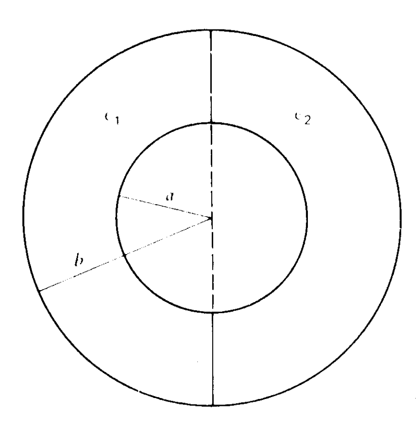


Figura 10-20. Capacitor del ejercicio 10-28.

10-29 El capacitor esférico de la figura 10-17 tiene ahora dos dieléctricos diferentes entre sus placas. El valor de κ_e es κ_{e1} para $a \leqslant r < r_0$, y κ_{e2} para $r_0 \leqslant r \leqslant b$. Encontrar la capacitancia de este sistema encontrando primero la energía total de los campos entre las placas.

10-30 El capacitor cilíndrico coaxial de la figura 6-12 tiene un dieléctrico entre sus placas cuya constante dieléctrica varía como $\kappa_e = \kappa_0 \rho^n$, donde κ_0 y n son constantes positivas. Encontrar la capacitancia de una longitud L de este sistema, encontrando primero la energía en los campos entre las placas.

10-31 Una esfera dieléctrica i.h.l. de radio a también posee carga libre a densidad constante ρ_0. Encontrar **D** y **E** para todos los puntos dentro de la esfera. Encontrar la energía total de los campos dentro de la esfera. ¿Cuál es la carga ligada volumétrica total? Encontrar el potencial ϕ debido a este sistema, para toda r. ¿Cuál es el valor de ϕ en el centro de la esfera?

10-32 El capacitor de placas paralelas de la figura 10-18 tiene placas cuadradas de lado L. Cuando el dieléctrico se ha introducido una distancia x, demostrar que la capacitancia es una función de x y está dada por $C(x) = (\epsilon_0 L/d)\,[\,L + (\kappa_e - 1)x\,]$.

10-33 El capacitor de placas paralelas de la figura 10-18 tiene placas cuadradas de lado L. Se encuentra conectado a una batería cuya diferencia de potencial es $\Delta\phi_0$ cuando no existe dieléctrico entre las placas. Mientras que se mantiene esta conexión a la batería, se introduce el dieléctrico hasta la mitad en la región entre las placas. Luego se desconecta la batería. Después de ello se sigue introduciendo el dieléctrico hasta que llene completamente la región entre las placas. Encontrar los valores finales de $\Delta\phi$, Q y **E**.

10-34 Considérese el capacitor de placas paralelas de la figura 10-18. Encontrar la fuerza total sobre la cara del dieléctrico, en función de x. ¿Existe un aumento o una disminución de $F(x)$ a medida que x aumenta? Demostrar que cuando se promedia esta expresión de $F(x)$ sobre x, el resultado es (10-97). Clave: recuérdese el ejercicio 10-32.

10-35 Dos placas conductoras cuadradas de lado L se colocan a una distancia d una de otra para formar un capacitor de placas paralelas. Se mantienen a una diferencia de potencial $\Delta\phi$ mientras que se introduce entre ellas una placa dieléctrica de grueso $t < d$ y longitud L. Despréciense los efectos de borde y encuéntrese la fuerza promedio con la que el dieléctrico es atraído hacia el espacio entre las placas.

10-36 Un capacitor de placas paralelas cuadradas de lado L y separación d recibe una carga Q y se desconecta de la batería. Se coloca entonces verticalmente con uno de sus extremos sumergido en un recipiente que contiene un dieléctrico líquido de densidad de masa ρ_l. Despreciar los efectos de borde y demostrar que el líquido subirá hasta una altura h dentro del capacitor, siendo

$$h = \frac{(\kappa_e - 1)Q^2}{2\epsilon_0 g \rho_l L^4}$$

10-37 Dos cilindros conductores coaxiales como los de la figura 6-12 se introducen verticalmente en un recipiente que contiene un dieléctrico líquido de densidad de masa ρ_l Si se les aplica una diferencia de potencial $\Delta\phi$, el líquido sube a una altura h entre las placas. Despreciar los efectos de borde y demostrar que la susceptibilidad del líquido está dada por

$$\chi_e = \frac{\rho_l g h(b^2 - a^2)\ln(b/a)}{\epsilon_0(\Delta\phi)^2}$$

10-38 Derivar (10-90). Resulta mejor proceder de la siguiente manera. Primero se escribe el integrando de (10-89) como $\mathbf{E}\cdot(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) + \mathbf{E}_0\cdot(\mathbf{D} - \mathbf{D}_0) + (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0\cdot\mathbf{D})$. Después se utilizan (5-3), (1-117), (10-41), (1-59) y una argumentación análoga a la usada para encontrar (7-27) y se demuestra que los primeros dos términos del nuevo integrando dan una contribución de cero a (10-89). Después se demuestra que el tercer término es igual a cero en el vacío fuera del dieléctrico. Por último, se aplica (10-40) a $(\mathbf{D}_0, \mathbf{E}_0)$ y $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ hasta llegar a (10-90).

Capítulo

11

Métodos especiales en electrostática

Hasta ahora se ha encontrado el potencial escalar por integración sobre una distribución dada de cargas fuente por medio de (5-7) y después se ha obtenido el campo eléctrico a partir de $\mathbf{E} = - \ \phi$. Como se hizo notar en el párrafo que siguió a (5-14), algunos problemas están enunciados de tal modo que este método no es factible, por lo que es conveniente contar con otros métodos alternativos. Se puede abordar el problema resolviendo la ecuación diferencia con derivadas parciales que satisface ϕ. Esta es la ecuación de Poisson, dada en (5-15):

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{11-1}$$

donde ρ es la densidad total de carga. En (10-55) se vio también que puede expresarse en función exclusivamente de la densidad de carga libre para dieléctricos homógeneos isotrópicos lineales:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{11-2}$$

Si las densidades relevantes de carga son iguales a cero, estas dos ecuaciones se reducen a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{11-3}$$

Debido a la relativa simplicidad de la ecuación de Laplace, el énfasis estará en resolverla. Sin embargo, se estudiará un ejemplo de cómo encontrar la solución de la ecuación de Poisson en la sección 11-16.

A través de los años se han diseñado muchos métodos para resolver estas ecuaciones. Algunos de estos métodos son muy generales y sistemáticos, mientras que otros son extremadamente especializados y de aplicación y justificación de mucho de lo que se hará aquí se centra en un teorema muy importante que se analiza a continuación.

11-1 Unicidad de la solución a la ecuación de Laplace

Se desea demostrar que si se ha logrado encontrar una solución a la ecuación de Laplace que satisface las condiciones de frontera dadas (por ejemplo, que se reduce a los valores asignados de antemano para todos los puntos de la superficie que rodea la región), esta solución es única. El término "condiciones de frontera" se utiliza aquí de una manera diferente a como se hizo en el capítulo 9. Allí se refería al comportamiento de los campos en una superficie de discontinuidad entre dos medios. Aquí se supone que está tratando con una región rodeada por una superficie para la que el valor numérico del potencial se encuentra dado o conocido en todos los puntos; es decir, no se conocen los detalles de la distribución de cargas fuente fuera de esta región, pero sí se conoce el potencial que ellas producen sobre la superficie. Por ejemplo, parte de la frontera puede ser un conductor que se mantiene a un potencial de 12 volts por medio de una batería. Así, cualquiera que sea ϕ en otros puntos, debe reducirse al valor de 12 volts siempre que el punto de campo se localice en algún lugar del conductor. Algunas veces la frontera en cuestión se encuentra muy lejos, es decir, en el infinito.

Sea $\phi_1(\mathbf{r})$ una solución de (11-3) que satisface las condiciones de frontera dadas. Supóngase también que existe otra solución diferente, $\phi_2(\mathbf{r})$, que satisface las mismas condiciones de frontera. Se desea demostrar que ϕ_1 y ϕ_2 son en realidad idénticas entre sí. Sea $\phi = \phi_1 - \phi_2$. Entonces $^2\phi = {}^2\phi_1 - {}^2\phi_2 = 0$, de acuerdo con (11-3); por lo tanto ϕ es también una solución de la ecuación de Laplace. Sobre la superficie limitante S, $\phi_1 = \phi_2$ de modo que

$$\phi = 0 \quad \text{en la frontera} \tag{11-4}$$

Si ahora se utilizan (1-117), (1-45), (1-17) y (11-3), se encuentra que

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla^2 \phi = (\nabla \phi)^2 \tag{11-5}$$

lo que, cuando se usa en (1-59) conduce a

$$\int_V (\nabla \phi)^2 d\tau = \int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) d\tau = \oint_S (\phi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{11-6}$$

de acuerdo con (11-4). Como el integrando de la primera integral es una suma de cuadrados y, por lo tanto, intrínsecamente positivo, la integral puede ser igual a cero únicamente si el propio integrando es cero en todas partes; por lo tanto,

$$(\nabla \phi)^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 = 0 \tag{11-7}$$

de acuerdo con (1-37). La expresión en (11-7) es otra vez una suma de cuadrados, por lo que los términos individuales deben ser cero, o sea,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \tag{11-8}$$

de manera que $\varphi = \text{const.}$ Pero, ya que $\phi = 0$ en la frontera y es constante, se puede ver que $\phi = 0$ en todas partes, por lo que

$$\phi_1 = \phi_2 \qquad \text{en todas partes} \tag{11-9}$$

que es lo que se quería demostrar.

Algunas veces las condiciones de frontera se enuncian en función de las componentes del campo, es decir, en función de las derivadas del potencial, en lugar de su valor absoluto. Se pueden demostrar teoremas de unicidad análogos para la ecuación de Laplace aplicables en tales situación; un ejemplo de ello está dado en el ejercicio 11-1. De manera similar, se puede demostrar un teorema de unicidad para la ecuación de Poisson, aunque no se considera necesario hacerlo aquí.

Desde un punto de vista práctico, el significado del resultado (11-9) es que una vez que se ha encontrado una solución para la ecuación de Laplace, por el método que se desee, y que satisfaga las condiciones de frontera dadas, se sabe que es la única solución y *no* se requiere siquiera considerar la posibilidad de que pudiera existir alguna otra. "Por el método que se desee" puede incluir métodos sistemáticos, adivinanzas burdas, cálculos atinados o simplemente recordar un resultado previo y aplicarlo de alguna manera astuta.

Los primeros métodos que se estudian aquí para resolver (11-3) son muy interesantes pero muy especializados.

11-2 Método de las imágenes

Recuérdese que la ley de Coulomb fue la base para obtener la expresión (5-2) para el potencial de un sistema de cargas, en la que la contribución de cada una de las cargas es proporcional a $1/R$, siendo R la distancia de la carga al punto de campo. Por lo tanto, dicha expresión debe satisfacer la ecuación de Laplace necesariamente; también se puede observar esto explícitamente de (1-146). En otras palabras, la suma de los potenciales individuales de un conjunto de cargas puntuales es, automáticamente, una solución de la ecuación de Laplace. Este hecho constituye la base del *método de las imágenes.* El objetivo es encontrar un conjunto de cargas *ficticias* (cargas imagen) las que, junto con cualesquiera cargas reales que se encuentren presentes, harán posible satisfacer las condiciones de frontera y así obtener la función única del potencial. Es decir, se *intenta* escribir el potencial como

$$\phi = \sum_{\text{real}} \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 R_a} + \sum_{\text{imagen}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i} \tag{11-10}$$

y encontrar la mejor combinación posible. La idea básica es que las cargas imagen *simularán* de alguna manera el comportamiento de las otras cargas fuente o del material presente; de acuerdo con esto, las cargas imagen se situarán fuera de la región para la que se está tratando de encontrar ϕ. Este método quedará mejor ilustrado por medio de ejemplos específicos.

Ejemplo

Carga puntual y plano conductor semi-infinito conectado a tierra. Como se muestra en la figura 11-1, la carga puntual q se encuentra a una distancia d del plano yz, que a su vez es la superficie de un conductor que ocupa todo el espacio a la izquierda de este plano, es decir, para todos los valores negativos de x. La otra mitad del espacio está vacía. La condición de frontera es que $\phi =$ const. en $x = 0$, de acuerdo con (6-2). Por simplicidad, se toma este valor constante igual a cero (el conductor está conectado a tierra); si el valor real es una constante diferente, se le puede simplemente sumar al resultado final. Así, la condición de frontera es

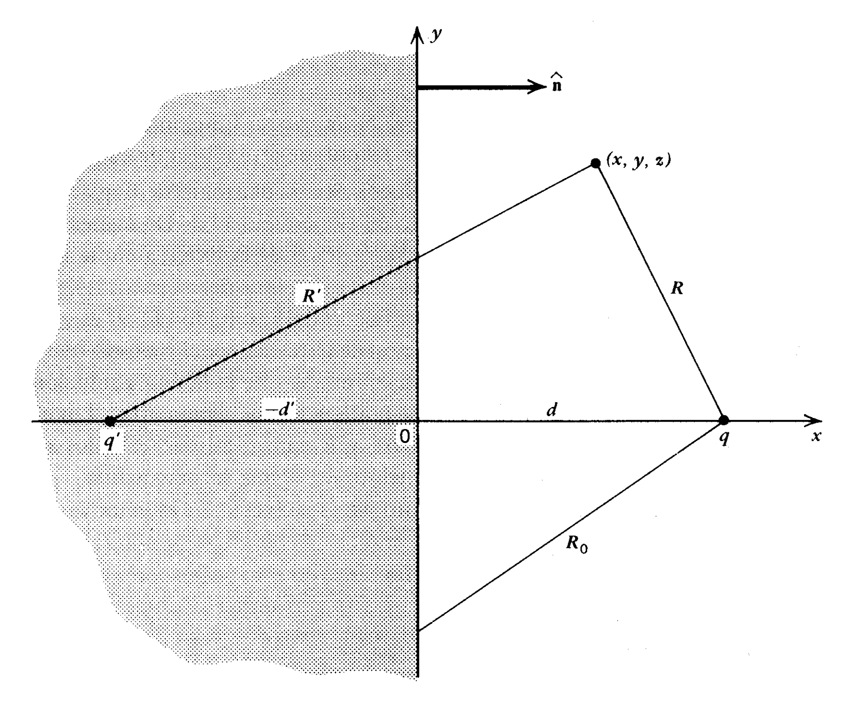


Figura 11-1. Carga puntual y plano conductor semiinfinito conectado a tierra. q es la carga imagen.

$$\phi(0,y,z)=0 \tag{11-11}$$

para todas las y y z. Se intentará usar (11-10) para satisfacer (11-11) con una sola carga imagen, q', localizada también sobre el eje x a una distancia d' dentro del conductor (y por ellc remplazando al conductor en lo que respecta a la región al vacío). Dado que las coordenadas de q y q' son $(d,0,0)$ y $(-d',0,0)$ respectivamente, se encuentra que (11-10) junto con (5-6) da

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}+\frac{q'}{\left[(x+d')^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right\} \tag{11-12}$$

Cuando esto se combina (11-11), se observa que se debe satisfacer la condición de que

$$\frac{q}{(d^2+y^2+z^2)^{1/2}}+\frac{q'}{(d'^2+y^2+z^2)^{1/2}}=0 \tag{11-13}$$

Resulta claro que esto queda satisfecho siempre que $d'=d$ y $q'=-q$. Por lo tanto, q' se encuentra tan "atrás" de la frontera como q se encuentra "adelante" de ella, de tal forma que el término "imagen" le queda muy bien; nótese que durante este proceso el signo cambió, esto es algo muy característico. Si ahora se sustituyen en (11-12) estos valores recién encontrados, se obtiene la expresión *única* del potencial:

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}-\frac{1}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right\} \tag{11-14}$$

que viene a ser la solución completa del problema. Se utiliza (11-14) únicamente para $x \geqslant 0$; en al caso de $x < 0$, ϕ tiene el mismo valor igual a cero que en la superficie del conductor, tal como resulta de (6-1).

Se pueden ahora calcular las componentes del campo eléctrico a partir de (5-3):

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{(x-d)}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{(x+d)}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\} \\
E_y &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\} \qquad (11\text{-}15) \\
E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}
\end{aligned}
$$

Se puede verificar el resultado viendo si posee las propiedades correctas. E_y y E_z son componentes tangenciales en la superficie del conductor, por lo que, de acuerdo con (6-2), deben anularse; al observar (11-15) se puede apreciar fácilmente que es así, ya que $E_y(0, y, z) = E_z(0, y, z) = 0$. En la superficie del conductor, la componente normal de **E** es $E_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} = E_x$, resultando

$$E_n = E_x(0,y,z) = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0 R_0^3} \qquad (11\text{-}16)$$

donde R_0 es la distancia desde q al punto correspondiente del plano $x = 0$, como también se muestra en la figura. Pero ya se sabe que si E_n no es cero, implica la existencia de una densidad superficial de carga (en esta caso, carga libre), la que, de (11-16) y (6-4), resulta ser

$$\sigma_f(y,z) = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (11\text{-}17)$$

Se dice que esta carga superficial fue *inducida* por la carga puntual q. Se puede observar que σ_f no es constante en el plano; su magnitud es máxima en el origen, directamente bajo q, y es igual a $q/2\pi d^2$, y $\sigma_f \to 0$ a medida que y y z se aproximan al infinito. Se puede encontrar la carga total inducida sobre el plano yz si se combina (11-17) con (2-16) y (1-55):

$$q_{\text{ind}} = -\frac{qd}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy\,dz}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{qd}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{d^2+z^2} = -q \qquad (11\text{-}18)$$

donde se han utilizado los resultados anteriores (3-7), (3-8) y (3-12) para resolver las integrales. Así, la carga total inducida resulta ser igual y opuesta a la carga inductora y, por lo tanto, igual a la carga imagen, lo cual es lógico suponer ya que esta última simula el comportamiento total del conductor.

Para encontrar la fuerza que actúa sobre q se requiere saber el valor de **E** en este punto. Sin embargo, no se pueden utilizar los primeros términos entre corchetes de (11-15) porque representa la contribución de la propia q, según (11-12), lo que significaría que q ejerce una fuerza sobre sí misma—posibilidad que se ha excluido constantemente. Si se sustituyen las coordenadas de q, $(d, 0,0)$, en los demás términos de (11-15) se encuentra que $E_y = E_z = 0$ y $E_x = -q/16\pi\epsilon_0 d^2$, de modo que la fuerza sobre q resulta ser

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}=-\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2}\hat{\mathbf{x}} \tag{11-19}$$

y está dirigida hacia el conductor. Es obvio que esto representa la fuerza de atracción resultante entre q y la carga superficial inducida σ_f, como puede comprobarse por integración directa de (2-17). Si se expresa (11-19) como

$$\mathbf{F}=-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2}\hat{\mathbf{x}} \tag{11-20}$$

se puede observar que concuerda exactamente con la forma de la ley de Coulomb para la atracción entre q y la carga imagen $-q$, ya que se encuentran separadas por una distancia total $2d$.

Al hacer que ϕ sea igual a una constante en (11-14) se obtiene la ecuación de las superficies equipotenciales en la región $x \geqslant 0$, y la hacer que $z = 0$ se obtiene las curvas equipotenciales en la plano xy. Según (11-14), la ecuación de la superficie equipotencial en función de las distancias R y R' de la figura 11-1 es

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}=\frac{4\pi\epsilon_0\phi}{q}=\text{const.} \tag{11-21}$$

La figura 11-2 muestra algunas de estas curvas con líneas continuas. Las líneas punteadas vienen a ser las líneas de **E**. Su ecuación puede encontrarse por medio de (5-39) y (11-15).

Ejemplo

Carga puntual y esfera conductora conectada a tierra. Véase la figura 11-3. Se utilizan coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera de radio a, y se toma q a una distancia d del centro, en una posición por la que pasa el eje z. La condición de frontera consiste en que el potencial sea igual a cero en la superficie de la esfera, es decir, que

$$\phi(a,\theta,\varphi)=0 \tag{11-22}$$

Se intentará resolver este problema por medio de una sola carga imagen, q', situada a una distancia d' del centro de la esfera; es necesario que $d'<a$, de manera que q' se encuentre fuera de la región al vacío. El potencial en cualquier punto de campo, P, se obtiene a partir de (11-10), la ley de los cosenos y la figura; esto resulta en

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{R}+\frac{q'}{R'}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}}+\frac{q'}{(r^2+d'^2-2rd'\cos\theta)^{1/2}}\right] \tag{11-23}$$

Al combinar esto con (11-22) se obtiene la condición

$$\frac{q}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{1/2}}+\frac{q'}{(a^2+d'^2-2ad'\cos\theta)^{1/2}}=0 \tag{11-24}$$

de la que deben encontrarse q' y d'. Ya que por lo general se necesitan dos ecuaciones, y dado que (11-24) debe ser verdadera para todos los valores de θ, se pueden obtener dichas ecuaciones al tomar dos valores de θ particularmente útiles, es decir, 0 y π. Cuando se les sustituye en (11-24) se obtienen las ecuaciones

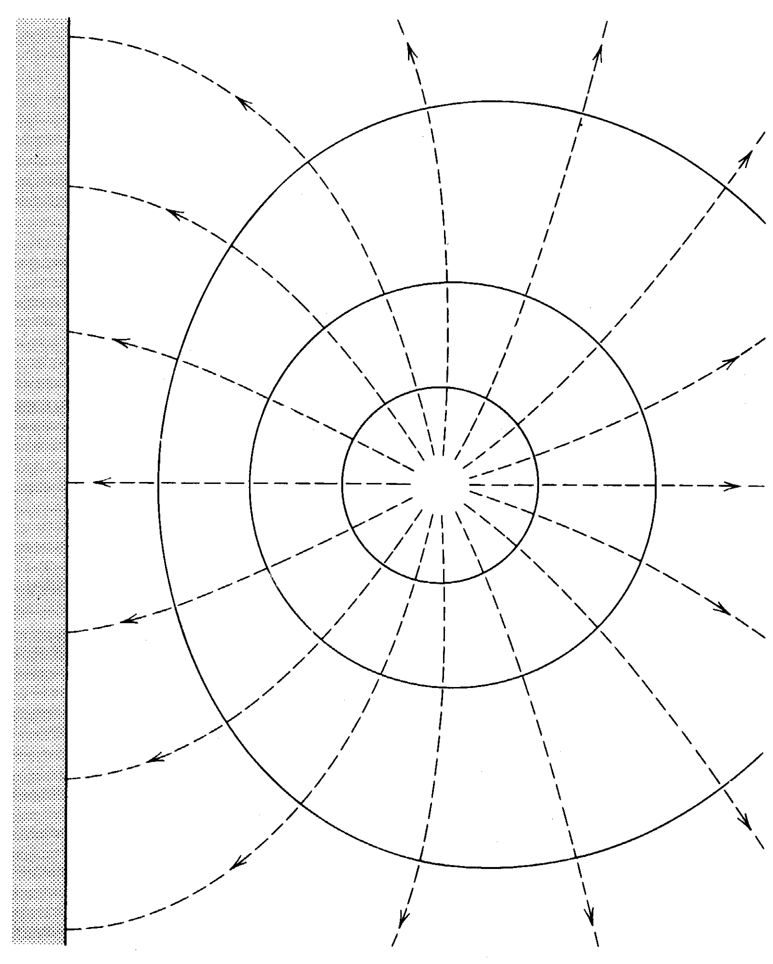


Figura 11-2 Equipotenciales (líneas llenas) y líneas de campo eléctrico (punteadas) para el sistema de la figura 11-1.

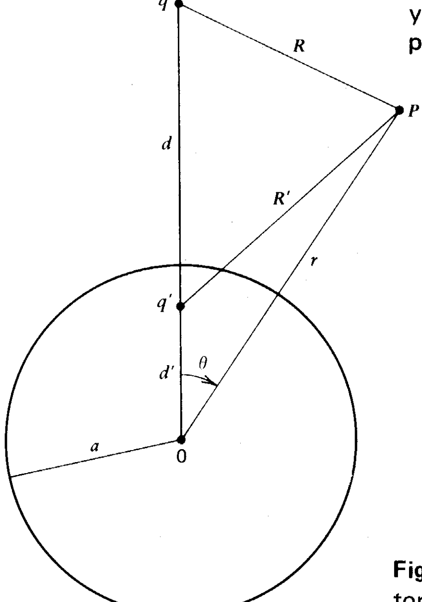


Figura 11-3 Carga puntual y esfera conductora conectada a tierra.

$$\frac{q}{d-a}+\frac{q'}{a-d'}=0 \tag{11-25}$$

$$\frac{q}{d+a}+\frac{q'}{a+d'}=0 \tag{11-26}$$

si se utiliza el hecho de que $d > a > d'$. Al resolverlas, quedan

$$q'=-\frac{a}{d}q \qquad \text{and} \qquad d'=\frac{a^2}{d} \tag{11-27}$$

En este caso, la carga imagen es también de signo opuesto a la carga inductora, pero esta vez sus magnitudes no son iguales sino que, de hecho $|q'| < |q|$. Si se sustituye este resultado en (11-23) se puede obtener el potencial que satisface las condiciones de frontera y que, por lo tanto, da el valor correcto en todos los puntos fuera de la esfera:

$$\phi=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}}-\frac{(a/d)}{\left[r^2+(a^2/d)^2-2r(a^2/d)\cos\theta\right]^{1/2}}\right\} \tag{11-28}$$

Se pueden ahora calcular las componentes del campo eléctrico a partir de $\mathbf{E}=-\nabla\phi$ y (1-101); las que no se anulan son

$$E_r=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{(r-d\cos\theta)}{R^3}-\frac{(a/d)\left[r-(a^2/d)\cos\theta\right]}{R'^3}\right\} \tag{11-29}$$

$$E_\theta=\frac{qd\,\mathrm{sen}\,\theta}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R^3}-\frac{(a/d)^3}{R'^3}\right] \tag{11-30}$$

Por ser una componente tangencial, $E_\theta(a)=0$ en la superficie de la esfera; sin embargo, $E_r(a)\neq 0$ y, ya que se trata de una componente normal a la superficie, debe existir una densidad superficial de carga dada por

$$\sigma_f(\theta)=\epsilon_0 E_n=\epsilon_0 E_r(a,\theta)=\frac{-q(d^2-a^2)}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \tag{11-31}$$

Puede demostrarse de nuevo que la carga total inducida es igual a la carga imagen. Por medio de (2-16), (1-100) y (2-22) se obtiene

$$\begin{aligned} q_{\text{ind}} &= -\frac{q(d^2-a^2)}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^2\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta d\varphi}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \\ &= -\frac{q(d^2-a^2)a}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{(a^2+d^2-2ad\mu)^{3/2}} \end{aligned} \tag{11-32}$$

La integral se puede resolver por medio de tablas y resulta ser

$$\left.\frac{1}{ad(a^2+d^2-2ad\mu)^{1/2}}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{ad}\left(\frac{1}{|d-a|}-\frac{1}{|d+a|}\right) \tag{11-33}$$

En este caso, $d > a$ y (11-33) queda $2/[d(d^2-a^2)]$, de modo que

$$q_{\text{ind}} = -\frac{a}{d}q = q' \tag{11-34}$$

como debiera ser.

La carga q será atraída hacia la esfera por una fuerza que viene a ser la fuerza de Coulomb entre q y su imagen q'. Su distancia de separación es $D = d - d' = (d^2 - a^2)/d$, de tal manera que, según (2-3),

$$\mathbf{F} = -\frac{adq^2\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0(d^2 - a^2)^2} \tag{11-35}$$

Si $d \gg a$, la variación de la fuerza será de aproximadamente la inversa del cubo de la distancia de separación.

La figura 11-4 muestra el aspecto general de las equipotenciales y de las líneas de campo para este caso.

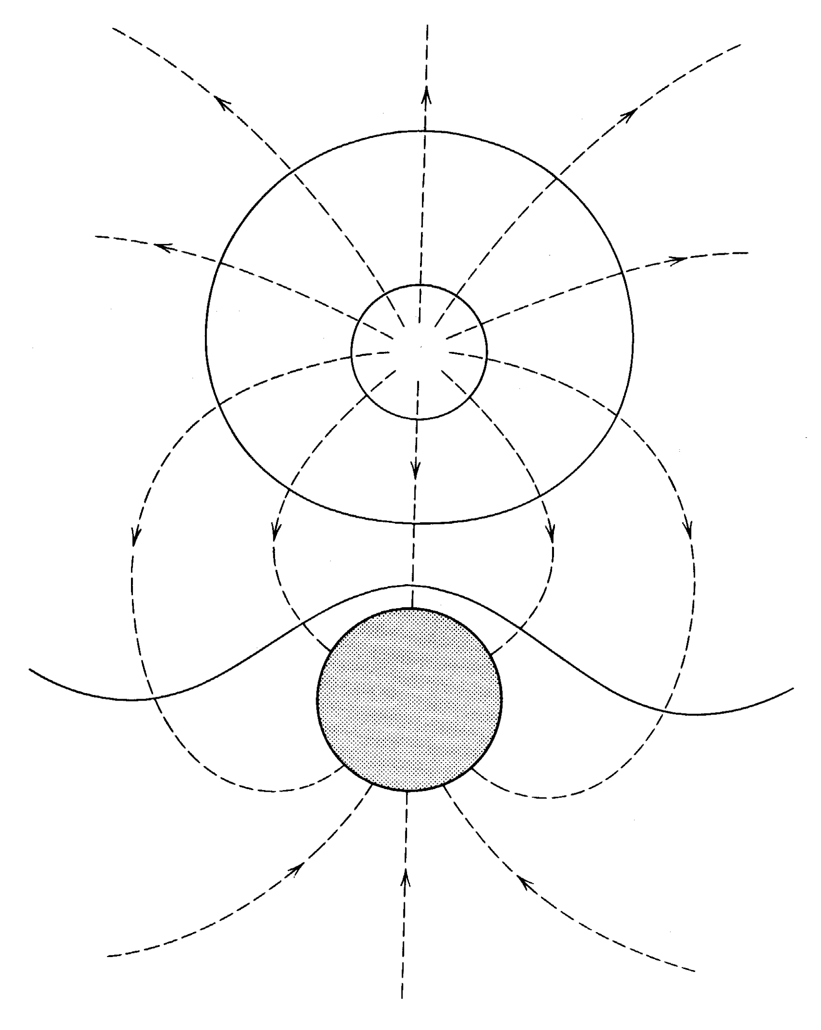


Figura 11-4. Equipotenciales y líneas de campo eléctrico para el sistema de la figura 11-3.

Ejemplo

Carga puntual y esfera conductora sin carga y aislada. Esta es una variante del ejemplo previo. Se supone que la esfera es originalmente neutra y que su potencial ya no se mantiene a un valor dado. En presencia de q la esfera debe permanecer con una carga neta total igual a cero porque ya no se encuentra conectada a algo de donde pueda obtener cargas, como en el caso de los ejemplos anteriores. Debe ser también un volumen equipotencial. Para empezar, se introduce la misma carga imagen $q' = -(a/d)q$ en la misma posición que en el último ejemplo; esto hará que la superficie de la esfera tenga un potencial constante (cero). Pero, para poder hacer que la esfera siga siento neutra, debe colocarse otra carga adicional $q'' = -q' = (a/d)q$ en algún lugar dentro de la esfera. El único lugar donde puede colocarse y mantener la superficie de la esfera equipotencial es en su centro. Así, se llega al sistema de tres cargas que se ilustra en la figura 11-5. Dado que esta distribución de carga satisface todos los requisitos, dará los valores correctos del potencial y del campo en todo punto fuera de la esfera. El cálculo de la mayoría de los conceptos de este problema se deja para los ejercicios, pero puede aquí encontrarse fácilmente el potencial final de la esfera. Si se combinan los resultados que se muestran en la figura y (6-5), se tiene que

$$\phi_{\text{esfera}} = \phi(a) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \tag{11-36}$$

lo que, curiosamente, viene a ser el potencial que produciría q si estuviera situada en el centro de la esfera y no existiera ésta.

Ejemplo

Carga puntual y plano dieléctrico semi-infinito. Esta situación viene a ser similar a la de la figura 11-1, excepto que la región sombreada de las x negativas se encuentra saturada de un dieléctrico i. h. l. en vez de conductor. Como en el ejemplo anterior, el potencial no posee un valor preasignado. En este caso, las condiciones de frontera en la superficie $x = 0$ son aquéllas que deben ser satisfechas por las componentes de $\mathbf{E}$ para $\sigma_f = 0$, dadas en (10-56):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}\cdot(\epsilon_2\mathbf{E}_2 - \epsilon_1\mathbf{E}_1) &= \epsilon_0 E_{2x} - \epsilon E_{1x} = 0 \\ E_{2y} = E_{1y} \qquad & E_{2z} = E_{1z} \end{aligned} \tag{11-37}$$

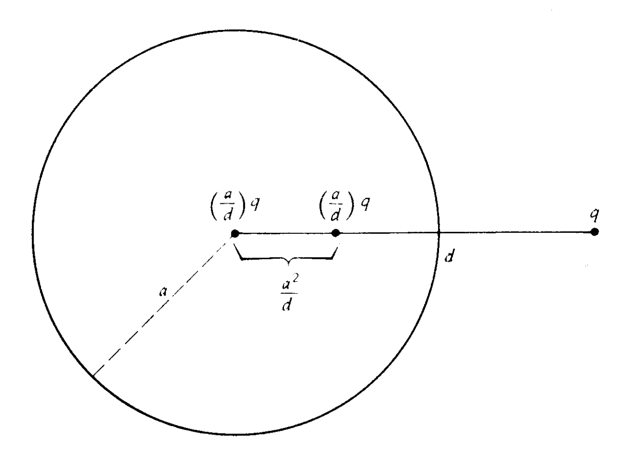


Figura 11-5 Carga puntual q y sus imágenes para una esfera conductora aislada y sin carga.

Se ha tomado la *región 1 como la del dieléctrico* ($x < 0$) y la región 2 como vacío ($x > 0$), de acuerdo con la dirección de $\hat{n}$ que se muestra.

Para el vacío, se intenta resolver el problema con el mismo conjunto de cargas de la figura 11-1, pero se toma $d = d'$. Así, tal como en (11-12), se obtiene

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}+\frac{q'}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}}\right\} \tag{11-38}$$

de la que resultan las componentes de campo

$$E_{2x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{(x-d)q}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}+\frac{(x+d)q'}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\} \tag{11-39}$$

$$E_{2y} = \frac{y}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}+\frac{q'}{\left[(x+d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}}\right\} \tag{11-40}$$

y E_{2z} se obtiene al remplazar la y del frente de (11040) por z.

No se puede utilizar este mismo conjunto de cargas para encontrar el potencial del dieléctrico porque q' se encuentra en él y las cargas imagen deben estar fuera de la región en cuestión. Con las mejores esperanzas, se intenta resolver el problema por medio de *una sola* carga imagen q'' situada en la posición de la propia q, como se muestra en la figura 11-6. Se producirá un potencial en el dieléctrico que estará dado por

$$\phi_1 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}} \tag{11-41}$$

con las componentes de campo correspondientes

$$E_{1x} = \frac{(x-d)q''}{4\pi\epsilon_0\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{11-42}$$

$$E_{1y} = \frac{yq''}{4\pi\epsilon_0\left[(x-d)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{11-43}$$

y, de nuevo, E_{1z} se obtiene al remplazar y por z en el numerador de (11-43). Ahora se puede ya saber si se satisfacen las condiciones de frontera para las componentes del campo.

La primera ecuación de (11-37) es $\epsilon_0 E_{2x}(0,y,z) = \epsilon E_{1z}(0, y, z)$ y conduce a

$$\epsilon_0(-q+q') = \epsilon(-q'') \tag{11-44}$$

mientras que la segunda ecuación de (11-37) es $E_{2y}(0,y,z) = E_{1y}(0,y,z)$, de la que se obtiene

$$q + q' = q'' \tag{11-45}$$

como es el caso de $E_{2z}(0, y, z) = E_{1z}(0, y, z)$. Al resolver simultáneamente (11-44) y (11-45) debe recordarse que $\epsilon/\epsilon_0 = \kappa_e$, con lo que se obtiene que

$$q' = -\left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1}\right)q \qquad q'' = \frac{2q}{\kappa_e + 1} \tag{11-46}$$

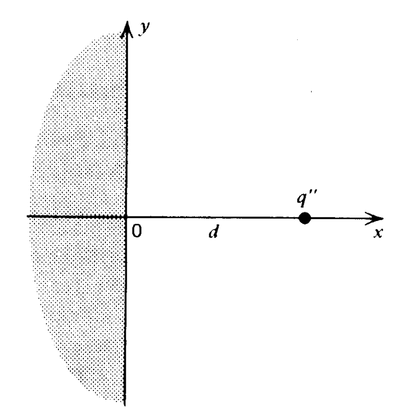


Figura 11-16. Carga imagen utilizada para calcular el potencial en el dieléctrico.

lo que significa que ha sido posible resolver el problema completamente.

Así, se tienen los dos conjuntos de cargas imagen que se muestran en la figura 11-7. El recuadro sobre el número de la región indica que las cargas que se muestran se usarán para calcular ϕ en esa región. La solución completa para este problema se puede así obtener al sustituir los valores de q' y q'' dados por (11-46) en (11-38) a (11-43).

Por medio de (11-39) y (11-40) se puede obtener la fuerza sobre la carga inductora q en $x = d$, utilizando *únicamente* la contribución de q', que resulta ser

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(d,0,0) = \frac{qq'\hat{\mathbf{x}}}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} = -\left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1}\right)\frac{q^2\hat{\mathbf{x}}}{16\pi\epsilon_0 d^2} \tag{11-47}$$

y, como antes, viene a ser la fuerza de Coulomb que da la atracción entre q y q', es decir, la carga imagen inducida en el dieléctrico. Desde el punto de vista físico, no se trata sino de la fuerza entre q y las cargas ligadas superficiales del dieléctrico. Se puede calcular su densidad por medio de (10-8), (10-50), (10-52), (11-42) y (11-46):

$$\sigma_b(y,z) = P_{1n} = (\kappa_e - 1)\epsilon_0 E_{1x}(0,y,z) = -\left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 1}\right)\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{11-48}$$

que es negativa como se esperaba. Al comparar (11-17) y (11-18) con (11-48) se puede observar que la carga ligada inducida total en la superficie del dieléctrico es otra vez igual a la carga imagen q'.

Las curvas equipotenciales y las líneas de **E** para este sistema se muestran en la figura 11-8. Como era esperarse, se puede ver que las líneas de **E** sufren una refracción al cruzar la superficie limitante del dieléctrico.

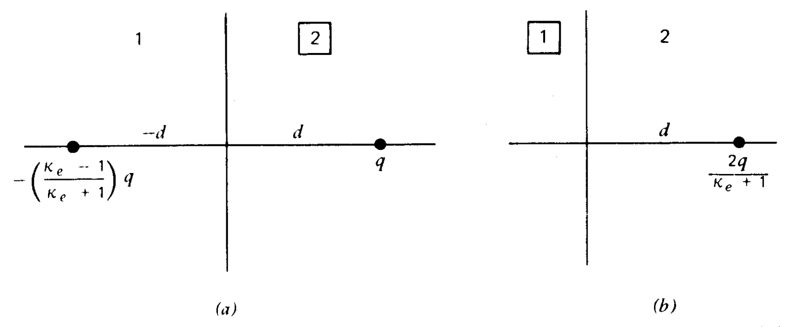


Figura 11-7 Cargas para encontrar el potencial (*a*) en el exterior del dieléctrico y (*b*) en el dieléctrico

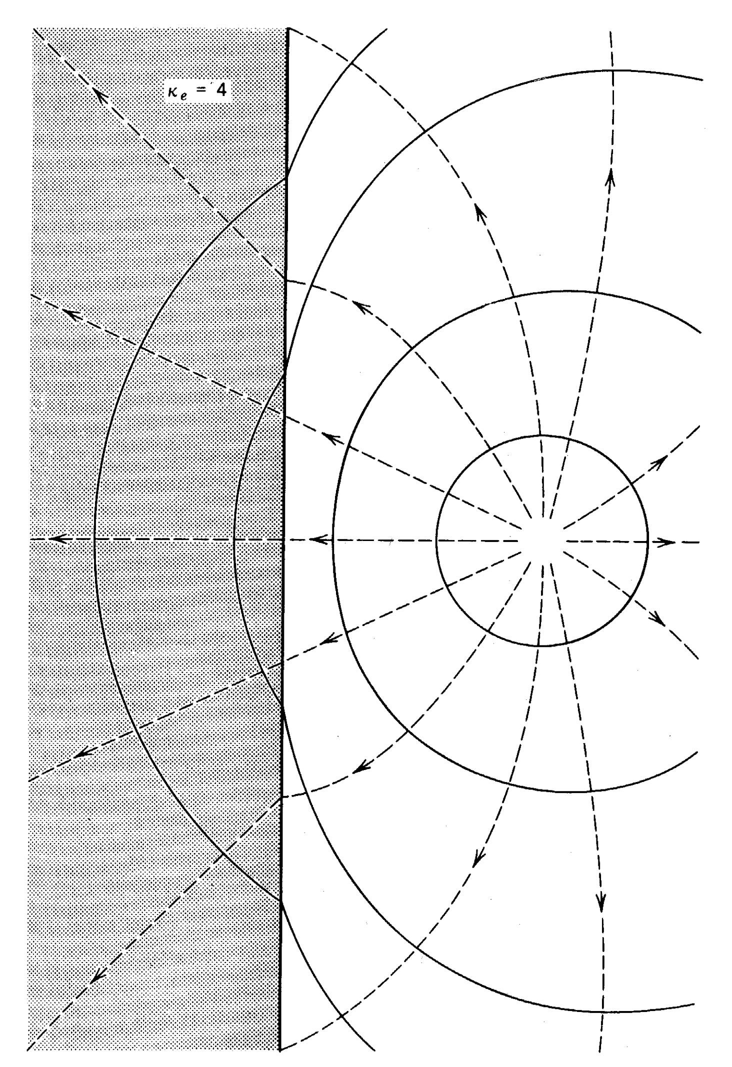


Figura 11-8. Equipotenciales y líneas de **E** para una carga puntual y un dieléctrico semiinfinito.

11-3 Utilización de resultados anteriores

Algunas veces resulta posible, con la debida interpretación, adaptar y utilizar la solución de un problema previo para resolver un nuevo problema aparentemente muy distinto. Esto quedará ilustrado por medio de dos ejemplos, ambos relacionados con un ejemplo del capítulo 5.

Ejemplo

Línea infinita de carga uniforme y plano conductor semi-infinito conectado a tierra. Considérese una carga lineal infinitamente larga con carga por unidad de longitud λ constante, y que se encuentra a una distancia a y paralela a la superficie de un conductor conectado a tierra que ocupa la mitad del espacio total. Si se toma la línea paralela al eje z, la superficie del conductor como el plano yz y el eje x que pasa a través de la carga lineal, se tiene

la situación que se muestra en la figura 11-9 para el plano xy. La condición de frontera consiste en que el potencial sea constante e igual a cero sobre la superficie conductora, es decir, que $\phi\ (o,y,z) = 0$. Debido a la similitud entre las figuras 11-9 y 11-1, así como a lo idéntico de esta condición de frontera con la (11-11), se puede adivinar que la carga imagen apropiada para este caso será otra carga lineal infinita de densidad $-\lambda$ y situada en $x = -a$. Esta es justamente la distribución de cargas que se ilustra en la figura 5-7, donde se sabe que el potencial en cualquier punto está dado por (5-34), y cuyas equipotenciales y líneas de campo se muestran en la figura 5-8. (Recuérdese que las equipotenciales son, en realidad, cilindros cuyos ejes son paralelos al eje z y que, de hecho, estos ejes se encuentran sobre el plano xz.) Como se hizo notar en lo que siguió a (5-38), el plano yz (x=0) es la superficie equipotencial para $\phi = 0$, que no es sino la condición de frontera (11-11) que debe satisfacerse para este problema. Por lo tanto, la solución se encuentra dada ya en los resultados obtenidos anteriormente. Sin embargo, solamente puede utilizarse (5-34) en la región vacía que aparece sin sombrear en la figura 11-9, es decir, $-(\pi/2) \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Así, las equipotenciales y las líneas de fuerza de este problema están dadas por las curvas de la mitad derecha de la figura 5-8. En otras palabras, ya se cuenta con la solución completa de este problema.

Es posible profundizar aún más sobre el sistema completo de la figura 5-7. Supóngase que se remplazara uno de los cilindros equipotenciales con un conductor sólido que ocupara el volumen limitado por el cilindro. La superficie del conductor sería una equipotencial, según se requiere, y el potencial sería el correspondiente a la superficie que se remplazó. El campo eléctrico será normal al conductor, como es necesario, ya que las líneas de **E** ya son normales al cilindro equipotencial. Existirá una carga superficial sobre el cilindro, dada por (6-4), pero, como se puede observar, la carga *total* por unidad de longitud sobre el cilindro seguirá siendo λ (suponiendo que se trata de una superficie en la mitad derecha de la figura 5-8). Considérese una superficie Gaussiana de integración que se encuentra justo afuera del conductor. El valor de **E** se seguirá obteniendo a partir de (5-35) y (5-36), de manera que la integral de superficie de la ley de Gauss (4-1) será la misma que si la carga lineal se encontrara ahí. Pero, ya que la ley de Gauss iguala la integral de superficie a la carga total encerrada dividida por ϵ_0, sin importar su distribución, la carga total por unidad de longitud seguirá siendo λ, que viene a ser la carga total en la superficie del conductor. En otras palabras, *nada ha cambiado afuera* del conductor, por lo que todavía puede usarse (5-34) en todos los demás lugares. [Desde luego, las cosas sí han cambiado adentro: el campo eléctrico es ahora igual a cero y ϕ es constante, según (6-1).] Se pueden hacer comentarios similares para la mitad izquierda de la figura 5-8. Ahora puede ya considerarse el siguiente ejemplo.

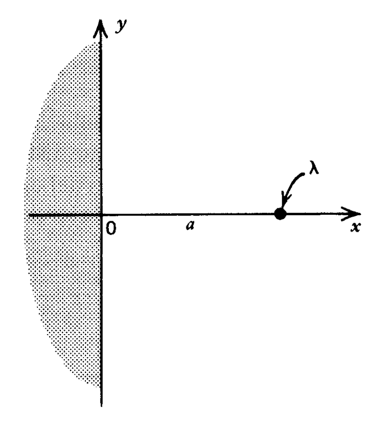


Figura 11-9. Línea infinita de carga uniforme perpendicular a la página y paralela a un plano conductor seminfinito conectado a tierra

Ejemplo

Capacitancia de dos conductores cilíndricos paralelos. Considérense dos cilindros conductores infinitamente largos y cuyos ejes son paralelos entre sí. Por simplicidad, supóngase que tiene el mismo radio A; sus ejes se encuentran separados una distancia D, como se muestra en la figura 11-10. Si se identifican estos cilindros con dos equipotenciales apropiadas en la figura 5-8, poseerán cargas por unidad de longitud iguales a $+\lambda$ y $-\lambda$. El problema consiste en relacionar estas dimensiones con resultados previos a fin de obtener la diferencia de potencial. En (5-38) ya se encontró el radio de uno de los círculos de la figura 5-8 y era igual a $a/\text{senh}\eta$, y la localización de su centro con respecto al origen era $a\coth\eta$, donde $\eta = 2\pi\epsilon_0\phi/2$. Por lo tanto, si ϕ es el potencial del cilindro de la derecha, de carga λ, se tiene que

$$A = \frac{a}{\text{senh}\,\eta} \tag{11-49}$$

$$\frac{D}{2} = a\coth\eta = A\cosh\eta \tag{11-50}$$

Al despejar η de la última ecuación se encuentra que el potencial del cilindro es

$$\phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2A}\right) \tag{11-51}$$

Dado que el potencial del otro cilindro es $-\phi$, la diferencia de potencia entre ambos será igual a

$$\Delta\phi = 2\phi = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0}\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2A}\right) \tag{11-52}$$

Puesto que la carga en una longitud L de este sistema será igual a λL, de (6-28) puede observarse que la capacitancia de una longitud L será

$$C = \frac{\lambda L}{\Delta\phi} = \frac{\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1}(D/2A)} \tag{11-53}$$

Si $A \ll 0$, como sería el caso para dos alambres delgados, se puede encontrar, a partir del desarrollo en serie $\cosh^{-1}u \sim \ln 2u - (1/4u^2) - \ldots$, que (11-53) puede aproximarse por

$$C \simeq \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln(D/A) - (A/D)^2} \simeq \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln(D/A)} \tag{11-54}$$

que es una expresión que se encuentra con frecuencia. [El valor dado por el término central de (11-54) concuerda también con el resultado del ejercicio 6-15 cuando se le aplica a este caso.]

Se consideran a continuación algunos métodos más sistemáticos para resolver la ecuación de Laplace.

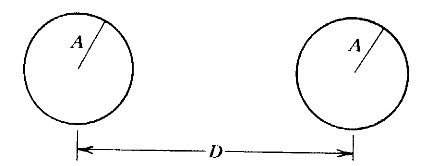


Figura 11-10 Vista de sección de dos conductores cilíndricos paralelos.

11-4 Separación de variables en coordenadas rectangulares

Cuando se expresa (11-3) en coordenadas rectangulares por medio de (1-46), que como

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{11-55}$$

Se intentará resolverla suponiendo que la solución tiene la forma de un producto de cantidades que son, cada una de ellas, función de una sola variable:

$$\phi(x,y,z)=X(x)\,Y(y)Z(z) \tag{11-56}$$

Al sustituir en (11-55) y dividir entre XYZ, se obtiene

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=0 \tag{11-57}$$

que puede expresarse también como

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \tag{11-58}$$

El miembro izquierdo de (11-58) es función únicamente de x y x, mientras que el miembro derecho es función únicamente de z. Pero, la propia (11-58) significa que ambos miembros deben ser siempre iguales para todos los valores de x, y y z –cantidades que pueden variar de manera independiente. Esto sólo puede ocurrir si ambos miembros son iguales a una misma *constante*, que puede escribirse como γ^2. Así, se tiene que

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\gamma^2 \tag{11-59}$$

Al repartir el mismo procedimiento se obtienen

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\alpha^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\beta^2 \tag{11-60}$$

donde α^2 y β^2 son también constantes. Estas constantes no son independientes entre sí puesto que si se sustituye (11-59) y (11-60) en (11-57) resulta

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0 \tag{11-61}$$

Ya se ha visto que $d^2X/dx^2=\alpha^2 X$, lo que puede integrarse directamente para obtener

$$X(x)=a_1e^{\alpha x}+a_2e^{-\alpha x} \tag{11-62}$$

donde a_1 y a_2 son constantes de integración. De manera similar,

$$Y(y)=b_1e^{\beta y}+b_2e^{-\beta y} \tag{11-63}$$

$$Z(z)=c_1e^{\gamma z}+c_2e^{-\gamma z} \tag{11-64}$$

El producto de estas tres funciones deberá ser una solución de (21-55), siempre y cuando se satisfaga (11-61). Debido a esta condición, no es posible que α^2, β^2 y γ^2 sean todas positivas o todas negativas; esto, por otro lado, significa que las constantes α, β y γ no pueden ser todas reales o todas imaginarias, sino que si una es real, por lo menos una de las otras deberá ser imaginaria. En consecuencia, por lo menos una de las funciones X, Y y Z debe variar exponencialmente con su argumento, mientras que por lo menos una de ellas deberá presentar una variación sinusoidal.

Es evidente que existen muchas combinaciones posibles de α, β y γ que satisfacen (11-61), y que cada combinación de ellas vendrá a ser una solución, de modo que existen muchas posibilidades. Al mismo tiempo, las constantes de integración $a_1, a_2, b_1,...$ pueden también depender de los valores particulares de α, β y γ de que se trate, de manera que habría que expresarlas en la forma $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, $b_1(\beta)$,.... Dado que la ecuación de Laplace es una ecuación lineal, una suma de las soluciones de la forma (11-56) deberá también ser una solución; si se suman todas las posibilidades, se observa que se puede expresar la solución más general a la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares en la forma

$$\phi(x,y,z)=\sum\left[a_1(\alpha)e^{\alpha x}+a_2(\alpha)e^{-\alpha x}\right]\left[b_1(\beta)e^{\beta y}+b_2(\beta)e^{-\beta y}\right]$$
$$\left[c_1(\gamma)e^{\gamma z}+c_2(\gamma)e^{-\gamma z}\right] \tag{11-65}$$

donde se toma la suma sobre todos los valores de α, β y γ que satisfacen (11-61). Ya que no hay duda de que el número de combinación de α, β y γ que cumplen con este requisito es infinito, puede verse que la solución general contiene un número infinito de constantes de integración. Lo básico en la aplicación de (11-65) es que estas constantes deben terminarse de modo que ϕ satisfaga las condiciones de frontera dadas. Una vez que esto se haya logrado, el problema se habrá resuelto completamente, y se sabe ya por el teorema de la sección 11-1 que la solución así obtenida para ϕ será única. Para aplicar este método, se comienza con (11-65) y se satisfacen las condiciones de frontera paso a paso de una manera sistemática; no se requiere de ninguna adivinanza o intuición. Como de costumbre, la mejor manera de ilustrar todo esto es por medio de un ejemplo específico.

Ejemplo

Considérese una región limitada por (1) un plano conductor semi-infinito en $x = 0$ que ocupa la mitad del plano yz correspondiente a y positiva (así, $0 \leqslant y \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant z \leqslant \infty$); (2) un plano similar en $x = L$; y (3) la franja del plano xz entre ellos ($0 \leqslant x \leqslant L$). La figura 11-11*a* muestra la región así definida y la figura 11-11*b* muestra su proyección, sombreada, sobre el plano xy.

Tómense las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{en } x=0 \qquad \phi(0,y,z)=0 \tag{11-66}$$

$$\text{en } x=L \qquad \phi(L,y,z)=0 \tag{11-67}$$

$$\text{en } y=\infty \qquad \phi(x,\infty,z)=0 \tag{11-68}$$

$$\text{en } y=0 \qquad \phi(x,0,z)=f(x) \tag{11-69}$$

donde $f(x)$ es una función dada, es decir, que el potencial de la franja 3 varía *únicamente* con x de alguna manera predeterminada. Este conjunto de condiciones de frontera pudiera darse, por ejemplo, en el caso de que los planos fueran conductores conectados a tierra y que el potencial de la franja 3 se lograra por medio de una combinación apropiada

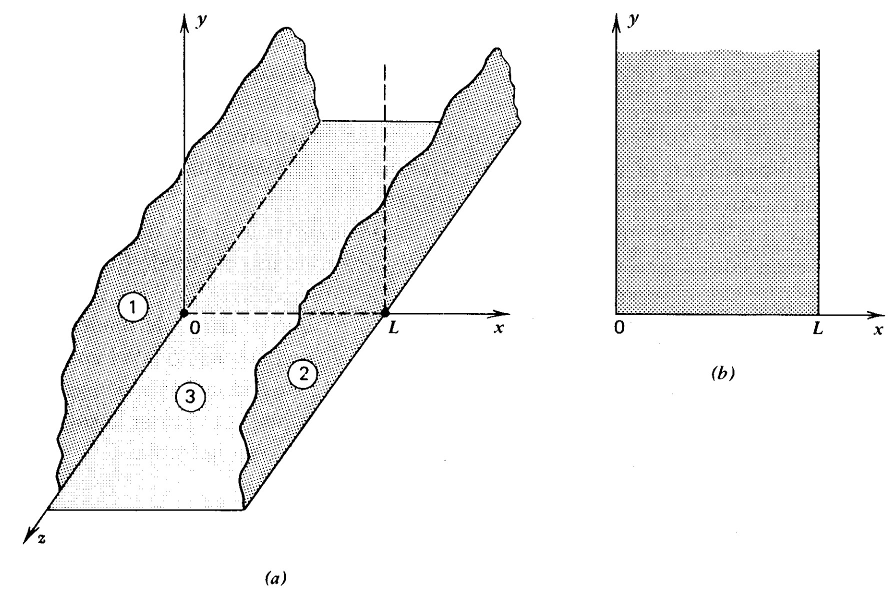


Figura 11-11 (*a*) Dos planos conductores semiinfinitos paralelos al plano *yz*.
(*b*) Su proyección sobre el plano *xy*.

de baterías; (11-68) viene a ser el requisito normal de que el potencial se anule a una distancia infinita de las cargas fuente.

Dado que la región de interés se extiende sobre todo el rango de z y no existe dependencia alguna con respecto a z en las condiciones de frontera, la situación viene a ser efectivamente independiente de z, por lo que en realidad se trata de un problema bidimensional, de modo que $\phi = \phi\,(x,y)$. Por lo tanto, de (11-65) se observa que $\gamma = 0$ es el único valor permisible, con lo que (11-65) se reduce a

$$\phi = \sum_{\alpha^2+\beta^2=0} [A_1(\alpha)e^{\alpha x} + A_2(\alpha)e^{-\alpha x}][b_1(\beta)e^{\beta y} + b_2(\beta)e^{-\beta y}] \qquad (11\text{-}70)$$

donde se toma $A_1(\alpha) = a_1(\alpha)\,[c_1(0) + c_2(0)]$, y así sucesivamente. Dado que $\alpha^2 = -\beta^2$, de tal forma que $\alpha = i\beta$, donde $i = \sqrt{-1}$, por lo que solamente hay una cantidad independiente sobre la que se puede llevar a cabo la suma, pudiéndose escribir por tanto,

$$\phi = \sum_{\beta} [A_1(\beta)e^{i\beta x} + A_2(\beta)e^{-i\beta x}][b_1(\beta)e^{\beta y} + b_2(\beta)e^{-\beta y}] \qquad (11\text{-}71)$$

Esta reducción de (11-65) a (11-71) se desprende exclusivamente del hecho de que el problema es en realidad independiente de z –lo que viene a ser una “condición de frontera” de una manera generalizada. Examínense ahora las condiciones de frontera que dan valores reales de ϕ.

Por comparación de (11-68) con (11-71) se concluye que si β es positiva, el término que varía como $e^{\beta y}$ no puede aparecer porque no se anula en infinito, por lo que $b_1(\beta)$ debe necesariamente ser igual a cero. Por otro lado, si β es negativa, $b_2(\beta)$ debe ser también igual a cero. En ambos casos el término restante variará como $e^{-|\beta|y}$ de manera que realmente sólo queda una forma posible. Para ser específicos, se toma $\beta > 0$; así, $b_1(\beta) = 0$, con lo que (11-71) debe quedar

$$\phi = \sum_{\beta>0} b_2(\beta)\left[A_1(\beta)e^{i\beta x} + A_2(\beta)e^{-i\beta x}\right]e^{-\beta y} \tag{11-72}$$

[β no puede ser igual a cero, ya que en ese caso no podría resolverse (11-68).] Si se define $b_2(\beta)\,A_1(\beta) = A_\beta$, $b_2(\beta)A_2(\beta) = B_\beta$, (11-72) puede entonces escribirse de una manera más simple como

$$\phi = \sum_{\beta>0} \left(A_\beta e^{i\beta x} + B_\beta e^{-i\beta x}\right)e^{-\beta y} \tag{11-73}$$

Al utilizar aquí (11-66) se tiene

$$\phi(0,y) = 0 = \sum_{\beta>0} (A_\beta + B_\beta)e^{-\beta y} \tag{11-74}$$

Dado que $e^{-\beta y}$ es siempre positivo, la única manera en que (11-74) puede ser cero para y arbitraria es si cada uno de los términos de la suma es igual a cero; así, $A_\beta + B_\beta = 0$, de modo que $B_\beta = -A_\beta$. El término entre paréntesis en (11-73) puede ahora escribirse como $A_\beta(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2iA_\beta$ sen $\beta\, x$, por lo que ϕ es ahora

$$\phi = \sum_{\beta>0} 2iA_\beta \operatorname{sen}\beta x e^{-\beta y} \tag{11-75}$$

(Ya que ϕ debe ser una cantidad real, se observa que A_β debe ser una constante imaginaria.)

Si se aplica (11-67) a (11-75), se obtiene

$$\phi(L,y) = 0 = \sum_{\beta>0} 2iA_\beta \operatorname{sen}\beta L e^{-\beta y} \tag{11-76}$$

lo que demuestra que sen $\beta L = 0$ y, por lo tanto, $\beta L = n\,\pi$, o sea,

$$\beta = \frac{n\pi}{L} \tag{11-77}$$

donde n es un entero *positivo* (porque β es positivo). Así, la suma sobre β es en realidad una suma sobre n, y resulta más conveniente escribirlo así; si se toma $2iA_\beta = A_n$ y se utiliza (11-77), puede expresarse (11-76) como

$$\phi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-(n\pi y)/L} \tag{11-78}$$

y, así, lo único que falta para calcular son los coeficientes constantes A_n. Para ello, todavía queda una condición de frontera.

Si se sustituye $y = 0$ en (11-78) y se iguala el resultado con $f(x)$, según (11-69) se obtiene

$$\phi(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{11-79}$$

lo que demuestra que el resto del problema consiste en desarrollar $f(x)$ por medio de una serie de Fourier (utilizando, exclusivamente términos con senos). Esto se logra al utilizar el primero de los siguientes resultados que pueden verificarse fácilmente por integración directa:

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}L\delta_{mn} \tag{11-80}$$

es decir, que estas integrales son iguales a cero cuando $m \neq n$, y cada una de ellas es igual a ½ L para $m = n$, como se puede deducir de (8-27). Al resultado (11-80) se le conoce por lo general como la propiedad de ortogonalidad y normalización de las funciones trigonométricas; cuando la integral es cero, se dice que las funciones son "ortogonales." Al combinar este resultado con (11-79) es posible "seleccionar" cualquiera de los coeficientes que se desee, como sigue: se multiplican ambos miembros de (11-79) por sen $(m\pi x/L)$ y se integra sobre el rango L de x para obtener

$$\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \sum_n A_n \int_0^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$
$$= \sum_n A_n \cdot \frac{1}{2} L\delta_{mn} = \frac{1}{2} LA_m$$

ya que cada uno de los términos es igual a cero excepto cuando $m = n$. Al volver a cambiar el subíndice a n y despejar A_n, se obtiene

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \tag{11-81}$$

Una vez que se haya dado $f(x)$, pueden determinarse los coeficientes A_n al llevar a cabo la integración de (11-81) y después se sustituyen estas A_n en (11-78). El resultado será el único valor correcto del potencial, a partir del cual se podrá encontrar ϕ y luego **E** para cualquier punto, evaluando la suma.

Ejemplo

Caso especial. Para contar con un ejemplo definido, supóngase que $f(x) = \phi_0$ = const. Esto equivale a mantener toda la franja del plano xz a potencial constante, como sería el caso de un conductor conectado a una sola batería. En ese caso, deberán aislarse las paredes conductoras por medio de una tira delgada de dieléctrico en cada uno de sus bordes.) De cualquier manera, si se sustituye esto en (11-81) se obtiene

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi_0\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \phi_0 \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \tag{11-82}$$

Pero $(1 - \cos n\pi) = 2$ cuando n es un entero impar y 0 si n es par, de manera que $A_n = 0$ si n es par y $A_n = \phi_0(4/n\pi)$ si n es impar. Así, la solución general (11-78) aplicada a este caso especial queda

$$\phi(x,y) = \phi_0 \frac{4}{\pi} \sum_{\text{impar}} \frac{1}{n}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-(n\pi y)/L} \tag{11-83}$$

Esta suma ya no puede simplificarse fácilmente, y para encontrar ϕ en un punto definido por lo general será necesario evaluar la suma numéricamente. Por lo común no resulta un gran problema, ya que no se requiere de muchos términos de la suma para lograr un grado de exactitud razonable, ya que los términos sucesivos se vuelven cada vez menos importantes debido tanto al factor $1/n$ como a la presencia de n en el término exponencial.

Se puede ahora utilizar (11-83) para calcular el campo eléctrico en cualquier punto, partiendo de $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, con lo que se obtiene

$$E_x = -\phi_0 \frac{4}{L} \sum_{\text{impar}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-(n\pi y)/L} \tag{11-84}$$

$$E_y = \phi_0 \frac{4}{L} \sum_{\text{impar}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-(n\pi y)/L} \tag{11-85}$$

y, desde luego, $E_z = -\partial\phi/\partial_z = 0$. Nótese que estas expresiones tienen las unidades correcta de volts/metro. Se observa también que $E_y = 0$ en $x = 0$ y L, como es lógico, dado que se trata de una componente tangencial en estas superficies conductoras. E_x no necesariamente desaparece ahí porque es una componente normal u, de hecho, es posible encontrar la densidad superficial de carga como una función de la posición en estas superficies conductoras, de acuerdo con (6-4).

11-5 Separación de variables en coordenadas esféricas

Si se utiliza (1-105), se puede expresar (11-3) como

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{11-86}$$

La solución general para esta ecuación puede encontrarse por la misma aplicación sistemática de la separación de variables que ya se ilustró para las coordenadas rectangulares. Aquí los resultados son mucho más complicados; por lo tanto, será conveniente restringir el estudio a aquéllos casos para los que ϕ es independiente del ángulo ϕ, es decir, a sistemas con simetría axial. Aun así existe una gran cantidad de situaciones que pertenecen a esta categoría. Si $\phi = \phi\ (r, \theta)$, se puede simplificar un poco (11-86) para que quede como

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{11-87}$$

Por analogía con (11-56), se ha de buscar una solución de la forma

$$\phi(r,\theta) = R(r)T(\theta) \tag{11-88}$$

Al sustituirla en (11-87), dividir el resultado entre el producto RT e igualar la función de r resultante a la de θ, se obtiene

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{T\,\text{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{dT}{d\theta}\right) = \text{const.} = K \tag{11-89}$$

dado que cada uno de los términos es función de una variable independiente diferente, de modo que deben ser separadamente iguales a la misma constante K. Si se hace que cada una de ellas sea igual a K, se obtienen dos ecuaciones, una para R y una para T. Al hacerlo con el primer término y realizar la diferenciación, se encuentra que R debe satisfacer la ecuación

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - KR = 0 \tag{11-90}$$

Para resolverla se *prueba* con una solución de la forma $R = \alpha\, r^1$, donde α y l son constantes; al sustituir en (11-90), el resultado es que $[l(l+1) - K]R = 0$. Dado que no se desea

que $R = 0$, ya que esto haría que $\phi = 0$ en todo el espacio, se debe tener que

$$K = l(l+1) \tag{11-91}$$

Al igualar esto con el segundo término de (11-89) se encuentra que la ecuación para T es

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dT_l}{d\theta}\right) + l(l+1)T_l = 0 \tag{11-92}$$

a la que se le ha añadido el subíndice l para indicar la asociación que existe entre la solución y la constante. Peo dado que T_1 es parte de la cantidad física ϕ, debe ser una función razonable. Esto quiere decir que debe ser finita, univaluada y continua sobre el rango completo de θ. Sería demasiado en este punto investigar lo anterior, pero es posible demostrar que ello es posible únicamente si l es un entero positivo, incluyendo el cero; así,

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{11-93}$$

De hecho, pueden identificarse los T_l con los polinomios de Legendre, que ya se tocaron en el capítulo 8. Tomando como referencia la figura 8-1, puede observarse que θ_i y r_i son justamente las coordenadas esféricas correspondientes a la localización de q_i con respecto a la dirección $\hat{\mathbf{r}}$ *fija* que se muestra; R_i es la correspondiente distancia desde el punto fuente al punto de campo, y la r de la figura es una *constante* definida. De acuerdo con esto, se puede expresar $1/r^{l+1}$ en (8-12) como una constante C_l y *entonces* omitir el índice i de θ_i y r_i para obtener una expresión con la misma notación que se está usando aquí, es decir,

$$\frac{1}{R_i} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta) \tag{11-94}$$

De acuerdo con (1-146), ya se sabe que ésta es *una* solución de la ecuación de Laplace; por lo tanto $\phi = 1/R_i$ *debe* ser una solución de (11-87). Si en ella se sustituye ahora (11-94), se obtiene

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l \left[l(l+1)P_l + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{dP_l}{d\theta}\right)\right] = 0 \tag{11-95}$$

Por lo general, esta suma sólo puede ser igual a cero si cada uno de los términos es igual a cero puesto que r es arbitraria, por lo que el término entre corchetes debe ser igual a cero para cada l. Al comparar esto con (11-92), se puede observar que T_l y P_l satisfacen la misma ecuación diferencial, por lo que T_l puede tomarse, a lo mucho, como una constante multiplicada por P_l. Se puede absorber cualquier constante tal en el factor $R(r)$ de (11-88), por lo que simplemente se pone $T_l(\theta) = P_l(\cos\theta)$. Ahora puede escribirse (11-88) como $R_l(r)P_l(\cos\theta)$, y dado que habrá una solución de esta forma para la ecuación diferencial lineal (11-87) con cada l posible, se puede expresar la solución general de (11-87) en la forma

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r)P_l(\cos\theta) \tag{11-96}$$

Queda todavía por encontrar la forma general de R_l.

La ecuación que R_l debe satisfacer, de acuerdo con (11-90) y (11-91), es

$$r^2\frac{d^2R_l}{dr^2}+2r\frac{dR_l}{dr}-l(l+1)R_l=0 \tag{11-97}$$

donde l satisface (11-93). Se intenta resolver esta ecuación por medio de una forma $R_l = \alpha_l r^n$ donde α_l es una constante y n es un entero; al sustituirla en (11-97) se encuentra que debe satisfacerse $n(n-1) - l(l+1) = 0$. Esta ecuación tiene *dos* soluciones: $n = l$ y $-(l+1)$, de modo que la solución general de (11-97) debe tener la forma

$$R_l(r)=A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}} \tag{11-98}$$

donde A_l y B_l son constantes de integración. Al sustituir este resultado en (11-96), se obtiene por fin la forma general de la solución a la ecuación de Laplace para una situación axialmente simétrica:

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \tag{11-99}$$

Como se vio en (8-10), los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(\cos\theta)=1 \qquad P_1(\cos\theta)=\cos\theta \qquad P_2(\cos\theta)=\tfrac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) \tag{11-100}$$

y los de orden más alto se pueden encontrar por medio de la relación recursiva (8-11):

$$(l+1)P_{l+1}(\cos\theta)=(2l+1)\cos\theta P_l(\cos\theta)-lP_{l-1}(\cos\theta) \tag{11-101}$$

En la sección previa se encontró que las propiedades ortogonales de las funciones trigonométicas, según se encuentran expresadas en (11-80), resultaron de gran ayuda para encontrar los coeficientes del desarrollo en coordenadas rectangulares. Los polinomios de Legendre tienen una propiedad similar y resultan igualmente útiles. Puede demostrarse que

$$\int_0^{\pi}P_l(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta=\int_{-1}^{1}P_l(\mu)P_m(\mu)\,d\mu=\frac{2}{2l+1}\delta_{lm} \tag{11-102}$$

donde se ha utilizado (1-22). Como una aplicación de esta propiedad, se puede derivar un resultado que será de gran utilidad a continuación. Considérese la suma

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(\cos\theta)=0 \tag{11-103}$$

donde las C_l son constantes. Dado que la suma debe ser igual a cero para cualquier valor arbitrario del ángulo θ, resulta plausible que esto sea cierto únicamente si cada uno de los términos en la suma es también igual a cero, es decir, si todas las C_l son iguales a cero. Resulta fácil demostrar que lo anterior es cierto. En (11-103), se hace que $\cos\theta = \mu$, se multiplica todo por $P_m(\mu)d\mu$, se integra sobre μ desde -1 a $+1$ y se utiliza (11-102); así se obtiene

$$\sum_{l=0}^{\infty}C_l\int_{-1}^{1}P_l(\mu)P_m(\mu)\,d\mu=\sum_l C_l\left(\frac{2}{2l+1}\right)\delta_{lm}=\frac{2C_m}{2m+1}=0$$

ya que cada uno de los términos es igual a cero excepto cuando $l = m$. Por lo tanto, $C_m = 0$ para todas las m, como se hubiera sospechado. Al volver a cambiar el índice m por l se demuestra que

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(\cos\theta) = 0, \qquad \text{hasta} \quad C_l = 0 \tag{11-104}$$

Considérese ahora algunos ejemplos específicos.

Ejemplo

Esfera conductora conectada a tierra en un campo inicialmente uniforme. Supóngase que para empezar se cuenta con un campo $\mathbf{E}_0$ completamente uniforme y que entonces se introduce en esta región una esfera conductora de radio a que se mantiene a potencial cero. El campo $\mathbf{E}_0$ puede estar producido, por ejemplo, por un capacitor de placas paralelas cuya distancia entre placas es muy grande en comparación con el tamaño de la esfera. Se toma el eje z en la dirección de $\mathbf{E}_0$, de modo que $\mathbf{E}_0 = E_0\,\hat{\mathbf{z}}$, y se coloca el origen en cl centro de la esfera, tal como se muestra en la figura 11-12. Aun antes de haber encontrado la solución a este problema, se puede ya anticipar que las líneas de $\mathbf{E}$, que será el campo final, deberán tener la forma general que se muestra en la figura, ya que deben llegar perpendicularmente a la superficie conductora. Es claro que esta situación posee simetría axial, lo cual hace que ϕ sea función sólo de r y θ, de modo que (11-99) resulta apropiada. Se sabe ya que $\phi = 0$ para $r < a$ debido a (6-1); así, sólo hace falta abordar el problema para $r \geqslant a$. Para hacerlo, es necesario determinar las condiciones de frontera.

En la superficie conductora de la esfera ϕ debe ser igual a cero, de tal forma que una de las condiciones es precisamente que

$$\phi(a,\theta) = 0 \tag{11-105}$$

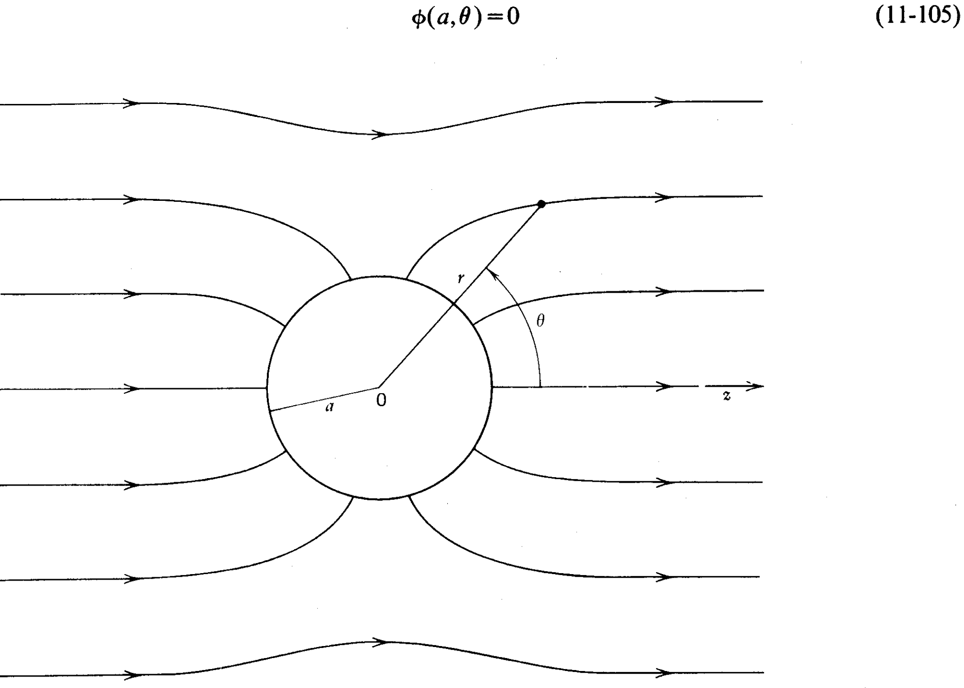


Figura 11-12 Líneas de E para una esfera conductora conectada a tierra en un campo inicialmente uniforme.

En el otro extremo, en un punto muy alejado de la esfera, es de esperarse que el campo uniforme original no se haya afectado por la presencia de la esfera, es decir, que a medida que $r \to \infty$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \theta) \to E_0 \hat{\mathbf{z}}$. Así, en este límite, ϕ debe reducirse a la forma apropiada para este campo uniforme. Pero dado que $\mathbf{E} = - \nabla\phi$, esto significa que para una r muy grande $E_z = E_0 = -\partial\phi/\partial z$, lo que da $\phi = - E_0 z$ como la expresión en el límite. De esta manera, la condición en la frontera lejana es

$$\phi(r,\theta) \underset{r\to\infty}{\to} -E_0 z = -E_0 r\cos\theta \tag{11-106}$$

Al sustituir $r = a$ en (11-99) y utilizar (11-105), se tiene que

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) = 0 \tag{11-107}$$

Pero (11-104) indica que el término entre paréntesis es igual a cero, de modo que $B_1 = -a^{2l+1} A_l$, y así (11-99) queda como

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta) \tag{11-108}$$

Si se aplica (11-106) a esto,

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta) \tag{11-109}$$

por medio de (11-100). Si por conveniencia en la expresión se separa el término de la suma que corresponde a $l = 1$, (11-109) toma la siguiente forma:

$$(A_1 + E_0) r P_1(\cos\theta) + \sum_{l\neq 1}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = 0 \tag{11-110}$$

Dado que esto debe ser cierto para todas las r grandes, debe también ser cierto para un valor constante definido, r_0. Pero en ese caso (11-100) es de exactamente la forma de (11-104), lo que demuestra que $A_1 = - E_0$ y que $A_1 = 0 (l \neq 1)$, completando así la evaluación de los coeficientes. En consecuencia, la suma de (11-108) se reduce a un solo término para $l = 1$, por lo que la expresión única final para ϕ es

$$\phi(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{a^3 E_0\cos\theta}{r^2} \tag{11-111}$$

Al obtenerse este resultado se ha resuelto completamente el problema, ya que tanto ϕ como $\mathbf{E}$ pueden evaluarse para cualquier punto de campo que se especifique.

Tal como se deduce de (11-106), el primer término de (11-111) es justamente el que corresponde al campo uniforme original. El segundo término debe representar entonces la parte del potencial que resulta de la presencia de la esfera. Al compararlo con (8-48) se aprecia que se trata de un término dipolar, por lo que el momento dipolar de la esfera es

$$p = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \tag{11-112}$$

De tal manera, la esfera ha adquirido un momento dipolar que es proporcional al campo original y, de hecho, ha quedado polarizada. La relación entre el momento dipolar inducido y el campo aplicado recibe el nombre de *polarizabilidad*, α, y se puede obseervar que

$$\alpha = \frac{p}{E_0} = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 V_s \tag{11-113}$$

donde V_s es el volumen de la esfera. Este momento dipolar debe tener su origen en la densidad superficial de carga libre sobre la esfera, que puede ser encontrada fácilmente. La componente radial de **E** es

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) E_0 \cos\theta \tag{11-114}$$

En la superficie de la esfera, ésta es la componente normal, mediante la cual se puede obtener, de acuerdo con (6-4), la densidad superficial de carga:

$$\sigma_f(\theta) = \epsilon_0 E_r(a,\theta) = (3\epsilon_0 E_0)\cos\theta \tag{11-115}$$

que resulta proporcional a cos θ. Este resultado tiene la misma *forma* que la densidad de carga dada por (10-27) e ilustrada en la figura 10-9. Las cargas superficiales tienen signos opuestos en los dos hemisferios, y es precisamente esta separación de la carga total la que da lugar al momento dipolar. [Es fácil verificar directamente que cuando se calcula **p** por medio de (11-115) en la forma de integral de superficie de (8-22), se obtiene (11-112); en el ejercicio 8-8 también se obtiene este mismo resultado.] La esfera era neutra antes de introducirse en el campo, y se puede ver que su carga neta total sigue siendo cero si se combinan (11-115) y (2-16):

$$Q_{f,\,\text{total}} = \int \sigma\, da = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (3\epsilon_0 E_0 \cos\theta)(a^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi) = 0$$

por lo que la esfera sigue sienao neutra.

La componente restante de **E** es

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) E_0 \operatorname{sen}\theta \tag{11-116}$$

Se observa que $E_\theta(a, \theta) = 0$, como debe ser, ya que viene a ser una componente tangencial a la superficie de la esfera.

Dado que el ϕ por (11-111) tiene una dependencia angular originada exclusivamente por el término $P_1(\cos\theta)$ de (11-99), se puede concluir que la esfera únicamente posee momento dipolar. En otras palabras, la distribución de carga (11-115) es tal que no produce ningún nomento monopolar ni cuadripolar, así como ningún momento de orden superior; esto también se verificó directamente para el momento cuadripolar en el ejercicio 8-8.

La figura 11-12 ilustra las líneas de **E**, calculadas según (11-114) y (11-116).

Ejemplo

Esfera dieléctrica en un campo inicialmente uniforme. Este ejemplo es el mismo que el anterior, excepto que se tiene ahora una esfera dieléctrica sin carga en lugar de la esfera conductora conectada a tierra. Las condiciones de frontera son un poco diferentes porque la esfera ya no se encuentra a un potencial definido ni ϕ debe necesariamente ser constante dentro de ella. Resulta conveniente investigar las regiones fuera de la esfera ($r > a$) y dentro de la esfera ($r < a$) por separado; se indican los potenciales y campos aplicables a estas regiones con los subíndices o e i respectivamente.

A distancias muy grandes de la esfera, el campo debe aquí ser también uniforme, de modo que una de las condiciones de frontera resulta ser exactamente igual a (11-106):

$$\phi_o(r,\theta) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} -E_0 r\cos\theta \tag{11-117}$$

En la superficie de la esfera ya no se puede usar (11-105). Sin embargo, la superficie de la esfera resulta ser una superficie de discontinuidad entre el dieléctrico y el vacío, por lo que las componentes tangenciales de **E** y las componentes normales de **D** son continuas ahí. En (10-56) estas componentes se encuentran expresadas en función exclusivamente de **E**. En este caso se tiene que $\sigma_f = 0$, y dado que E_r y E_θ son las componentes normal y tangencial respectivamente, es posible expresar (10-56) en función de las derivadas de ϕ como sigue:

$$\left(-\epsilon_0\frac{\partial\phi_o}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(-\epsilon\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\right)_{r=a} \tag{11-118}$$

$$\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_o}{\partial\theta}\right)_{r=a} = \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_i}{\partial\theta}\right)_{r=a} \tag{11-119}$$

donde se ha tomado la región 2 como la exterior y la 1 como la interior. Por último, se cuenta con otra condición que no se había manejado antes. Se trata de una "condición de frontera" de una clase generalizada que concierne a la situación que impera en el origen ($r = 0$). Por la suposición inicial, no pueden existir cargas puntuales libres dentro de la esfera, por lo que no habrá ninguna en el origen. Dado que esa es la única manera en que el potencial podría ser infinito ahí, se requiere también que

$$\phi \text{ sea infinito para } r = 0 \tag{11-120}$$

En lugar de tratar de resolver este problema como en el ejemplo anterior, se intentará reducir la cantidad de trabajo tomando ventaja de la experiencia obtenida. Es de esperarse que la esfera dieléctrica se polarice debido a la acción del campo y adquiera así un momento dipolar, de manera que una vez más resulte plausible que únicamente sobreviva el término $l = 1$ de (11-99). De acuerdo con esto, se supone que el potencial fuera de la esfera está dado por

$$\phi_o = \left(-A_o r + \frac{B_o}{r^2}\right)\cos\theta \tag{11-121}$$

donde A_0 y B_0 son constantes. Ya que ahora la condición de frontera (11-118) tendrá un $\cos\theta$ en su miembro izquierdo, es lógico esperar que ocurra lo mismo en el otro miembro; de acuerdo con todo esto, tómese la misma forma general (11-121) para el potencial dentro de la esfera. Así, se escribe

$$\phi_i = \left(-A_i r + \frac{B_i}{r^2}\right)\cos\theta \tag{11-122}$$

donde A_i y B_i son constantes. Si se logran encontrar estas cuatro constantes al considerar todas las condiciones de frontera, se habrá encontrado la *única* solución del problema.

Si se combinan (11-117) y (11-121) se puede observa que $A_0 = E_0$, por lo que se tiene que

$$\phi_o = \left(-E_0 r + \frac{B_o}{r^2}\right)\cos\theta \tag{11-123}$$

Puede observarse también que si $B_i \neq 0$ en (11-122), el término $1/r^2$ hará que $\phi \to \infty$ a

medida que $r \to 0$, lo cual no está permitido de acuerdo con (11-120); por lo tanto, este término no puede aparecer en la forma para el potencial interior, por lo que realmente se debe tener que $B_i = 0$, haciendo que (11-122) se reduzca a

$$\phi_i = -A_i r \cos\theta \tag{11-124}$$

Al sustituir estas expresiones en (11-118) y (11-119), se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$E_0 + \frac{2B_o}{a^3} = \kappa_e A_i \qquad -E_0 a + \frac{B_o}{a^2} = -A_i a$$

ya que $\epsilon/\epsilon_0 = \kappa_e$. Al resolverlas simultáneamente se encuentra que $A_i = 3E_0/(\kappa_e + 2)$ y que $B_0 = [(\kappa_e - 1)/(\kappa_e + 2)]a^3 E_0$, de tal suerte que los potenciales resultan ser

$$\phi_o = -E_0 r \cos\theta + \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2}\right)\frac{a^3 E_0 \cos\theta}{r^2} \tag{11-125}$$

$$\phi_i = -\left(\frac{3E_0}{\kappa_e + 2}\right) r \cos\theta \tag{11-126}$$

con lo que se resuelve el problema.

El campo dentro de la esfera es $E_i = -\nabla\phi_i = E_i\hat{\mathbf{z}}$ y, dado que $\mathbf{E}_0 = E_0\,\hat{\mathbf{z}}$, se tiene que

$$\mathbf{E}_i = \left(\frac{3}{\kappa_e + 2}\right)\mathbf{E}_0 \tag{11-127}$$

pudiéndose observar que $|\mathbf{E}_i| < |\mathbf{E}_0|$ ya que $\kappa_e > 1$. Así, el campo eléctrico es constante, paralelo al campo original externo pero algo menor que él. En consecuencia, la esfera se encontrará uniformemente polarizada; de acuerdo con (10-50), (10-52) y (11-127), la polarización es

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2}\right)3\epsilon_0\mathbf{E}_0 \tag{11-128}$$

y la magnitud del momento dipolar total se obtiene al multiplicar P por el volumen de la esfera, o sea,

$$p = 4\pi\left(\frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2}\right)a^3\epsilon_0 E_0 \tag{11-129}$$

Con esto es posible expresar (11-125) como

$$\phi_o = -E_0 r\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{11-130}$$

donde el segundo término está en concordancia exacta con (8-48), como era de esperarse.

Si se resta $\mathbf{E}_0$ de ambos miembros de (11-127) resulta una nueva expresión muy interesante e instructiva. Se encuentra que $\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_0 = [(1 - \kappa_e + 2)/\ \mathbf{E}_0 = -\mathbf{P}/3\epsilon_0$, usando (11-128), por lo que

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \tag{11-131}$$

lo que indica que el campo resultante en el interior de la esfera puede expresarse como $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{loc}$, es decir, como la suma del campo externo original en el vacío más el campo local $\mathbf{E}_{loc}$ que es proporcional a la polarización y opuesta a ella. [Anteriormente se encontró el resultado similar (10-67) para el caso en el que el dieléctrico tenía la forma de una placa de caras paralelas.] Desde luego, la fuente de este campo interior es la carga ligada que aparece en la superficie del dieléctrico cuando se presenta una discontinuidad en **P**, y su densidad está dada, de acuerdo con (10-8), por $\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = P \cos\theta$; esta distribución se asemeja justamente a la (10-27) que se muestra en la figura 10-9.

Al escribir (11-130) como se hizo, se pudo expresar el potencial exterior como la suma explícita del potencial debido al campo externo y la contribución de la esfera polarizada. Se pueden obtener resultados similares para el potencial en el interior, ϕ_i, si se combinan (11-126), (11-127) y (11-131); así se obtiene

$$\phi_i = -E_i r\cos\theta = -E_0 r\cos\theta + \left(\frac{P}{3\epsilon_0}\right) r\cos\theta \qquad (11\text{-}132)$$

Existe un caso especial muy interesante. Si se hace $\kappa_e \to \infty$, se encontrará que $\mathbf{E}_i \to 0$, $p \to 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$, $\phi_i \to 0$ y $\phi_0 \to$(11-111); éstos no son sino los resultados obtenidos para la esfera conductora del ejemplo anterior, de acuerdo con (6-1), (11-105) y (11-112). Por lo tanto, se puede observar que, en lo que respecta a los efectos electrostáticos, un conductor actúa simplemente como un material cuya constante dieléctrica es infinita.

La figura 11-13 muestra las líneas de **E** que corresponden a este sistema.

Ejemplo

Esfera con polarización permanente uniforme. Supóngase que se tiene una esfera con polarización uniforme $\mathbf{P} = P\,\hat{\mathbf{z}}$, donde P = const., pero que no existe campo externo. Este es justamente el sistema que se estudió en la sección 10-4 y para el que se calcularon ϕ y **E** únicamente a lo largo del eje z. La forma en que (11-130) y (11-132) se encuentran expre-

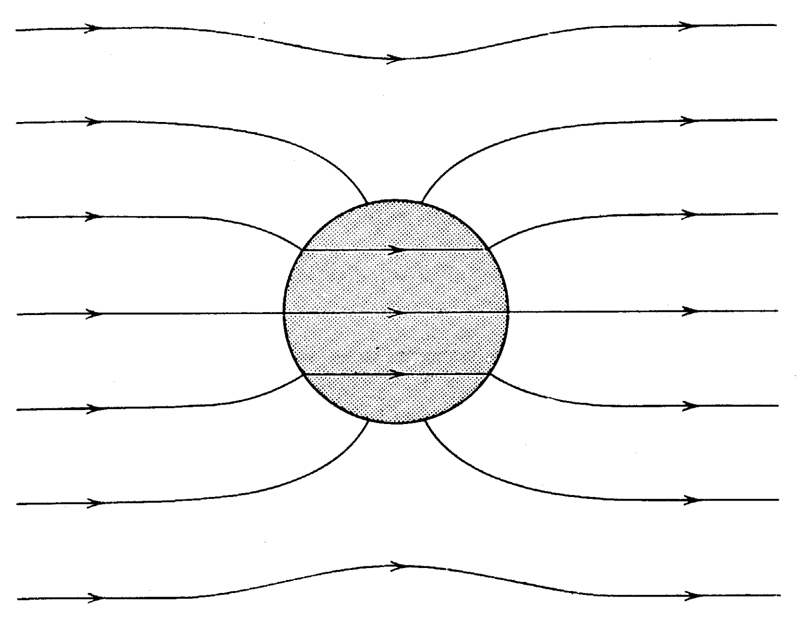


Figura 11-13 Líneas de E para una esfera dieléctrica en un campo inicialmente uniforme.

sadas hace posible encontrar una solución completa de inmediato, dado que puede tomarse a $E_0 = 0$, interpretarse p y P como el momento dipolar permanente y la polarización, respectivamente, y obtener así

$$\phi_o = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \phi_i = -E_i r\cos\theta = \left(\frac{P}{3\epsilon_0}\right) r\cos\theta \tag{11-133}$$

La primera expresión indica que el campo en *todos los puntos* fuera de la esfera es un campo dipolar, como ya se había sospechado con base en los resultados a lo largo del eje z. De manera similar, la segunda expresión indica que el campo eléctrico es uniforme en *todos los puntos* dentro de la esfera y que, de hecho, está dado por

$$\mathbf{E}_i = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \tag{11-134}$$

que concuerda con (10-37) que, como ya se había encontrado antes, es válida a lo largo del eje z.

Dado que existe una gran cantidad de campos locales que son proporcionales a la polarización y opuestos a ella, es práctica común expresar $\mathbf{E}_{loc}$ en la forma general

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = -N\left(\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}\right) \tag{11-135}$$

donde N es una constante sin dimensión que recibe el nombre de *factor despolarizante*. Ya se han calculado dos de ellos. Fueron $N = 1$ para una placa infinita de caras paralelas y $N = 1/2$ para un cilindro, como se hubiera ya podido averiguar por el ejercicio 10-12.

11-6 Solución esféricamente simétrica de la ecuación de Poisson

Si se combina (11-1) con (11-55) u (11-86), se obtiene la ecuación de Poisson expresada con coordenadas rectangulares o esféricas. Sin embargo, para propósitos ilustrativos, en esta sección se limitarán las situaciones a aquéllas que sean esféricamente simétricas, de manera que ϕ será una función exclusivamente de r, es decir, $\phi = \phi(r)$. Así ρ será también necesariamente una función sólo de r, con lo que se obtiene que

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{11-136}$$

Ejemplo

Esfera con densidad de carga uniforme. Considérese una esfera de radio a que contiene carga a densidad constante, de manera que ρ = const. en el interior y $\rho = 0$ en el exterior. Se desea obtener ϕ en todo el espacio por medio de (11-136). Fuera de la esfera esta ecuación es $d(r^2 d\phi_0/dr)/dr = 0$, lo que puede integrarse dos veces para obtener

$$\phi_o(r) = A_o + \frac{B_o}{r} \tag{11-137}$$

donde A_0 y B_0 son constantes de integración. [Esto también se puede obtener a partir de (11-99) al cancelar todos los términos que son función de ángulos, es decir, utilizando exclusivamente $\ell = 0$.] Dentro de la esfera (11-136) viene a ser

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi_i}{dr}\right) = -\frac{\rho r^2}{\epsilon_0}$$

que puede integrarse fácilmente dos veces para obtener

$$\phi_i(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + A_i + \frac{B_i}{r} \qquad (11\text{-}138)$$

donde A_i y B_i son constantes. Todo lo que resta por hacer es evaluar las constantes a partir de las condiciones de frontera.

Dado que todas las cargas se encuentran dentro de un volumen finito, es de desearse que ϕ se anule en infinito, de acuerdo con lo visto en relación a (5-10). Así, a medida que $r \to \infty$, $\phi_0 \to 0$, y de acuerdo con (11-137) $A_0 = 0$, por lo que $\phi_0 = B_0/r$. Dado que no existen cargas puntuales en el origen, (11-120) sigue siendo aplicable, con lo que demuestra que en (11-138) $B_i = 0$. Se sabe por (9-29) que ϕ es continuo en $r = a$, de manera que $\phi_0(a) = \phi_i(a)$, lo que significa que $A_i = (B_0/a) + (\rho a^2/6\epsilon\rho)$, por lo que ahora la forma de ϕ_i es

$$\phi_i(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(a^2 - r^2) + \frac{B_o}{a} \qquad (11\text{-}139)$$

Por último, ya que no existe carga superficial, $E_n = E_r$ es también continuo en $r = a$ de acuerdo con (9-26) y $-(\partial\phi_0/\partial r)_{r=a} = -(\partial\phi i/\partial r)_{r=a}$, lo que desemboca en $(B_0/a^2) = (\rho\, a/3\epsilon_0)$, o sea, $B_0 = \rho a^3/3\epsilon_0$. Al sustituir esto en (110137) (siendo $A_0 = 0$) y (11-139), se tiene

$$\phi_o(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} \qquad \phi_i(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3a^2 - r^2)$$

que viene a ser exactamente lo que se obtuvo en (5-22) y (5-23) cuando se estudió el mismo ejemplo usando otros métodos.

Ejercicios

11-1 Reconsidérese el teorema de la sección 11-1 y demúestrese que si la componente normal de **E** se encuentra preestablecida en todos los puntos de la superficie limitante, no es necesario que ϕ_1 y ϕ_2 sean iguales, sino que pueden diferir hasta por una constante.

11-2 Verifíquese por integración directa que (11-19) es la resultante de la fuerza de Coulomb entre q y la carga inducida descrita por (11-17).

11-3 Una carga puntual, q, se encuentra situada sobre el plano xy cerca de dos planos conductores conectados a tierra que se intersectan a ángulos rectos como se muestra en la figura 11-14. El eje z está alineado con la recta de intersección de los planos. Encontrar y justificar las cargas imagen que, junto con q, darán el potencial en todos los puntos de la región al vacío $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $-\infty \leqslant z \leqslant \infty$. Encontrar $\phi\,(x,y,z)$ en la región al vacío. Encontrar $E_y(x,y,z)$. Verificar que E_y se anula sobre el plano conductor para el cual es una componente tangencial. Encontrar la densidad de carga superficial inducida, σ_f, sobre el plano para el que E_y resulta ser una componente adecuada. ¿Cuál es el signo de σ_f? (Clave: recordar la formación de imágenes múltiples en espejos planos de acuerdo con la óptica geométrica.)

11-4 Supóngase que el ángulo entre los planos conductores de la figura 11-14 es de 60° en lugar de 90° como se muestra, y que q se encuentra sobre la recta bisectriz del ángulo (es decir, sea $z = b$ y después cámbiese el ángulo). Encontrar y justificar las cargas imagen que, junto con q, darán ϕ en todos los puntos de la región al vacío. ¿Cuál es la dirección de la fuerza resultante sobre q?

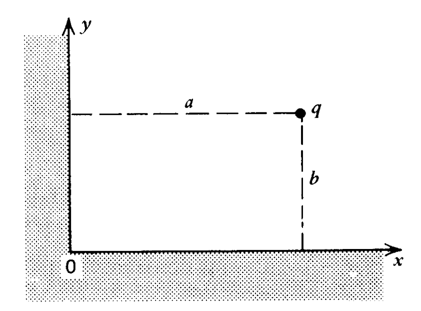


Figura 11-14 Geometría para el ejercicio 11-13.

11-5 Supóngase que en la forma 11-1 q es remplazada por un dipolo puntual $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{y}}$. Encontrar la fuerza sobre $\mathbf{p}$.
11-6 Supóngase que el punto en el que el eje x intersecta la curva equipotencial de enmedio de la figura 11-2 se encuentra a la mitad de la distancia entre la carga y el conductor. Encontrar ϕ y $\mathbf{E}$ en este punto.
11-7 Verificar que (11-35) puede también obtenerse por medio de (11-29) y (11-30).
11-8 Utilizar el sistema de coordenadas esféricas de la figura 11-3 para encontrar ϕ en todos los puntos fuera de la esfera, para la distribución de carga de la figura 11-5. Demostrar que el resultado obtenido es (11-36). Encontrar $\mathbf{E}$ y la fuerza sobre q. Encontrar σ_f y demostrar que la carga total inducida en la esfera es igual a cero.
11-9 Se aísla la esfera conductora de la figura 11-3 y se le da una carga total Q. Encontrar el potencial de la esfera y la fuerza sobre q.
11-10 Después de (11-48) se vio que la carga superficial ligada total de un dieléctrico es igual a la carga imagen. ¿Cómo se puede hacer concordar este resultado con (10-13)?
11-11 Para el sistema de la figura 11-9, encontrar la densidad superficial de carga inducida sobre el conductor, la carga total inducida por unidad de longitud paralela a la carga lineal y la fuerza por unidad de longitud sobre la carga lineal.
11-12 Demostrar que la fuerza de atracción sobre una longitud L de uno de los cilindros de la figura 11-10 está dada por

$$F_e = -\frac{\pi\epsilon_0 L(\Delta\phi)^2}{2[\cosh^{-1}(D/2A)]^2(D^2-4A^2)^{1/2}}$$

11-13 Un cable largo de sección circular de radio A se tiene sobre unos postes a una altura h sobre el suelo. Despréciense la comba del cable y la curvatura de la Tierra y encuéntrese la capacitancia por unidad de longitud de este sistema. Encontrar también la fuerza de atracción sobre una unidad de longitud del cable uniformemente cargado ejercida por la Tierra.
11-14 Demostrar que el potencial producido por una carga lineal infinita de densidad constante λ, situada a una distancia D del eje paralelo de un cilindro circular conductor de radio A, es el mismo que se produciría por la misma carga lineal y una carga imagen $-\lambda$ colocada a una distancia A^2/D del centro del cilindro hacia la carga real. ¿Cuál es el potencial del cilindro?
11-15 Para el sistema de la figura 11-11, encontrar la densidad de carga superficial sobre la cara $x = 0$.
11-16 Verificar que E_x de (11-84) es igual a cero para $y = 0$. [Clave: puede ser de gran ayuda recordar que el $\cos u = ½(e^{iu} + e^{-iu})$.]
11-17 Este es un problema en dos dimensiones. Considérese un cuadrado sobre el plano xy con vértices en (0,0), (a,0), (a,a) y (0,a). No existen carga ni materia dentro del cuadrado. Los lados perpendiculares al eje y tienen un potencial igual a cero. El lado en $x = a$ tiene un potencial constante ϕ_0, mientras que el que está en $x = 0$ tiene el potencial constante

$-\phi_0$. Encontrar $\phi(x,y)$ para todos los puntos dentro del cuadrado. Encontrar **E** en el centro del cuadrado y evaluar la relación que existe entre **E** y (ϕ_0/a) en este punto, hasta cuatro cifras significativas.

11-18 Encontrar el potencial ϕ en todos los puntos dentro de un cubo de lado L situado y orientado como en la figura 1-41. No existe carga ni materia dentro del cubo. El potencial sobre la cara $z = L$ tiene el valor constante ϕ_0, y el potencial en todas las demás caras es igual a cero. Demostrar que, hasta la cuarta cifra significativa, ϕ en el centro del cubo es igual a $0.1667\,\phi_0$.

11-19 Demostrar que la solución de la ecuación de Laplace puede expresarse como una suma de términos de la forma $X(x) + Y(y) + Z(z)$. Demostrar cómo estas funciones, o las derivadas apropiadas de las mismas, se relacionan entre sí, si es que en realidad existe tal relación. Encontrar la forma general para $X(x)$ e interpretar el campo eléctrico correspondiente.

11-20 (*a*) Calcular directamente $\int_{-1}^{1} P_l^2(u)d\mu$n para $l = 0, 1, 2$, y así demostrar que (11-102) es correcta para estos casos.

(*b*) Demostrar que cuando la ecuación diferencial (11-92) que satisface P_1 se expresa en función de la variable $\mu = \cos\theta$, se vuelve

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_l}{d\mu}\right] + l(l+1)P_l = 0 \tag{11-140}$$

(*c*) Se puede demostrar que la propiedad de ortogonalidad expresada en (11-102) para $l \neq$ m es una consecuencia de (11-140) y del hecho de que P_1 es finita y tiene derivadas finitas en $\mu = \pm 1$ como sigue: multiplicar (11-140) por P_m; escribir la ecuación diferencial que satisface $P_m(\mu)$ y multiplicarla por P_1; restar ambas expresiones e integrar el resultado sobre μ desde -1 a $+1$ integrando por partes según sea necesario.

11-21 Encontrar la ecuación para las líneas de **E** que corresponden a (11-111), es decir, para una esfera conductora en un campo inicialmente uniforme.

11-22 Supóngase que en lugar de (11-106) se requiriese que, para grandes distancias, $\phi \to -E_0 r\cos\theta + \phi_0$, donde ϕ_0 es constante, ya que esta situación también produciría un campo uniforme. Encontrar ϕ bajo estas circunstancias. Si la solución encontrada es diferente de (11-111), ¿cómo se puede interpretar el resultado?

11-23 Una cavidad esférica de radio a se encuentra dentro de un gran conductor conectado a tierra. Se coloca una carga q dentro de la cavidad a una distancia b de su centro. Encontrar ϕ en todos los puntos dentro de la cavidad usando coordenadas esféricas con origen en el centro y el eje z pasando por la posición de q. Encontrar **E** en todos los puntos dentro de la cavidad. Encontrar **E** en el centro de la cavidad. Encontrar la densidad superficial de la carga inducida sobre la pared de la cavidad. ¿Cuál es la carga total inducida sobre la pared?

11-24 Por el método de separación de variable, resolver la forma dimensional de la ecuación de Laplace expresada en coordenadas polares $(\rho\varphi)$. Demostrar así que la solución general es de la forma

$$\phi = A + B\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m\rho^m + \frac{B_m}{\rho^m}\right)(C_m\cos m\varphi + D_m\sin m\varphi) \tag{11-141}$$

donde m es un entero positivo y φ cubre todo su rango posible. (Clave: ϕ debe ser univaluada.)

11-25 Un conductor cilíndrico conectado a tierra infinitamente largo, de sección circular de radio a tiene su eje con coincidencia con el eje z. Se le coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme, $E_0 = E_0\hat{\mathbf{x}}$, de manera que su eje es perpendicular a E_0. Encontrar ϕ en todos los puntos del exterior del cilindro. Encontrar la densidad superficial de carga y demostrar que el cilindro permanece neutro.

11-26 El cilindro del ejercico anterior es ahora dieléctrico en lugar de conductor. Encontrar ϕ en todos los puntos. Encontrar **E** y **P** en el interior del cilindro y verificar así que el factor despolarizante es ½ en este caso.

11-27 Un círculo de radio a se encuentra sobre el plano xy con su centro en el origen. La sección semicircular de la frontera para $x > 0$ se mantiene al potencial constante ϕ_0; el otro semicírculo, para el que $x < 0$, se mantiene al potencial constante $-\phi_0$. Encontrar ϕ para todos los puntos del interior del círculo. Encontrar **E** en el centro del círculo.
11-28 Aunque en (11-99) se da la forma de la solución general para una situación con simetría axial, no siempre resulta fácil encontrar los coeficientes A_l y B_l planteando el problema para valores generales de θ. Algunas veces se puede utilizar el siguiente procedimiento. Dado que (11-99) es correcta para todos los valores de θ, debe también ser correcta, con los mismos coeficientes, para el valor particular $\theta = 0$, es decir, para la dirección a lo largo del eje z positivo—el eje de simetría. Entonces $r = z$ y $P_l(\cos\theta) = P_l(1) = 1$, por lo que (11-99) se reduce a

$$\phi(z) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l z^l + \frac{B_l}{z^{l+1}}\right) \qquad (z>0) \tag{11-142}$$

De esta manera, si se puede obtener ϕ sobre el eje z, debe ser posible encontrar A_l y B_l por comparación con (11-142), y cuando estos coeficientes son sustituidos en (11-99) el resultado viene a ser una expresión de ϕ que es correcta para todas las θ. Algunas veces la identificación debe hacerse desarrollando $\phi(z)$ en una serie de potencias y encontrando los coeficientes por medio de una comparación término por término. Como ejemplo de este procedimiento, considérese la carga lineal uniforme de longitud finita de la figura 3-8, para la cual el potencial está dado por (5-30). Tómese $L_2 = L_1 = L$ y demuéstrese que cuando $r > L$, ϕ puede expresarse en la forma

$$\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\sum_{l\,\mathrm{par}}\left(\frac{L}{r}\right)^{l+1}\frac{P_l(\cos\theta)}{(l+1)}$$

donde la suma se toma únicamente sobre los valores pares de l, incluyendo $l = 0$.
11-29 Un anillo circular de radio a se encuentra sobre el aplano xy con su centro en el origen. Posee una densidad lineal de carga constante e igual a λ en su circunferencia. Encontrar $\phi(r,\theta)$ expresado como una serie de $P_l(\cos\theta)$, para todas las r. (Véase el ejercicio anterior.)
11-30 Un sistema de dos esferas concéntricas tiene un radio interior a y un radio exterior b. La región entre ambas se rellena con una densidad de carga esféricamente simétrica de densidad volumétrica $\rho = \rho_0(r/a)^n$, donde ρ_0 = const. y $n > 0$. La esfera interior se mantiene a un potencial constante ϕ_1, mientras que la exterior se encuentra al potencial constante ϕ_2. Encontrar ϕ para $a \leqslant r \leqslant b$ por medio de (11-136).
11-31 Dos planos conductores infinitos son paralelos al plano xy. Uno de ellos está situado en $z = 0$ y se mantiene al potencial constante ϕ_0. El otro, con un potencial constante ϕ_d, está en $z = d$. La región entre ellos se llena con carga a densidad volumétrica $\rho_0(z/d)^2$. Resolver la ecuación de Poisson para encontrar ϕ en $0 \geqslant z \geqslant d$. Encontrar la densidad superficial de carga en cada uno de los planos.
11-32 Considérense los cilindros coaxiales de la figura 4-7. El cilindro interior se mantiene a potencial constante ϕ_a y el exterior a ϕ_b. Existe una capa cilíndrica de densidad de carga constante en la región entre ellos y hay vacío en lo demás. En otras palabras, la densidad volumétrica de carga ρ_{ch} es: cero en $a \leqslant \rho < \rho_1$, $A\,\epsilon_0$ en $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$ y cero en $\rho_2 < \rho \leqslant b$ donde A = const. Resolver la ecuación de Poisson para encontrar ϕ en $a \leqslant \rho \leqslant b$.
11-33 A continuación se dan algunos resultados para un sistema de cargas fuente que ocupan una *región finita*. Demostrarlos por medio de (1-114), (1-124), (1-125), (1-243) y (3-3):

$$\int_{V'}\nabla'\left(\frac{\rho}{R}\right)d\tau' = 0 \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{(\nabla'\rho)}{R}\,d\tau' \qquad \int_{V'}\nabla'\times\left(\frac{\mathbf{E}}{R}\right)d\tau' = 0$$

Capítulo 12
Corrientes eléctricas

La electrostática estudia las relaciones entre cargas eléctricas en reposo. La siguiente división principal del electromagnetismo que se considera aquí –la magnetostática– estudia las fuerzas entre cargas en movimiento. El flujo de carga eléctrica recibe el nombre de *corriente eléctrica* y, en este capítulo, se diseñan procedimientos útiles para describir estas corrientes en general. También se estudian algunos aspectos de una clase particular de corrientes, las que fluyen en los conductores.

12-1 Corrientes y densidades de corriente

Supóngase que alguien situado en un punto P observa las cargas que pasan por ese punto; estas cargas pueden viajar a lo largo de un alambre o pueden ser simplemente un haz de partículas cargadas que se mueven en el espacio. De cualquier manera, se asume que el observador encuentra que una carga Δq pasa por el punto P en un intervalo de tiempo Δt. Se puede definir entonces la *corriente promedio,* $\langle I \rangle$, durante este intervalo como la razón promedio de flujo de carga

$$\langle I \rangle = \frac{\Delta q}{\Delta t} \tag{12-1}$$

Más adelante se entrará en detalles de cómo puede medirse $\langle I \rangle$ o Δq, pero si, por ejemplo, la corriente se debiera a un flujo de protones, cada uno de ellos con una carga e, el procedimiento de medición pudiera imaginarse como una simple operación de *conteo.* De esta manera, si un número N de protones pasaron en este intervalo, $\Delta q = Ne$, e $\langle I \rangle = Ne/\Delta t$. Como ya se implica en (12-1), la "dirección" o sentido de la corriente se define como la del flujo de cargas positivas. Si las cargas en movimiento estuvieran cargadas negativamente; por ejemplo, si fueran electrones, la dirección de $\langle I \rangle$ sería opuesta a la dirección de su movimiento. La razón de esto es muy sencilla. Supóngase que la región alrededor de un punto fuera originalmente neutra, es decir, que tuviera iguales cantidades de cargas positivas y negativas. Entonces si hubiera cierto número de cargas negativas que estuvieran *saliendo* de la región, ésta adquiriría un exceso de cargas positivas, lo cual tiene un efecto neto equivalente a la *entrada* de cargas positivas en la región.

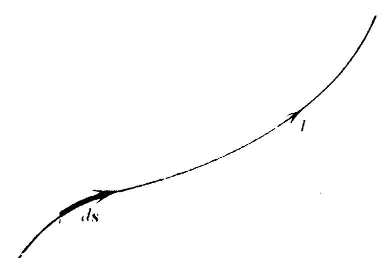


Figura 12-1 Una corriente filamental.

Si el flujo de cargas no es uniforme en el tiempo, es posible definir una *corriente instantánea* I como la razón instantánea de flujo de carga:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{12-2}$$

En lo que sigue a continuación se considerarán solamente corrientes que son constantes en el tiempo, de manera que I = const. e $\langle I \rangle = I$. Estas reciben el nombre de *corrientes constantes* o *corrientes estacionarias,* y describen una razón uniforme de flujo de carga.

Como ya se vio en la sección 2-2, la unidad de carga en realidad se define en función de la unidad de corriente, la que recibe el nombre de *ampere*, de tal suerte que, de acuerdo con (12-1), 1 coulomb = 1 ampere segundo. El ampere en sí se define en función de la fuerza entre corrientes una definición precisa se dará en el próximo capítulo.

Es a menudo conveniente pensar que la corriente viaja a lo largo de alguna curva geométrica, tal como se ilustra en la figura 12-1, en la que la punta de la flecha indica la dirección de I y $d\mathbf{s}$ es un desplazamiento a lo largo de la línea y en el sentido de I. Esta situación idealizada muy bien podría representar el flujo de carga en un alambre muy delgado o en un haz de sección pequeña. Estas corrientes reciben el nombre de *corrientes filamentales.* Sin embargo, habrá ocasiones en que el flujo de carga se encuentre *distribuido* en un volumen o en una superficie, por lo que se hace necesario contar con descripciones apropiadas para esas situaciones. Esto se puede lograr introduciendo el concepto de *densidades de corriente.*

La primera sería la *densidad volumétrica de corriente,* **J**. Su dirección es la misma que la del flujo de carga y su magnitud **J** está dada por la corriente por unidad de *área* a través de una superficie colocada perpendicularmente al flujo, o sea que es carga por unidad de tiempo por unidad de área. Se puede ilustrar esta definición y simultáneamente obtener una relación práctica si se considera la situación de la figura 12-2. Se desea encontrar la carga Δq que, en un tiempo Δt, ha pasado por una superficie pequeña Δa, que es perpendicular a **J**. Por medio de (12-1) se sabe que $\Delta q = \langle I \rangle$ E$t = \langle J \rangle \Delta a \; \Delta t$, ya que $\langle J \rangle$ es la corriente promedio por unidad de área. Pero toda la carga que pasó por Δa *se encuentra* contenida en el volumen Δt del cilindro de longitud Δl, de manera que al utilizar (2-14) también se tiene que $\Delta q = \rho \Delta \tau = \rho \Delta l \Delta a$, donde ρ es la densidad volumétrica de carga. Despejando Δq de estas dos ecuaciones, igualando y cancelando el factor común Δa, se encuentra que $\langle J \rangle = \rho \; (\Delta l | \Delta t) = p \langle v \rangle$ es la velocidad promedio de las cargas. Resulta evidente que esta relación es también correcta para el caso instantáneo así como para el promedio, y dado que la dirección de **J** se define en la misma dirección del flujo, o sea, de **v**, se puede escribir

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \tag{12-3}$$

Si las cargas en movimiento fueran de diversos tipos con densidades p_i y velocidades respectivas $\mathbf{v}_i$ se puede observar que en Δt, la carga del tipo i que ha pasado a través

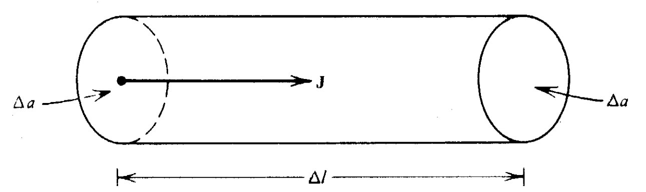


Figura 12-2 Cálculo de la densidad volumétrica de corriente.

de la superficie es $\Delta q_i = \rho_i |\mathbf{v}_i| \Delta a \Delta t$. De esta manera, el total de todos los tipos de carga será $\Delta q = \Sigma_i \rho_i |\mathbf{v}_i| \Delta t \Delta a$, lo que resulta ser la generalización natural de (12-3) en la forma

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i \tag{12-4}$$

Al comparar los últimos dos resultados, se puede observar que es todavía posible utilizar (12-3) para casos generales si se toma a ρ como la densidad de carga total y $\mathbf{v}$ como la velocidad promedio, prorrateada por las densidades ρ_i, muy a la manera como se calcula la velocidad del centro de masa de un conjunto de masas puntuales.

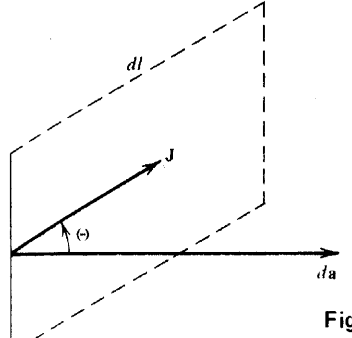


Figura 12-3 La densidad de corriente y el elemento de superficie no son paralelos.

Supóngase ahora que J y un elemento de superficie $d\mathbf{a}$ no fueran paralelos, como se ilustra en la figura 12-3. Se puede encontrar la carga que ha pasado por $d\mathbf{a}$ en un tiempo dt de una manera similar a la usada para la figura 12-2. Esta vez la carga total será la contenida en el cilindro de altura inclinada dl y volumen dl cos $\Theta\ da$, y estaría dada por $dq = pl \cos \Theta\ da = pv \cos \Theta\ da\ dt = p\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}dt = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}dt$, utilizando (12-3). Por lo tanto, la razón de flujo de carga a través de $d\mathbf{a}$ será

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{\text{a través } d\mathbf{a}} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \tag{12-5}$$

Si se considera una superficie arbitraria, S, como la que se muestra en la figura 12-4, se puede calcular la razón total a la que está fluyendo carga a través de ella sumando las contribuciones de todos los elementos $d\mathbf{a}$ como aparecen en (12-5). De esta manera se obtiene

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{\text{a través } S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \qquad (12\text{-}6)$$

que a veces recibe el nombre de flujo de carga. S puede ser una superficie abierta o cerrada en (12-6).

Si, por alguna razón, el movimiento de las cargas está limitado a una superficie, es posible definir la *densidad superficial de corriente,* **K**. Su dirección es la misma que la del

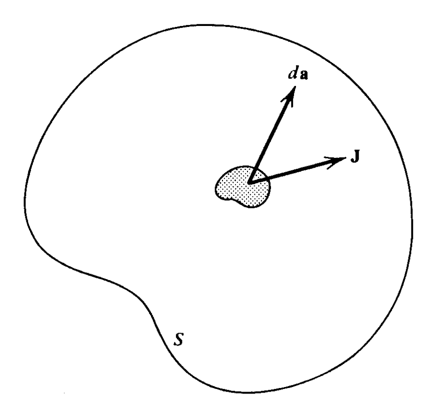


Figura 12-4 Cálculo de la razón total de flujo de carga a través de la superficie S.

flujo de carga y su magnitud, K, se define como la corriente por unidad de *longitud* a través de una línea que descansa sobre la superficie y está colocada perpendicularmente al flujo. La figura 12-5*a* muestra esquemáticamente esta definición. En la figura 12-5*b* se ilustra una situación en la que **K** no está a ángulos rectos con la línea ds; el vector unitario $\hat{\mathbf{t}}$ se dibuja perpendicular a ds sobre la superficie, como **K**, de modo que viene a ser un vector tangencial. Utilizando un método análogo al que se usó para obtener (12-3) y (12-5), se puede llegar a

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} \qquad (12\text{-}7)$$

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{\text{a través } ds} = |\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{t}}|\, ds \qquad (12\text{-}8)$$

donde σ es la densidad superficial de carga.

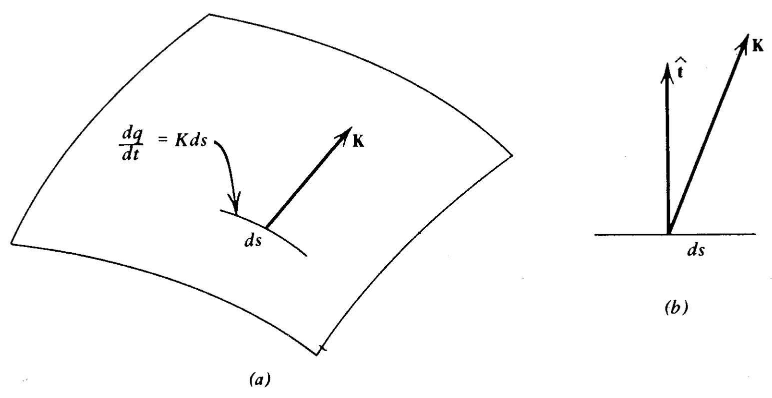


Figura 12-5 (*a*) Definición de la densidad superficial de corriente, **K**. (*b*) **K** no es perpendicular a la línea *ds*.

De manera similar, en el caso de una corriente filamental se obtiene

$$I = \lambda|\mathbf{v}| \tag{12-9}$$

donde λ es la densidad lineal de carga del flujo.

Más adelante se utilizará constantemente un concepto denominado *elemento de corriente,* por lo que resulta conveniente explicarlo aquí. En el caso de la corriente filamental de la figura 12-1, se le define simplemente como el producto Ids. Para obtener una expresión equivalente para el caso de corrientes distribuidas, se considera la figura 12-6*a*, en la que dA es el área de la pequeña sección del filamento. Dado que el flujo es normal

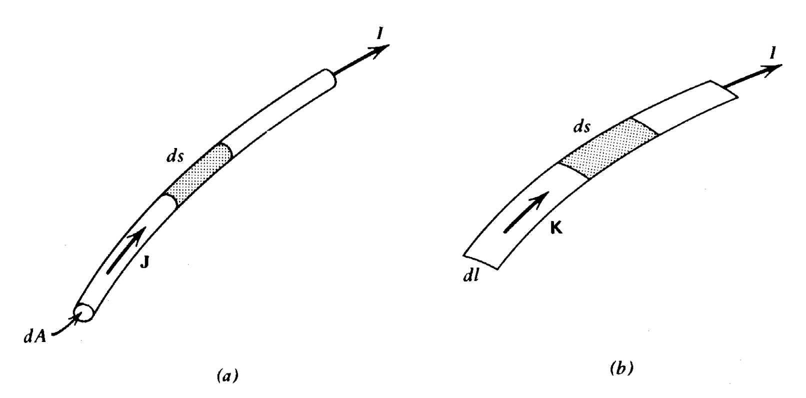


Figura 12-6 Cálculo de los equivalentes a un elemento de corriente.

a esta sección, de (12-5) se observa que $I = JdA$, de modo que $Ids = JdAds = Jd\tau$ donde $d\tau$ es el volumen del elemento que se indica sombreado. Dado que $\mathbf{J}$ y $d\mathbf{s}$ son paralelas en este caso, se obtiene que $Id\mathbf{s} = \mathbf{J}d\tau$. De manera similar, en el caso de una corriente superficial, se obtiene la correspondiente $Id\mathbf{s} = \mathbf{K}da$, donde da es el área $dlds$ del elemento que se muestra en la figura 12-6*b*. De esta manera se tiene ya las siguientes *expresiones equivalentes* para elementos de corriente:

$$Id\mathbf{s} = \mathbf{J}d\tau = \mathbf{K}da \tag{12-10}$$

12-2 La ecuación de continuidad

En la introducción al capítulo 2 se mencionó que todos los experimentos indican que la carga neta se *conserva.* Es posible expresar esta ley fundamental de conservación de la carga en una conveniente manera cuantitativa en función de las cantidades que se acaban de definir. Supóngase que en la figura 12-4 la superficie S es una superficie *cerrada* estacionaria que limita un volumen V. En este caso, la razón total a la que la carga está fluyendo hacia afuera a través de la superficie S debe ser igual a la razón a la que la carga total dentro del volumen V está disminuyendo, dado que el total debe ser constante. Por lo tanto, si Q es la carga total en el volumen V, de (12-6), (2-14) y (1-59) se encuentra que

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, d\tau = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = \int_V \nabla\cdot\mathbf{J}\, d\tau \tag{12-11}$$

Fue posible pasar de la tercera expresión a la cuarta, de la manera indicada, porque V

es un volumen de forma y tamaño constante, de modo que cualesquiera límites de integración relacionados con la integral definida sobre V son independientes del tiempo; además, ρ puede ser una función de la posición además del tiempo. Si se combinan las últimas dos expresiones en (12-11), se obtiene

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d\tau = 0 \tag{12-12}$$

Puesto que la carga debe conservarse en todos los puntos del espacio y no sólo en cierta parte de un volumen dado, la integral debe ser correcta para cualquier volumen arbitrario, incluyendo uno arbitrariamente pequeño situado *en cualquier parte.* Y así, (12-12) sólo puede ser siempre verdadera si el integrando es igual a cero en todos los puntos del espacio, por lo que

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{12-13}$$

A este importante resultado se le llama *ecuación de continuidad* y es una expresión matemática del resultado experimental fundamental de que la carga neta se conserva. Puede hacerse notar aquí que ciertos procesos especiales como la "producción de parejas" y la "aniquilación" de, por decir algo, electrones y positrones no violan este resultado porque la carga *neta* permanece constante, ya que siempre se "crean" o "destruyen" cantidades iguales de carga positiva y negativa en este tipo de fenómenos. Se han encontrado resultados similares en reacciones más complicadas de la física nuclear y de alta energía, en la que se producen grandes cantidades de partículas; en todos los casos se conserva la carga neta.

Si se combina (12-13) con (9-6) y (9-24), se obtiene la condición de frontera que debe satisfacer la densidad de corriente en una superficie de discontinuidad:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{12-14}$$

Desde el punto de vista físico, esta condición expresa que si llega más carga que la que sale de una superficie dada, la carga deberá necesariamente acumularse ahí, y viceversa.

En el caso especial de las corrientes estacionarias, en las que todo es constante en el tiempo, ∂_ρ/∂_t y $\partial_\sigma/\partial_t$ son ambas iguales a cero, por lo que los últimos dos resultados se simplifican así.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{12-15}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = J_{2n} - J_{1n} = 0 \tag{12-16}$$

Dado que toda la carga se conserva, ρ y $\mathbf{J}$ son claramente la densidad de carga y la densidad de corriente totales, respectivamente. Considérense ahora sus partes constitutivas. Para empezar, tómese la carga ligada cuya densidad es ρ_b. Durante el *proceso* de polarización de un material, por lo general las cargas ligadas se moverán, de acuerdo con lo que se vio en la sección 10-1, por lo que es posible definir una densidad de corriente confinada o ligada, $\mathbf{J}_b$. Puesto que el proceso de polarización implica únicamente la separación de cargas ligadas o la reorientación de los dipolos, las cargas ligadas necesariamente se conservan como se ilustra en (10-13). Por lo tanto, debe contarse con una ecuación de continuidad separada para las cargas ligadas, es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_b + \frac{\partial \rho_b}{\partial t} = 0 \tag{12-17}$$

Si, de acuerdo con (10-10) se expresa $\rho_b = - \Delta \cdot \mathbf{P}$, también se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_b - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J}_b - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) = 0$$

y, ya que esto debe ser cierto en todo el espacio, se puede escribir

$$\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \tag{12-18}$$

identificando así la densidad de corriente confinada. A esta corriente muy a menudo se le llama la *densidad de corriente de polarización,* pues es una consecuencia del proceso de polarización.

Dado que, de acuerdo con (12-13) la carga total se conserva y, como se muestra en (12-17) la carga ligada también se conserva, y la carga libre debe necesariamente conservarse también, por lo que se puede escribir que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \tag{12-19}$$

de lo que se desprende que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_{f2} - \mathbf{J}_{f1}) = J_{f2n} - J_{f1n} = - \frac{\partial \sigma_f}{\partial t} \tag{12-20}$$

de manera igual a la que sirvió para obtener (12-14). En el caso especial de las corrientes constantes se tiene que

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0 \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_{f2} - \mathbf{J}_{f1}) = 0 \tag{12-21}$$

Dado que es sobre las cargas libres y por lo tanto sobre las corrientes libres, sobre las que se tiene cierto grado de control, son por lo general las de mayor interés para un estudio como éste y, por lo tanto, el énfasis del mismo recae sobre ellas. Se suele clasificar a las corrientes libres en dos grandes grupos que son las *corrientes de conducción y las corrientes de convección,* aun cuando la distinción entre ambas no se encuentra perfectamente definida. En términos generales, las corrientes de conducción incluyen el movimiento de cargas en conductores, es decir, materiales que por su naturaleza intrínseca ya contienen cargas móviles. El ejemplo más típico de este tipo de materiales es el de los metales, aunque también se incluyen en esta clasificación las corrientes en los semiconductores y en las soluciones electrolíticas. En este último caso, los portadores de carga consisten en iones positivos y negativos que resultan de la formación misma de la solución. Por otro lado, las corrientes de convección se dan por lo general en el movimento de partículas cargadas en corrientes o flujos a través de un espacio que por lo demás se encuentra al vacío, como es el caso de haces de iones, haces electrónicos en bulbos al vacío, partículas cargadas en el viento solar y cosas similares. Esta clasificación también puede incluir el movimiento físico de cuerpos macroscópicos cargados, tales como el movimiento de un pedazo de vidrio cargado positivamente por frotamiento. Es obvio que la clase más impor-

tante aquí viene a ser la de las corrientes de conducción, mismas que se consideran a continuación con mayor detalle.

12-3 Corrientes de conducción

Se puede tomar como un prototipo conveniente para este caso el de la corriente en un alambre metálico. Para una situación completamente *estática,* ya se encontró en (6-1) que $\mathbf{E} = 0$ en el interior de un conductor. Cuando existen cargas en movimiento dentro del alambre, ya no se tiene una situación estática aun cuando *pudiera* ser estacionaria,de modo que es muy posible que $\mathbf{E} \neq 0$ en el conductor. De hecho, el movimiento mismo de las cargas implica la existencia de ciertas fuerzas sobre ellas, lo que implica a su vez que el valor de $\mathbf{E}$ debe ser diferente de cero. En consecuencia, ya no debe esperarse que el conductor represente un volumen equipotencial.

Por medio de la experimentación se encuentra que si se aplica una diferencia de potencial inicial a un conductor, existirán corrientes en él, pero que si después se le deja solo las corrientes terminarán por cesar, con lo que el conductor llega a un estado de equilibrio electrostático cuyas propiedades ya se estudiaron en el capítulo 6. También se encuentra que es posible mantener una corriente constante en un conductor por medio de una diferencia de potencial constante sólo si se le *suministra energía continuamente* al sistema desde una fuente externa. Por tanto, en algún lugar se está realizando un trabajo sobre estas cargas en movimiento cuando circulan por las *trayectorias cerradas* de los circuitos ordinarios. Si se realiza un trabajo total W_q sobre una carga q cuando ésta transita por una trayectoria cerrada, la relación entre ambos recibe el nombre de *fuerza electromotriz,* $\mathcal{E}$, o simplemente, *fem*, de manera que se tiene, de acuerdo con (3-1),

$$\mathcal{E} = \frac{W_q}{q} = \frac{1}{q}\oint_C \mathbf{F}_q \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{12-22}$$

Pero como se sabe de (5-5), el campo eléctrico conservativo con el que se ha estado trabajando no puede realizar trabajo neto sobre la carga en un caso como éste, de modo que en algún lugar del circuito *debe* existir una fuente o fuentes de un *campo eléctrico no conservativo* $\mathbf{E}_{nc}$; así, (12-22) puede expresarse como

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}_{nc} \cdot d\mathbf{s} \tag{12-23}$$

(Dado que el campo eléctrico puede medirse en volts/metros, se observa que la unidad para *fem* es el volt --la misma que para el potencial y para la diferencia de potencial). Más adelante se estudia cómo se pueden producir algunos de estos campos no conservativos, pero baste señalar aquí que la fuente más común y familiar de estos campos es la batería. Una batería realiza trabajo sobre una carga que pasa por ella, y la fuente de esta energía se debe esencialmente a las reacciones químicas de un tipo u otro dentro de la batería; por lo tanto, en cierto sentido una batería es como una bomba que puede ejercer trabajo sobre un fluido y levantarlo, por ejemplo, contra el campo conservativo gravitacional. La batería viene a ser un buen ejemplo de una fuente localizada de campo eléctrico no conservativo, de tal manera que $\mathbf{E}_{nc}$ en (12-23) es diferente de cero únicamente cuando la trayectoria de la carga pasa por la batería y $\mathbf{E}_{nc} = 0$ en todos los demás puntos del circuito. En este caso es posible referirse a la *fem* de la propia fuente como una cantidad específica, cuyo valor puede obtenerse de (12-23) como

$$\mathcal{E}_{\text{fuente}} = \int_{\text{fuente}} \mathbf{E}_{nc} \cdot d\mathbf{s} \tag{12-24}$$

Por lo tanto, y para simplificar, el resto de este estudio se restringirá a aquellas regiones conductoras en las que no existan campos eléctricos no conservativos, de modo que se pueda expresar $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ y por tanto $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, mientras se esté *fuera* de las baterías.

Dado que **E** ejercerá fuerzas sobre las cargas en movimiento, debe existir cierta relación funcional entre $\mathbf{J}_f$ y **E**, es decir, debe poder escribirse algo como $\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_f(\mathbf{E})$. Por el momento se tomará como cierto que $\mathbf{J}_f(0) = 0$, quedando así excluidos de estas consideraciones los superconductores. La relación entre $\mathbf{J}_f$ y **E** puede llegar a ser muy complicada dependiendo del material de que se trate. Se trató con una situación muy similar en la sección 10-6 cuando se buscaba una relación entre **P** y **E** para los dieléctricos, y fue posible diseñar un esquema de clasificación similar. Sin embargo, aquí se pasará directamente al caso de un conductor *isotrópico lineal,* es decir, se supondrá que es posible escribir

$$\mathbf{J}_f = \sigma\mathbf{E} \tag{12-25}$$

donde el factor de proporcionalidad σ recibe el nombre de *conductividad.* (Esta es una notación estándar y no debe provocar confusiones; en aquellos pocos casos en los que se presente una densidad superficial de carga junto con una conductividad en la misma expresión, se utilizará el símbolo σ_{ch} para la densidad de carga). La ecuación 12-25 viene a ser otro ejemplo de ecuación constitutiva, como en el caso de $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, y únicamente la experimentación podrá decidir si resulta ser apropiada para un material dado. Se puede observar en (12-25) que σ es independiente del campo **E**, aunque puede ser función de la posición y de otras variables tales como la temperatura. La unidad de σ recibe el nombre de 1 $(\text{ohm-metro})^{-1}$ y, dado que $\mathbf{J}_f$ está en ampere/metro^2 y que **E** se expresa en volt/metro, es fácil encontrar que 1 ohm = 1 volt/ampere.

Cuando se puede aplicar (12-25), la condición de frontera (12-21) para una corriente estacionaria puede expresarse completamente en función de **E**:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\sigma_2\mathbf{E}_2 - \sigma_1\mathbf{E}_1) = 0 \tag{12-26}$$

Seguirá siendo cierto que $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$, ya que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ en todas las regiones bajo consideración. De esta manera se tiene una situación similar a la que se encontró para los dieléctricos en la figura 10-14, en la que las líneas de **E** sufren una refracción al cruzar la superficie limitante entre dos medios de diferente conductividad.

Si el material es también homogéneo, σ será constante, es decir, independiente de la posición. A este respecto, σ viene a ser una característica del material y debe encontrarse experimentalmente o calcularse por medio de teorías sobre las propiedades atómicas de la materia que se estudian en otras ramas de la física; por lo que aquí concierne, se le toma como una cantidad dada. No todos los materiales son lineales, isotrópicos y homogéneos, pero las suposiciones hechas en (12-25) con $\sigma = \text{const.}$ funcionan muy bien para los metales y para las soluciones de electrólitos, por ejemplo.

Si se tiene un conductor i.h.l. *y además* corrientes estacionarias, se pueden combinar (12-21), (12-25), (5-3) y (1-45) para obtener $\nabla \cdot \mathbf{J}_f = 0 = \nabla \cdot (\sigma\mathbf{E}) = \sigma\nabla \cdot \mathbf{E} = -\sigma\nabla^2\phi$. En otras palabras, $\nabla^2\phi = 0$ y el potencial aún satisface la ecuación de Laplace. Este resultado viene a proporcionar un método *experimental* para resolver la ecuación de Laplace fijando los valores de frontera de ϕ requeridos en las fronteras de la región conductora, pues entonces, midiendo la magnitud y dirección de la densidad de corriente $\mathbf{J}_f$, se pueden encontrar los valores de **E** a partir de $\mathbf{E} = \mathbf{J}_f/\sigma$.

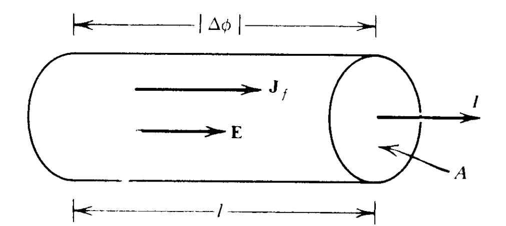


Figura 12-7 Porción de un conductor que conduce una corriente total I.

La relación $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$ para un conductor i.h.l. es equivalente a la relación empírica macroscópica que se conoce como la *ley de Ohm* y, de hecho, a menudo recibe el nombre de la versión microscópica de la ley de Ohm. Puede entenderse el porqué de esto si se analiza la situación que se muestra en la figura 12-7. Se trata de una porción de un conductor uniforme de longitud l y sección A que lleva una corriente total I. Si $|\Delta\phi|$ es la magnitud de la diferencia de potencial entre sus extremos, entonces la magnitud de $\mathbf{E} = |\Delta\phi|/l$, de acuerdo con (5-3) y (1-38), ya que $\nabla\phi$ es constante en esta región de dimensiones y corriente constante. De manera similar, la densidad de corriente es $\mathbf{J}_f = I/A$, de acuerdo con (12-6) si se supone que la corriente está distribuida uniformemente en toda la sección, lo que viene a ser una aproximación muy exacta. Al sustituir estos valores en (12-25) se obtiene que $I/A = \sigma \; \Delta\phi|/l$, o sea, $I = (\sigma A/l) \, |\Delta\phi|$. Así se logra una relación entre estas cantidades macroscópicas y se observa que la corriente es proporcional a la diferencia de potencial (o a la inversa). Esta relación generalmente se expresa en la forma

$$I = \frac{|\Delta\phi|}{R} \tag{12-27}$$

donde el factor de proporcionalidad es

$$R = \frac{l}{\sigma A} \tag{12-28}$$

La ecuación 12-27 viene a ser el resultado empírico descubierto por Ohm y conocido como la ley de Ohm, mientras que a la cantidad R se le llama *resistencia* y se mide en ohms (es decir, volts/amperes). Se ha demostrado así la equivalencia entre (12-25) y (12-27) para un conductor i.h.l. y, al mismo tiempo, se ha obtenido (12-28) como un método para calcular la resistencia. Al recíproco de la conductividad, $1/\sigma$, se le llama *resistividad* y generalmente se le asigna el símbolo ρ.

Como se puede apreciar en la figura, $\mathbf{J}_f$ está dirigido longitudinalmente a lo largo de este conductor uniforme, como es el caso de $\mathbf{E}$, ya que son paralelos entre sí. Así, en la superficie, $\mathbf{E}$ es tangencial, y ya que según (9-21) las componentes tangenciales de $\mathbf{E}$ son continuas, existirá un campo tangencial en el *exterior* del conductor, que está dado por $\mathbf{E} = \mathbf{J}_f/\sigma$. Esto representa un marcado contraste con el caso estático, en el que no solamente $\mathbf{E} = 0$ en el interior del conductor, sino que además era necesariamente normal a su superficie, tal como se vio en (6-2) y en la figura 6-1*b*.

Para concluir esta sección se utilizan algunos de los resultados anteriores para obtener una relación interesante e inesperada.

Ejemplo

Relación entre resistencia y capacitancia. Supóngase que se tienen dos conductores de la misma forma. Existen dos maneras en que se les puede utilizar.

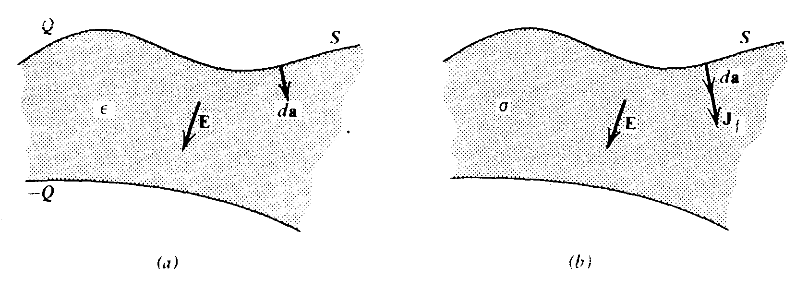


Figura 12-8 Dos conductores usados (*a*) como un capacitor y, (*b*) como una resistencia.

1. Como un capacitor —supóngase que se llena la región entre estos dos conductores con un dieléctrico i.h.l. de capacidad inductiva específica ϵ, y que se colocan cargas iguales y opuestas en ellos como se muestra en la figura 12-8*a*. Se desea encontrar a la capacitancia. De acuerdo con (6-38), se sabe que es posible encontrar la diferencia de potencial evaluando la integral

$$\Delta\phi = \int_{+}^{-} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{12-29}$$

sobre cualquier trayectoria conveniente entre las placas. Se puede expresar la carga libre Q en la placa positiva como una integral sobre su superficie S:

$$Q = \int_S \sigma_f da = \int_S \epsilon \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \epsilon \int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \tag{12-30}$$

usando (2-16), (10-56) y (6-1). Al sustituir esto en (6-38) se tiene que la capacitancia puede expresarse como

$$C = \frac{\epsilon \int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}}{\int_{+}^{-} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}} \tag{12-31}$$

2. Como una resistencia —esta vez no se llena el espacio entre las placas con un dieléctrico, sino con un conductor i.h.l. de conductividad σ, tal como se ilustra en la figura 12-8*b*. Aquí también se mantiene la misma diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre las placas, haciendo que cada una de ellas tenga el *mismo* potencial que antes. Como se vio antes, ϕ satisface la ecuación de Laplace bajo estas circunstancias, y dado que las condiciones de frontera son exactamente las mismas en ambos casos, $\phi(\mathbf{r})$ será idéntico para los dos, de acuerdo con el teorema de unicidad de la sección 11-1. En otras palabras, (12-29) representa aquí también la diferencia de potencial con exactamente los mismos valores de $\mathbf{E}$ para cada punto de la trayectoria de integración. La corriente total, I, que pasa entre las placas puede expresarse como la integral de superficie sobre la misma placa superior, por medio de (12-6) y (12-25); el resultado es

$$I = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a} = \int_S \sigma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \sigma \int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} \tag{12-32}$$

Cuando se sustituyen (12-29) y (12-32) en (12-27) se encuentra que la resistencia de este sistema es

$$\frac{1}{R} = \frac{\sigma \int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}}{\int_{+}^{-} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}} \tag{12-33}$$

Por comparación entre (12-31) y (12-33) se puede observar que $l/R\sigma = C/\epsilon$, o sea,

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} \tag{12-34}$$

lo que viene a demostrar que estas dos propiedades del sistema no son independientes entre sí, sino que, de hecho, se encuentran relacionadas de esta manera simple. [La relación (12-34) se asemeja a un típico resultado de la termodinámica, ya que expresa una relación entre propiedades macroscópicas de un sistema sin dar una indicación del valor absoluto de ninguna de ellas]. Este resultado tan general puede también ser usado como una manera de medir C indirectamente, puesto que las mediciones de resistencia son comparativamente más fáciles de realizar por medio de un amperímetro y un voltímetro, mientras que la medición directa electrostática de C es, por lo general, algo bastante más complicado.

12-4 Relaciones de energía

En la sección anterior se mencionaba el hecho experimental de que solamente se puede mantener una corriente constante en un conductor si el sistema está recibiendo una alimentación constante de energía. Pero en una situación estacionaria, en la que todas las cosas permanecen constantes en el tiempo, no puede haber tampoco una acumulación de energía eléctrica. Por lo tanto, todo lo que entra al sistema como energía eléctrica debe ser convertido a otra forma de energía y, de hecho, se observa que la energía eléctrica consumida se manifiesta en la forma de calor en el cuerpo del conductor. A continuación se expresa este hecho en forma cuantitativa. Ya se vio en (5-45) y (5-46) que el trabajo realizado *por el campo eléctrico* sobre una carga Δq es $\Delta w = -\Delta q \, \Delta\phi$ donde $\Delta\phi$ es el cambio en el potencial. De esta manera se puede obtener la razón a la que se realiza trabajo eléctrico en el sistema, como $\Delta w/\Delta t = -(\Delta q/\Delta t)\,\Delta\phi = -I\,\Delta\phi$, de acuerdo con (12-1), ya que se tiene una corriente constante. En el caso estacionario, ésta también debe ser la razón de conversión de energía en calor. Si w es la razón de producción de calor por unidad de volumen y se utilizan las dimensiones usadas en la figura 12-7, en la que el volumen es AL, se obtiene que

$$w = \frac{(\Delta W/\Delta t)}{Al} = \left(\frac{I}{A}\right)\left(-\frac{\Delta\phi}{l}\right) = J_f E$$

Dado que $\mathbf{J}_f$ y $\mathbf{E}$ son paralelos, esto mismo también puede expresarse como

$$w = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{J}_f^2}{\sigma} \tag{12-35}$$

por medio de (12-25). A la cantidad w también se le suele dar el nombre de potencia "disipada" por unidad de volumen. Ya que la unidad de potencia es 1 watt = 1 joule/segundo, w se mide en watts/metro^3.

12-5 Punto de vista microscópico

El resultado que se acaba de obtener es perfectamente general, ya que se derivó directamente de las leyes macroscópicas de la conservación de la energía y del significado de los conceptos de corriente y diferencia de potencial. Sin embargo, su origen puede

parecer hasta cierto punto oscuro, por lo que se impone una cierta "explicación" en función del comportamiento microscópico promedio de las cargas en movimiento dentro del conductor. En relación a la pregunta del "por qué" existe producción de calor, se encuentra la de "por qué" existe resistencia, para empezar. Aunque en el apéndice B se tratan estas preguntas de una manera mucho más completa, es relativamente sencillo obtener una respuesta semicuantitativa para ambas preguntas, a partir de una imagen microscópica de la situación.

Antes que nada, si el campo eléctrico produjera la única fuerza que actuara sobre la carga móvil, ésta tendría una aceleración constante dada por $\mathbf{a} = \mathbf{F}_q/m = q\mathbf{E}/m$, siendo m la masa del portador de la carga. Pero si esto fuera cierto, la consecuencia sería que la velocidad aumentaría indefinidamente, cosa que no ocurre. Una corriente constante implica, según (12-3), una velocidad constante y por ello una aceleración *cero*, es decir, *una* fuerza neta igual a cero. Por lo tanto, por lo menos en promedio, la fuerza eléctrica que apunta en la dirección del movimiento de las cargas debe estar balanceada por alguna otra fuerza en sentido contrario al del movimiento. Para encontrar el origen de esta otra fuerza considérese el caso específico de un metal en el que las cargas libres no son sino electrones de carga $-e$ cada uno de ellos. Se mueven en el metal, no en un vacío completo sino entre los iones del propio metal, los que a su vez se encuentran dispuestos conforme al arreglo regular del cristal. Es obvio que los electrones pueden chocar con estos iones (y entre ellos mismos también) y que en cada colisión su velocidad cambia. Entre colisión y colisión, el electrón será acelerado por el campo eléctrico, pero durante el choque el resultado de este proceso sufre un cambio brusco. De esta manera se puede concluir que son precisamente estas colisiones las que constituyen el origen de esa otra fuerza, y lo que realmente interesa viene a ser el efecto *promedio* de este fenómeno. Por analogía con los efectos similares de la mecánica en los cuales hay "fricción", se tratará de describir un efecto total de los choques que dé como resultado una fuerza proporcional a la velocidad y dirigida en sentido opuesto; así, la fuerza mecánica se puede expresar como $\mathbf{F}_{q,m} = -\xi\mathbf{v}$, siendo ξ un factor de proporcionalidad adecuado. La fuerza neta debe ser la suma de las fuerzas eléctrica y mecánica:

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = m\mathbf{a} = -e\mathbf{E} - \xi\mathbf{v} \qquad (12\text{-}36)$$

Esta ecuación de movimiento permite la situación para la que $\mathbf{a} = 0$; de (12-36) se desprende entonces que la velocidad, $\mathbf{v}d$, sería constante:

$$\mathbf{v}_d = -\frac{e\mathbf{E}}{\xi} \qquad (12\text{-}37)$$

A esta velocidad se le suele denominar *velocidad de deriva;* en mecánica se le conoce como *velocidad terminal,* por ejemplo, en el caso de un objeto en caída vertical cerca de la superficie de la tierra y que está sujeto a la resistencia viscosa del aire. Si n es el número de electrones por unidad de volumen, la densidad de carga libre será $\rho_f = n(-2)$, y al sustituir esto y (12-37) en (12-3), se puede encontrar el valor de la corriente, que no es sino

$$\mathbf{J}_f = \rho_f \mathbf{v}_d = \left(\frac{ne^2}{\xi}\right)\mathbf{E} \qquad (12\text{-}38)$$

Esto viene a ser exactamente de la forma de la ley de Ohm en (12-25) y, por comparación, se puede observar que no sólo se ha logrado obtener su forma general a partir de este

análisis microscópico simplificado, sino que además se ha logrado obtener una expresión para la conductividad:

$$\sigma = \frac{ne^2}{\xi} \tag{12-39}$$

Cualitativamente, este resultado tiene propiedades muy razonables. Es proporcional a la densidad numérica de portadores de carga e inversamente proporcional al término "friccional" ξ, de modo que cuanto menor sea el efecto de las colisiones, mayor será la corriente para un **E** dado, y viceversa. Se puede ver también que es proporcional al cuadrado de la carga, de manera que en realidad es independiente del signo de la misma. No es posible hacer más avances en el cálculo de σ sin antes valorar ξ. Sin embargo, para ello se requiere de las teorías detalladas de la física del estado sólido y del análisis de colisiones, temas que no son competencia de este texto. Por otro lado, es posible utilizar valores *medidos* de σ para evaluar el factor ξ.

Se ha visto así cómo el efecto global de las colisiones puede explicar el valor *finito* de la corriente. En forma cualitativa, se puede también describir cómo es que las colisiones explican también la conversión de energía eléctrica en calor, según (12-35). Una colisión no solamente cambia la dirección de la velocidad de un electrón, sino también su magnitud, quedando alteradas también la energía cinética tanto del electrón como del ion golpeado. Existe así una transferencia de energía del movimiento *ordenado* del electrón, provocado por el campo eléctrico, al movimiento *desordenado* del ion constituyente del cristal, que aumenta sus vibraciones al azar. Por medio de la termodinámica se puede saber que estos procesos son irreversibles, de manera que el efecto neto de las colisiones será incrementar la energía desordenada del cristal metálico. Pero es precisamente este aumento en el movimiento desordenado lo que se asocia con la producción de *calor* y, como ya se ha mencionado, es justamente esto lo que se observa, por lo que se puede concluir que esta producción de calor es también una consecuencia necesaria de los mismos procesos microscópicos que dan como resultado una conductividad finita.

12-6 La consecución del equilibrio electrostático

De acuerdo con lo visto en el capítulo 6, si se coloca una cierta cantidad de carga libre en o sobre un conductor, por lo general el sistema no se encontrará en estado de equilibrio, sino que deberá reajustarse por sí solo mediante corrientes, hasta lograr un estado final de equilibrio electrostático en el que toda la carga se localice en la superficie del conductor y éste venga a constituir un volumen equipotencial. Sin embargo, hasta ahora no se conocen los detalles de este proceso ni el tiempo que le toma realizarlo en un caso representativo. Algunos de los resultados recién obtenidos pueden usarse para tener alguna idea de la naturaleza de este proceso; se trata de una situación no estacionaria, ya que las corrientes terminarán por valer cero.

Considérese un material conductor i.h.l. para el que se pueda escribir que $\mathbf{J}_f = \sigma\,\mathbf{E}$ y $\mathbf{D} = \epsilon\,\mathbf{E}$. Dado que la densidad de carga libre puede variar con el tiempo, se utilizan (12-19) y las relaciones obtenidas antes, junto con (10-41), para obtener una ecuación que únicamente incluye ρ_f:

$$-\left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t}\right) = \nabla \cdot \mathbf{J}_f = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\sigma \mathbf{D}}{\epsilon}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\sigma}{\epsilon}\rho_f$$

de manera que ρ_f satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\rho_f \tag{12-40}$$

cuya solución es

$$\rho_f(t) = \rho_f(0)e^{-\sigma t/\epsilon} = \rho_f(0)e^{-t/\tau} \tag{12-41}$$

siendo $\tau = \epsilon/\sigma$ y ρ_f (0) el valor inicial. Este resultado implica que la densidad de carga libre en un conductor i.h.l. ¡solamente puede disminuir! [Claro que sería posible hacerla aumentar, pero solamente mediante otros procesos distintos al de conducción descrito por $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$, tales como, por ejemplo, inyectar un pulso de electrones que lleguen al reposo en el cuerpo del material. Sin embargo, al terminar el pulso la densidad de carga producida empezará a disminuir exponencialmente de acuerdo con (12-41)].

Así, mientras los procesos de conducción sean los únicos medios para obtener el equilibrio ($\rho_f = 0$), se puede observar que la manera de lograrlo será por medio de una disminución exponencial. La densidad de carga disminuirá por un factor $1/e$ en un tiempo $\tau = \epsilon/\sigma$. A este comportamiento en particular se le suele llamar *relajación;* por eso, a τ se le llama *tiempo de relajación* y su valor da una idea del tiempo requerido para lograr el equilibrio. Es posible obtener su valor para un metal característico. Para la mayoría de los metales $\epsilon \simeq \epsilon_0$ y para el cobre $\sigma \simeq 5.8 \times 10^7$ /ohm-metro, de modo que $\sigma = \epsilon/\sigma \simeq (8.85 \times 10^{-12})/(5.8 \times 10^7) \approx 10^{-19}$ segundos. Esto es un tiempo muy pequeño. Por ello, para el caso de muy buenos conductores, está bien tomar $\rho_f = 0$ en el interior y suponer que toda la carga libre se encuentra en la superficie, aun en el caso de una situación no estacionaria. (Se utilizó para σ su valor de estado estacionario o de frecuencia cero, para el cálculo anterior. Como se verá más adelante, la propia conductividad es una función de la frecuencia, por lo que este resultado viene a ser una subestimación de τ hasta por un factor de 10^5 ; sin embargo, 10^{-14} segundos !sigue siendo un tiempo muy pequeño!).

Si las cargas ligadas de un dieléctrico no se encuentran en la distribución de equilibrio descrita por todos los resultados del capítulo 10, ellas también buscarán el equilibrio por medio de una relajación. Sin embargo, en este caso la conducción viene a ser un mecanismo inexistente o despreciable, por lo que los procesos de relajación se basan primordialmente en ciertos tipos de agitación térmica. Este es en sí un campo de estudio separado y extenso, por lo que no es posible considerarlo aquí en detalle, y debe bastar la observación de que tales fenómenos existen.

Ejercicios

12-1 En un momento dado, cierto sistema tiene una densidad de corriente dada por $\mathbf{J} = A\,(x^3\,\mathbf{x} + y^3\,\mathbf{y} + z^3\mathbf{z})$, siendo A una constante positiva. (*a*) ¿Cuáles son las unidades de A? (*b*) ¿Cuál es en ese instante la razón de cambio de la densidad de carga en el punto (2, – 1, 4)? (*c*) Considérese la carga total Q contenida en una esfera de radio a con centro en el origen. ¿Con qué rapidez cambia Q en ese instante? ¿Aumenta o disminuye Q?

12-2 Verificar (12-7), (12-8) y (12-9).

12-3 Una carga total Q se distribuye uniformemente en una esfera de radio a. La esfera empieza a girar alrededor de uno de sus diámetros con una velocidad angular constante ω. Supóngase que la distribución de cargas no se afecta con la rotación; encontrar $\mathbf{J}$ en

todos los puntos dentro de la esfera. (Expresarlo en coordenadas esféricas con el eje polar en coincidencia con el eje de rotación). Encontrar la corriente total que pasa por un semicírculo de radio a fijo en el espacio con su base sobre el eje de rotación.

12.4 Una esfera dieléctrica de radio a está polarizada uniformemente. Se le hace girar alrededor de uno de sus diámetros paralelo a **P** a una velocidad angular constante ω. Suponiendo que la rotación no afecta a **P**, encontrar las corrientes. Graficar el resultado contra las coordenadas apropiadas. Encontrar la corriente total que pasa por un semicírculo de radio a fijo en el espacio con su base sobre el eje de rotación.

12-5 Una esfera de radio a y centro en el origen está hecha de un material conductor i.h.l. El potencial en su superficie se mantiene a los valores dados por $\phi_0 \cos\theta$, siendo $\phi_0 =$ const., en coordenadas esféricas. Encontrar la densidad de corriente libre $\mathbf{J}_f$ en todos los puntos de su interior.

12-6 Dos "resistores" de resistencias R_1 y R_2 se conectan entre sí y a las terminales T y T' por medio de conductores de resistencia despreciable, tal como se muestra en la figura 12-9a; esta es una conexión "en serie". Si ahora se aplica una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre las terminales, demostrar que esta combinación es equivalente a un solo resistor de resistencia $R_s = R_1 + R_2$. De manera similar, demostrar que

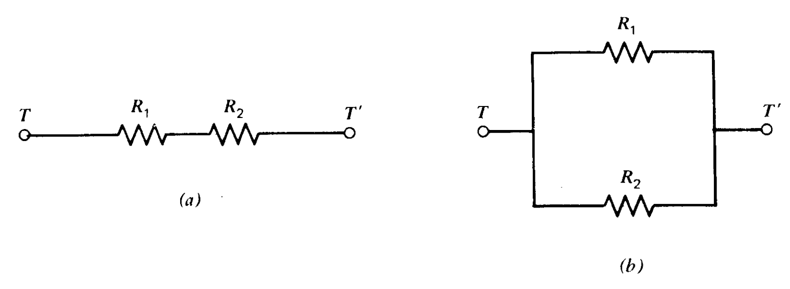


Figura 12-9 (a) Resistores en serie. (b) Resistores en paralelo.

la resistencia equivalente de la conexión "en paralelo" que se muestra en (b) es igual a $1/R_p = (1/R_1) + (1/R_2)$.

12-7 Un cable recto y largo conduce una corriente constante I. La corriente se distribuye uniformemente en la sección circular de radio a. Considérese una longitud l del cable que tiene una resistencia R. Encontrar el campo eléctrico en la región al vacío justamente afuera del cable, y expresarlo en función de las cantidades dadas. (En total, esta porción del cable es neutral).

12-8 Considérese un dieléctrico cuya conductividad es diferente de cero. (Por lo general, su conductividad será pequeña en comparación con la de un metal, es decir, que es un "mal conductor"). Supóngase que el dieléctrico es lineal e isotrópico tanto en cuanto a sus propiedades dieléctricas como en cuanto a las conductoras. Supóngase que las corrientes son libres y estacionarias. (a) Si el material no es homogéneo, demostrar que existirá una densidad volumétrica de carga libre en el material dada por

$$\rho_f = \mathbf{J}_f \cdot \nabla\left(\frac{\epsilon}{\sigma}\right) \tag{12-42}$$

(b) Demostrar que en la superficie de discontinuidad entre ambos materiales existirá una densidad superficial de carga, dada por

$$\sigma_{fch} = J_n\left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}\right) \tag{12-43}$$

12-9 Dos grandes placas planas paralelas conductoras se encuentran separadas por una distancia d. La región entre ellas se llena con dos materiales i.h.l. cuya superficie de separación es un plano paralelo a las placas. El primer material (con propiedades σ_1 y ϵ_1) tiene un grosor x, mientras que el segundo (σ_2, ϵ_2) mide $d - x$. Existe una corriente estacionaria entre las placas que se mantienen a potenciales constantes ϕ_1 y ϕ_2. Encontrar el potencial en la superficie de separación de los dos medios y la densidad superficial de carga libre allí.

12-10 La región entre los cilindros coaxiales de la figura 6-12 se llena con un material conductor i.h.l. Si se aplica una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre los cilindros, encontrar la corriente entre los cilindros para una longitud L del sistema.

12-11 Considérese una placa infinita de dieléctrico conductor de grueso d y caras planas paralelas. Dos cilindros metálicos, cada uno de radio A, tienen sus ejes paralelos y a una distancia D de separación. Estos cilindros atraviesan el dieléctrico con sus ejes normales a las caras planas paralelas. Si se aplica una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre estos "electrodos" metálicos, encontrar la corriente I que pasará de uno al otro.

12-12 Un cable muy largo de radio a se cuelga cerca del fondo de un lago muy profundo. Supóngase que el largo tiene un fondo plano que es muy buen conductor. El cable se encuentra paralelo al fondo y a una altura h sobre él. Si la conductividad del agua es σ, encuentra la resistencia entre el cable y el fondo para una longitud L del sistema.

12-13 Demostrar que cuando se integra (12-35) sobre el volumen total de un conductor uniforme, la razón ttotal de producción de calor puede expresarse como $I^2 R$.

12-14 Demostrar que, cuando un circuito completo incluye una fuente localizada de fem. ξ, la corriente de estado estacionario, I, estará dada por $I = \xi/R$, siendo R la resistencia total del circuito. (Véase el ejercicio anterior).

12-15 Demostrar por integración directa que cuando un capacitor se carga por medio de una batería de fem ξ, la cantidad de calor desarrollado en el circuito es igual a la energía electrostática final del capacitor.

12-16 Dos placas metálicas cuadradas de 0.1 metro por lado son paralelas entre sí y están separadas por una distancia de 10^{-2} metros. La región entre las placas se llena con agua de conductividad 10^{-3} (ohm-metro)$^{-1}$. Si se mantiene una diferencia de potencial de 150 volts entre las placas, encontrar la razón de cambio de la temperatura del agua. (Despréciense los efectos de borde y las pérdidas de calor hacia las regiones fuera del agua).

12-17 Un cable de cobre de 2.5 milímetros de diámetro conduce una corriente de 10 amperes. Supóngase que existe un electrón por cada átomo de cobre; encontrar la velocidad de deriva. [El cobre tiene una densidad de 8.92 gramos/centímetro^3, un peso atómico de 63.5 gramos/mol y el número de Avogadro es 6.02×10^{23}/ml.].

12-18 En la sección 12-5 se discutió un esquema microscópico que asociaba el concepto de la resistencia de un metal a las colisiones que tienen lugar entre los electrones móviles y los iones metálicos. Desde este punto de vista, ¿Cuál sería el efecto sobre la resistencia si se aumenta la temperatura del conductor?

12-19 Verificar que ϵ/σ tiene dimensiones de tiempo.

12-20 Encontrar el tiempo de relajación para un vidrio de resistividad 10^{12} ohm-metros y una capacidad inductiva relativa de 4.0.

12-21 Se llena la región entre las placas de un capacitor con un material de conductividad finita para dar una resistencia resultante total igual a R. Demostrar que la carga *sobre las placas* disminuirá a $1/e$ de su valor inicial en un tiempo RC, siendo C la capacitancia.

Capítulo 13
Ley de Ampere

Es interesante observar que el tema general que hoy se conoce como *magnetismo* se inició también con la observación de que ciertos materiales naturales podían atraer otros materiales. Se supone que el nombre proviene de una cierta asociación de estos objetos con la antigua ciudad de Magnesia en el Asia Menor, ya que podían encontrarse en sus cercanías. Por muchos siglos se pensó que este tema era independiente de la electricidad. Sin embargo, durante ese tiempo la gente sí aprendió acerca de las propiedades magnéticas de la Tierra y se inventó la brújula. El primer indicio de una posible conexión entre la electricidad y el magnetismo ocurrió en 1819, cuando Oersted descubrió por accidente que una *corriente eléctrica* podía ejercer ciertas fuerzas sobre una *brújula magnética.* Ampere supo de la observación de Oersted y rápidamente encontró que una corriente eléctrica también ejerce fuerzas sobre otra corriente eléctrica. Inició un estudio sistemático de estas fuerzas y por medio de una serie de ingeniosos y elegantes experimentos durante el período de 1820 a 1825 pudo deducir la forma de la ley básica de la fuerza entre corrientes eléctricas. Unos 50 años después, Maxwell describió el trabajo de Ampere como "uno de los logros más brillantes de la ciencia."

Estas fuerzas entre corrientes estacionarias constituyen nuestro punto de partida, quedando para un capítulo posterior la descripción de los materiales magnéticos y el efecto de los materiales magnéticos y el efecto de materia en general. Dado que están implicadas las cargas no se encuentran en reposo sino en movimiento. Sin embargo, como ya se vio en el capítulo anterior, las cargas se mueven a velocidad promedio constante en las *corrientes estacionarias.* Bajo estas circunstancias, las fuerzas implicadas también serán constantes con respecto al tiempo; es ésta la justificacción para llamar a este tema *magnetostática.*

13-1 Fuerza entre dos circuitos completos

Al introducir la ley de Coulomb en la sección 2-2 se manejaron cargas puntuales individuales. Por analogía, sería, de esperarse que aquí también se consideraran "pequeños pedazos" de corrientes para estudiar las fuerzas entre ellos. Lo más natural sería tomar un elemento de corrientes según (12-10), ya que representa tanto la mgnitud de la corriente como su dirección local. Sin embargo, a nivel de laboratorio es necesario manejar circuitos *completamente cerrados* de corriente constante, por lo que es necesario tomar la *fuerza total* entre

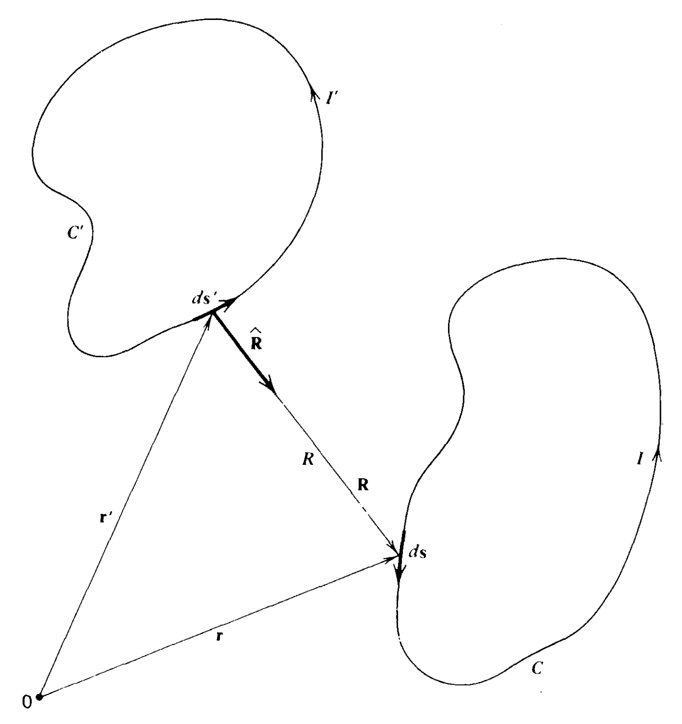


Figura 13-1 Relaciones entre los circuitos utilizados para enunciar la ley de Ampere.

dos circuitos completos como la ley experimental fundamental. Una vez logrado esto, se podrá, en la medida de lo posible, deducir una fórmula que describa la fuerza entre los elementos de corriente hipotéticos.

Considérense dos circuitos completos ideales, C y C', que conducen corrientes constantes filamentales, I e I', respectivamente. La figura 13-1 ilustra esta situación. Lo que se desea obtener es la fuerza total que C ejerce sobre C, denotada $\mathbf{F}_{C'} \to C$. Los circuitos son ideales porque el diagrama no considera las baterías. Supóngase que las baterías necesarias se encuentran situadas en alguna posición lejana y que los cables conductores que las unen a los circuitos se encuentran perfectamente entrelazados, ya que de acuerdo con uno de los primeros experimentos de Ampere, dos corrientes contrarias que se encuentran muy cerca entre sí no producen ningún efecto sobre otra corriente. A pesar de lo que se expuso un poco más arriba, el resultado de la fuerza total se expresa en función de los elementos de corriente $I\,d\mathbf{s}$ y $I'd\mathbf{s}'$ que se muestran; su localización con respecto a un origen arbitrario está dada por sus vectores de posición $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$. y su vector de posición relativa se define, como siempre, como $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, es decir, que se dibuja desde el "punto fuente" al "punto de campo". (Puede ser de utilidad comparar la figura 13-1 con la figura 13-1 con la figura 2-2.) Se supone que existe vacío en toda la región no ocupada por la corrientes.

La ley experimental básica que da la fuerza total que C' ejerce sobre C puede escribirse como

$$\mathbf{F}_{C'\to C} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I\,d\mathbf{s} \times (I'd\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}})}{R^2} \qquad (13\text{-}1)$$

y recibe el nombre de *ley de Ampere.* Nótese que su forma incluye una doble integral de línea, cada una de las cuales se toma sobre el circuito correspondiente. Desde luego, pare-

ce increíble que una fórmula de la generalidad implicada por (13-1) pueda haberse deducido de unos cuantos experimentos con circuitos de forma simple, según los realizó Ampere. La ecuación 13-1 representa evidentemente, una generalización de resultados que se han encontrado para una gran variedad de casos particulares.

El factor $\mu_0/4\pi$ que aparece en (13-1) es una constante de proporcionalidad cuyo valor numérico depende del sistema de unidades que se esté empleando; se puede observar que las dimensiones de μ_0 son de fuerza/(corriente)^2. En el SI que se utiliza aquí (unidades MKSA), μ_0 se *define* precisamente como

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi\times 10^{-7}\,\text{newton}/(\text{ampere})^2\\ &= 4\pi\times 10^{-7}\,\text{henry}/\text{metro}\end{aligned} \tag{13-2}$$

A esta constante μ_0 se le denomina la *permeabilidad del espacio libre* y generalmente se le expresa en la segunda de las formas; al comparar ambas formas se observa que 1 henry = 1 joule/ (ampere)^2. Dado que el newton y el metro ya se han determinado por otras definiciones independientes, se puede observar que esta definición de μ_0 viene a fijar la unidad de corriente, que es lo único que no está definido en (13-1). Así, (13-2) es esencialmente la definición del ampere y, por lo tanto, del coulomb.

Si existen diferentes circuitos que puedan interactuar con C, la fuerza ejercida por cada uno de ellos estará dada por expresiones similares a (13-1), siendo la fuerza total sobre C, la suma vectorial de ellas;

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_{\text{total sobre}\,C} = \sum_{C'} \mathbf{F}_{C'\to C} \tag{13-3}$$

Aunque es posible generalizar (13-1) y (13-3) para incluir corrientes distribuidas, con la ayuda de (13-10), resulta conveniente por ahora restringir el asunto a corrientes filamentales excusivamente.

El integrando de (13-1) es bastante más complicado desde el punto de vista direccional que en el caso de la ley de Coulomb expresada, por ejemplo, por (2-15), ya que el integrando depende de la orientación relativa de las tres cantidades $id\mathbf{s}$, $I'd\mathbf{s}'$ y $\mathbf{R}$. Nótese también que las cantidades relativas a los dos circuitos aparecen en el integrando en forma no simétrica. Este hecho puede ser preocupante, y cabe la duda de que si se intercambian los papeles de C y C' la fuerza que C ejerce sobre C' podría no ser igual y opuesta a la que C' ejerce sobre C, como sería de esperarse de acuerdo con la tercera ley de Newton aplicada a estos circuitos completos *macroscópicos*. Sin embargo, se puede ver que esta falta de simetría es sólo aparente, para lo cual basta expresar el mismo resultado de otra manera. Usando (1-30, (1-143) y (1-38) se encuentra que

$$\begin{aligned}\frac{Id\mathbf{s}\times(I'd\mathbf{s}'\times\hat{\mathbf{R}})}{R^2} &= II'd\mathbf{s}'\left(d\mathbf{s}\cdot\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right) - \frac{II'\hat{\mathbf{R}}(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}')}{R^2}\\ &= -II'd\mathbf{s}'\left[d\mathbf{s}\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right] - \frac{II'\hat{\mathbf{R}}(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}')}{R^2}\\ &= -II'd\mathbf{s}'d_C\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{II'\hat{\mathbf{R}}(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}')}{R^2}\end{aligned} \tag{13-4}$$

donde se ha escrito $d_C(1/R)$ para indicar el cambio diferencial en $(1/R)$ que resulta de un desplazamiento a lo largo de C. Al sustituir (13-4) en (13-1), se encuentra que la fuerza total puede también expresarse como

$$\mathbf{F}_{C'\to C} = -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi}\oint_C d\mathbf{s}'\oint_C d_C\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\mu_0 I I'}{4\pi}\oint_C\oint_{C'}\frac{(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}')\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{13-5}$$

donde, para el primer término, primero se integra sobre C y después sobre C'. La integral sobre C tiene la forma de una integral sobre una trayectoria cerrada del diferencial de un escalar y, dado que los puntos inicial y final coinciden, se tiene

$$\oint_C d_C\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\frac{1}{R}\right)_f - \left(\frac{1}{R}\right)_i = \left(\frac{1}{R}\right)_i - \left(\frac{1}{R}\right)_i = 0$$

por lo que el primer término de (13-5) desaparece, quedando

$$\mathbf{F}_{C'\to C} = -\frac{\mu_0 I I'}{4\pi}\oint_C\oint_{C'}\frac{(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}')\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{13-6}$$

como otra expresión que da la *misma* fuerza total. De hecho, se puede considerar que (13-6) es otra versión de la ley de Ampere en el vacío. En esta forma los circuitos parecen tener mayor simetría, a excepción de $\hat{\mathbf{R}}$, que tiene un sentido definido. Si se utilizara (13-6) para calcular la fuerza que C ejerce sobre C' se tendría

$$\mathbf{F}_{C\to C'} = -\frac{\mu_0 I' I}{4\pi}\oint_{C'}\oint_C\frac{(d\mathbf{s}'\cdot d\mathbf{s})\hat{\mathbf{R}}'}{R'^2} \tag{13-7}$$

siendo $\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}$. Dado que $\mathbf{R}' = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = r$, se tiene que $\hat{\mathbf{R}}' = -\mathbf{R}$; de (1-16) se desprende también que $d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}'$. Así, al comparar (13-6) y (13-7) se observa que

$$\mathbf{F}_{C\to C'} = -\mathbf{F}_{C'\to C} \tag{13-8}$$

como era de esperarse para las fuerzas totales.

Este cálculo demuestra que existe una gran ambigüedad en la expresión para la fuerza total sobre un circuito completo que, después de todo, es lo único que puede medirse en un laboratorio. De hecho, se podrían escribir infinitas "versiones" de la ley de Ampere simplemente añadiendo al integrando de (13-1) cualquier función que se anule al integrar sobre un circuito completo. Sin embargo, la experimentación ha demostrado que no se gana nada con ello, que la fórmula dada en (13-1) resulta ser la más útil y que existen muchas razones para preferirla, según se verá más adelante.

Aquí se ha supuesto una situación estática, es decir, que los circuitos se encuentran en reposo en posiciones fijas. Esto significa que para que C pueda estar en equilibrio se requiere de una fuerza mecánica adicional, $\mathbf{F}_{C,m}$, de modo que la fuerza resultante sea igual a cero; en otras palabras, se debe tener

$$\mathbf{F}_{C'\to C} + \mathbf{F}_{C,m} = 0 \tag{13-9}$$

Lo mismo se aplica para C'.

Como ya se ha dicho antes, la ley de Ampere (13-1) es una generalización de los resultados de muchos casos especiales. Como siempre, para poder utilizar esta ley se hace necesario evaluarla para casos especiales y obtener resultados que puedan ser verificados de manera relativamente fácil en un laboratorio. Como ilustración de la utilidad de (13-1), se le aplicará a un caso particular muy sencillo e importante.

13-2 Dos corrientes paralelas infinitamente largas

Considérense dos circuitos rectos infinitamente largos que conducen corrientes I e I'. Son paralelos entre sí y se encuentran separados por una distancia ρ. Por especificidad, úsense coordenadas cilíndricas y tómese el eje z en coincidencia con la corriente fuente I', como se ilustra en la figura 13-2. En ambos casos, cada corriente debe ser parte de un circuito completo; se supone que las porciones que faltan se extienden a lo largo de algunas curvas grandes en el infinito (como por ejemplo, grandes semicírculos) y que están tan lejos que sus contribuciones pueden despreciarse por la presencia de R^2 en el denominador de (13-1). En la figura se puede observar que $\mathbf{r} = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$ y que $\mathbf{r}' = z'\hat{\mathbf{z}}$, de modo que $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$ y que $R^2 = \rho^2 + (z - z')^2$. Dado que en el caso ρ y $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ son constantes, se observa también que $d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = dz\,\hat{\mathbf{z}}$ y que $d\mathbf{s}' = d\mathbf{r}' = dz'\hat{\mathbf{z}}$. Utilizando estos resultados y $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$, se encuentra que

$$\frac{d\mathbf{s}\times(d\mathbf{s}'\times\hat{\mathbf{R}})}{R^2} = \frac{dz\,dz'\hat{\mathbf{z}}\times\{\hat{\mathbf{z}}\times[\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}-(z-z')\hat{\mathbf{z}}]\}}{R^3} = -\frac{\rho dz\,dz'\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} \tag{13-10}$$

por (176) y (1-26). Al sustituir esto en (13-1) se tiene

$$\mathbf{F}_{C'\to C} = -\frac{\mu_0 II'\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz'}{\left[\rho^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} \tag{13-11}$$

donde los límites de la integral cubren los circuitos C y C'. Si se hace ahora la sustitución $t = z' - z$, de manera que $dt = dz'$ porque z es constante durante la integración con respecto a z', se obtiene que la integral con respecto a z' es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(\rho^2+t^2)^{3/2}} = \frac{2}{\rho^2}$$

de acuerdo con (3-7) y (3-8). Por lo tanto, (13-11) se reduce a

$$\mathbf{F}_{C'\to C} = -\frac{\mu_0 II'\hat{\boldsymbol{\rho}}}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{\infty} dz \tag{13-12}$$

Si ahora se realizara la integración con respecto a z, es decir, sobre C, se obtendría una fuerza infinita. Sin embargo, todavía es posible obtener alguna utilidad de este resultado si se observa que el integrando es independiente de z, de manera que la fuerza sobre una longitud dz del circuito estará dada por $d\mathbf{F} = -(\mu_0 II'\hat{\boldsymbol{\rho}}/2\pi\rho)\,dz$. Así, si se introduce una *fuerza* por *unidad de longitud*, $\mathbf{f}_C$, se puede escribir

$$\mathbf{f}_C = \frac{d\mathbf{F}}{dz} = -\frac{\mu_0 II'\hat{\boldsymbol{\rho}}}{2\pi\rho} \qquad \begin{pmatrix}\text{corrientes}\\ \text{paralelas}\end{pmatrix} \tag{13-13}$$

Puede observarse que la magnitud de $\mathbf{f}_C$ es constante, que es proporcional al producto de las corrientes e inversamente proporcional a la separación ρ y que su dirección es perpendicular a las corrientes. En efecto, dado que el coeficiente de $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ (13-13) es negativo, de la

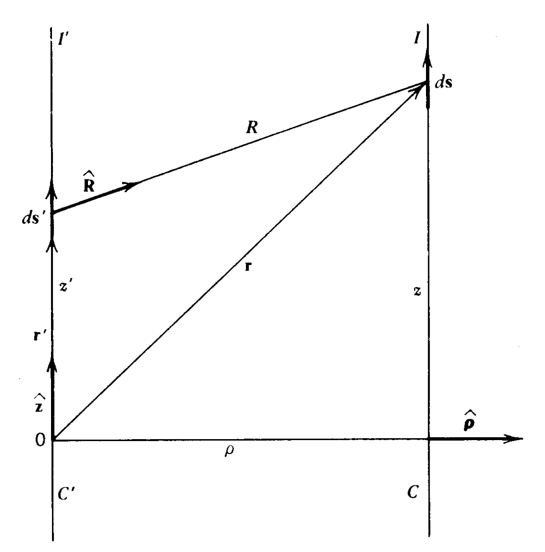


Figura 13-2 Cálculo de la fuerza entre dos corrientes paralelas infinitamente largas.

figura 13-2 se puede observar que ésta viene a ser una fuerza de atracción entre C y C', dirigida de C a C'.

En la figura 13-2 se supuso que I e I' tenían la misma dirección. Si ahora se toman I e I' en direcciones opuestas, bien ds ó ds' deberá tener signo opuesto al que tenía antes, ya que el elemento de línea se define en la misma dirección de la corriente. En (13-10) se puede apreciar que esto haría que el producto cruz doble tuviera signo cambiado, con lo que (13-13) quedaría

$$\mathbf{f}_C = \frac{\mu_0 I I' \hat{\boldsymbol{\rho}}}{2\pi\rho} \qquad \begin{pmatrix} \text{corrientes} \\ \text{antiparalelas} \end{pmatrix} \tag{13-14}$$

que viene a ser de repulsión sobre C.

Se puede resumir la naturaleza cualitativa de estos resultados diciendo que corrientes paralelas (iguales) se *atraen* entre sí, mientras que corrientes antiparalelas (opuestas) se *repelen;* esto viene a ser, en cierto sentido, "opuesto" al comportamiento observado con las fuerzas electrostáticas entre cargas.

Un caso particular de (13-14) que resulta de interés ocurre cuando las corrientes son iguales; cuando $I = I'$, queda

$$\mathbf{f}_C = \frac{\mu_0 I^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}}{2\pi\rho} \tag{13-15}$$

Esta situación se podría lograr en la práctica haciendo que los alambres rectos paralelos C y C' de la figura 13-2 sean porciones del *mismo* circuito, conectando sus extremos en el infinito para cerrar el circuito. En este caso se tendría la certeza de contar con corrientes iguales y opuestas, de modo que se pudiera aplicar (13-15). Pero dado que μ_0 se encuentra definido ya en (13-2), no queda ninguna cantidad arbitraria en (13-15), de modo que es posible encontrar el valor *absoluto* de I en *amperes* al determinar las cantidades mecánicas $\mathbf{f}_C$ y ρ. En otras palabras, se puede utilizar (13-15) para *medir* I; este viene a ser esencialmente el método que en realidad se emplea para determinar el valor del ampere. Una vez que se haya encontrado el valor de una corriente I por medio de este método, el valor I' de otra co-

rriente cualquiera puede encontrarse en principio por medio de esta configuración,ya sea que (13-13) o (13-14) se usen para describir la fuerza medible por unidad de longitud.

13-3 Fuerza entre elementos de corriente

Aunque a menudo resulta imprudente llegar a conclusiones acerca de un integrando a partir de la naturaleza y valor de una integral definida, eso fue lo que se hizo, por ejemplo, para obtener (7-29), y ahora se hará otra vez en lo que sigue. La *forma* de (13-1) es tal que puede escribirse como

$$\mathbf{F}_{C'\to C} = \oint_C \oint_{C'} d\mathbf{F}_{e'\to e} \tag{13-16}$$

y se le puede dar al integrando

$$d\mathbf{F}_{e'\to e} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,d\mathbf{s} \times (I'\,d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}})}{R^2} \tag{13-17}$$

una interpretación natural como la fuerza ejercida sobre el elemento de corriente $I d\mathbf{s}$ por el elemento de corriente $I' d\mathbf{s}'$. Se podría considerar que ésta fuera otra versión más de la ley de Ampere y, de hecho, es lo que se hace a menudo. Como ya se indicó, no es posible realizar experimentos directos sobre elementos de corriente, pero esta ecuación sí permite una generalización verificable aplicada a cargas puntuales en movimiento y está en concordancia con todo lo que se hará más adelante. En esta forma, (13-17) guarda una analogía inesperada con la ley de Coulomb, incluso con la dependencia respecto al inverso del cuadro de la distancia R entre los elementos.

Sin embargo, en contraste con la ley de Coulomb, $d\mathbf{F}_{e'\to e}$ por lo general no queda en la dirección $\hat{\mathbf{R}}$ de la línea que conecta los elementos. En consecuencia, la tercera ley de Newton no se satisface en (13-17) aun cuando sí funcionó para los circuitos generales en (13-8). Para mostrar esto, se calcula la fuerza que $I d\mathbf{s}$ ejerce sobre $I' d\mathbf{s}'$; como se vio antes, ésta se puede obtener intercambiando las cantidades primas y no primas en (13-17) *y* remplazando $\hat{\mathbf{R}}$ con $-\hat{\mathbf{R}}$. De esta manera se tiene que

$$d\mathbf{F}_{e\to e'} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'\,d\mathbf{s}' \times (I\,d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{R}})}{R^2} \tag{13-18}$$

siendo todavía $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Por medio de (1-30) se encuentra que si se suman (13-17) y (13-18) se tiene

$$d\mathbf{F}_{e'\to e} + d\mathbf{F}_{e\to e'} = \frac{\mu_0 I I'}{4\pi R^2} [\hat{\mathbf{R}} \times (d\mathbf{s}' \times d\mathbf{s})] \tag{13-19}$$

que por lo general no es igual a cero, en contraste con (13-8). Esta suma será igual a cero solamente si $d\mathbf{s}'$ y $d\mathbf{s}$ son paralelos, como lo son en la figura 13-2, o si $\hat{\mathbf{R}}$ es perpendicular al plano formado por $d\mathbf{s}$ y $d\mathbf{s}'$.

Si se hace lo mismo con la forma (13-6) que es más simétrica, se obtiene todavía otra forma posible de la fuerza entre elementos de corriente, es decir,

$$d\mathbf{F}'_{e'\to e} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[(I\,d\mathbf{s}) \cdot (I'\,d\mathbf{s}')]\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{13-20}$$

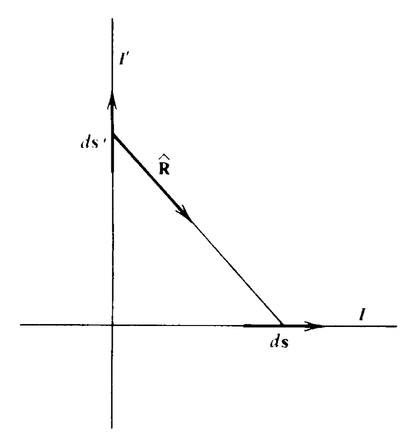


Figura 13-3 Elementos de corriente "cruzados".

cuya dirección es a lo largo de la línea que une los elementos. También resulta fácil comprobar que esta forma satisface la tercera ley, es decir,

$$d\mathbf{F}'_{e'\to e} + d\mathbf{F}'_{e\to e'} = 0 \tag{13-21}$$

Aunque (13-17) y (13-20) dan el mismo valor para la fuerza total entre circuitos completos, pueden dar resultados diferentes cuando se les aplica a elementos. Por ejemplo, supóngase que la corriente I de la figura 13-2 estuviera dirigida hacia la página mientras que I' se mantuviera sin cambio. El aspecto de estas corrientes "cruzadas" es el mismo que se muestra en la figura 13-3, que se ha dibujado como si se mirara hacia el origen de la figura 13-2 en la dirección $-\hat{\mathbf{\rho}}$; recuérdese que las dos corrientes de la figura 13-3 siguen separadas por una distancia ρ. En este caso $d\mathbf{s}$ y $d\mathbf{s}'$ son perpendiculares entre sí, de manera que (13-17) resulta $d\mathbf{F}_{e'\to e} \neq 0$. La razón de esta discrepancia es que al pasar de (13-1) a (13-5) se perdió, en efecto, un término que es cero para un circuito completo pero que no lo es para los *integrandos;* esto quedó demostrado explícitamente en (13-4).

Si (13-20) tiene una apariencia más simétrica, si su dirección es sobre la línea que une los elementos, si tiene la propiedad tan deseable expresada en (13-21) en contraste con (13-19), entonces, ¿por qué es (13-17) la forma más aceptada para la fuerza entre elementos de corriente en lugar de aquélla? Dejando a un lado la futura comparación con el experimento, es posible notar que (13-20) posee un problema inherente que la descalifica para los propósitos deseados. Debido a su proporcionalidad con respecto a $d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}'$, (13-20) involucra el coseno del ángulo entre los elementos. Por ello no puede expresarse en forma de producto entre el elemento $id\mathbf{s}$ y algo independiente de ese elemento, es decir, un *campo.* Dado que esta propiedad de producto es esencial para el desarrollo de una teoría que se basa en campos, no queda otra más que abandonar (13-20). Por otro lado, (13-17) sí posee la forma deseada que permite la introducción de un campo nuevo, como se hará en seguida, por lo que aquí se toma (13-1) junto con (13-17) como la ley fundamental de la magnetostática.

Ejercicios

13-1 Aplicar (13-6) al sistema de la figura 13-2 y así demostrar rectamente que se vuelve a obtener (13-12).

13-2 Para tener una mejor idea de la magnitud de las fuerzas magnéticas, encontrar la fuerza por unidad de longitud entre dos corrientes de 10 amperes muy largas y opuestas, separadas entre sí por 1 centímetro. Encontrar la relación de esta fuerza al peso por unidad de longitud del cable de cobre descrito en el ejercicio 12-17.

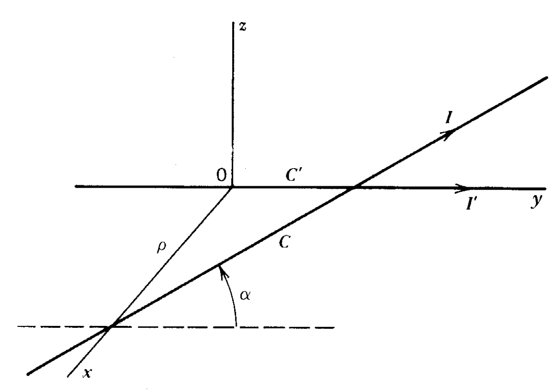


Figura 13-4 Las dos corrientes del ejercicio 13-3.

13-3 Considérense las dos corrientes rectas infinitamente largas que se muestran en la figura 13-4. I' coincide con el eje y. I es paralela al plano yz, se encuentra a una distancia ρ del mismo, cruza el eje x en $y = z = 0$ y forma un ángulo α con el plano xy, como está mostrado. Demostrar que la fuerza sobre I de C ejercida por I' de C' es igual a $-\frac{1}{2}\mu_0 II' \cot\alpha\hat{\mathbf{x}}$.

13-4 Considérense los dos circuitos que se muestran en la figura 13-5. Todas las corrientes se encuentran sobre el mismo plano. C' es infinitamente largo. Los lados del rectángulo de longitud b son paralelos a C'. Encontrar la fuerza total sobre C. ¿Es ésta de atracción o de repulsión?

13-5 Una hoja de corriente, plana e infinita, coincide con el plano xy. La densidad de corriente superficial es $\mathbf{K}' = K'\hat{\mathbf{y}}$ siendo $K' =$ const. Un alambre muy largo que conduce una corriente I es paralelo al eje y e intersecta el eje z positivo a una distancia d del origen. Encontrar la fuerza por unidad de longitud sobre el alambre.

13-6 Una corriente I' se distribuye uniformemente sobre un cilindro muy largo cuya sección circular tiene un radio a. El eje del cilindro coincide con el eje z. I' está en la dirección de z positiva. Una corriente I muy larga se encuentra paralela al eje z; su dirección es también la de z positiva. I cruza el eje x positivo a una distancia d del origen. Encontrar la fuerza por unidad de longitud sobre la corriente I. [Seguramente se necesitará utilizar (3-16).]

13-7 Un circunferencia de radio a se encuentra sobre el plano xy con su centro en el origen. Conduce una corriente I' que circula en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando es vista desde los valores positivos de z hacia el origen. Una corriente I muy larga

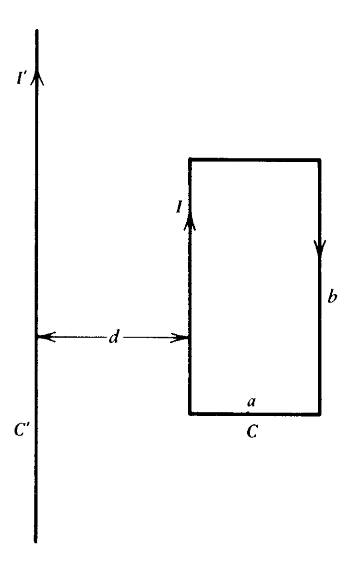


Figura 13-5 Los circuitos del ejercicio 13-4.

es paralela al eje x y está dirigida en el sentido positivo de x, intersectando el eje z positivo a una distancia d del origen. Encontrar la fuerza total sobre el circuito C que conduce a I.

13-8 Circunferencias, cada una de ellas de radio a, conducen corrientes que circulan en el mismo sentido. Una de ellas, con una corriente I', se encuentra sobre el plano xy y tiene su centro sobre el eje z positivo a una distancia d del origen. Encontrar la fuerza sobre el circuito de corriente I. Expresar la respuesta en función de los ángulos σ y σ' de las coordenadas cilíndricas, pero dejar la respuesta en forma de integral.

13-9 Cuatro cables rectos muy largos conducen cada uno de ellos la misma corriente I. Todos son paralelos al eje z e intersectan el plano xy en los puntos $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) y $(0,a)$. El primero y el tercero tienen sus corrientes en la dirección z positiva; los otros dos tienen sus corrientes en la dirección negativa de a. Encontrar la fuerza total por unidad de longitud sobre la corriente que corresponde al punto (a,a).

Capítulo

14
Inducción magnética

La ley de Ampere es otro ejemplo de una ley de "acción a distancia." Al principio del capítulo 3 se vio que la ley de Coulomb poseía una propiedad similar y se concluyó que sería de utilidad dividirla en dos partes, introduciendo el campo eléctrico como una especie de intermediario para describir la interacción entre cargas. Aquí se hará lo mismo para estudiar la fuerza entre corrientes. Por razones históricas, el campo que se utiliza para este propósito recibe el nombre de "inducción magnética"; el nombre "campo magnético" se reserva por lo general para otro campo vectorial que se definirá más adelante, cuando se estudien los efectos de la materia.

14-1 Definición de la inducción magnética

Recuérdese que el paso de la ley de Coulomb al campo eléctrico fue posible porque en la sección 3-1 se pudo expresar la fuerza sobre una carga como el producto de la carga y otra cantidad a la que se llamó campo eléctrico. Aquí se expresará (13-1) de una manera similar como

$$\mathbf{F}_{C'\to C}=\oint_C I\,d\mathbf{s}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'}\frac{I'\,d\mathbf{s}'\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right) \tag{14-1}$$

El factor entre paréntesis es independiente del elemento de corriente $I d\mathbf{s}$ en la posición $\mathbf{r}$, pero sí depende de la distribución de otros elementos de corriente con respecto a $I d\mathbf{s}$. Si a la cantidad entre paréntesis se le denota como $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ y se utiliza (1-139), se tiene

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'}\frac{I'\,d\mathbf{s}'\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'}\frac{I'\,d\mathbf{s}'\times\mathbf{R}}{R^3} \tag{14-2}$$

y

$$\mathbf{F}_{C'\to C}=\oint_C I\,d\mathbf{s}\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{14-3}$$

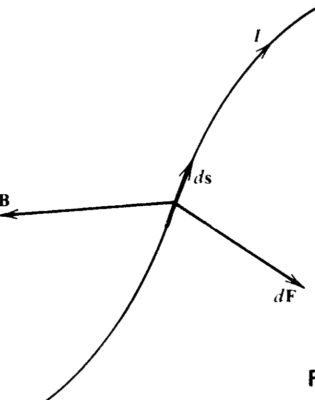


Figura 14-1 Fuerza sobre un elemento de corriente debida a una inducción B.

El campo vectorial **B** definido así recibe el nombre de *inducción magnética;* a veces también se le llama *densidad de flujo magnético* o simplemente *campo* **B**. Además, (14-2) es conocida por lo general como la *ley de Biot-Savart.*

De (14-3) se puede deducir que la unidad de **B** es 1 newton/(ampere-metro). Sin embargo, no es usual emplear esta combinación, sino que la unidad de **B** tiene dos formas estándar: 1 tesla = 1 weber/(metro)^2. Al comparar estas formas con la anterior, se observa que 1 weber = 1 joule/ampere = 1 volt-segundo.

Así, por medio de este procedimiento se ha introducido otro campo vectorial, **B**, que puede calcularse para cualquier punto de campo **r** por medio de (14-2), *aun cuando* no exista allí ningún elemento de corriente sobre el que se pueda ejercer una fuerza. Como con **E**, puede aquí también adoptarse la interpretación de una simple conveniencia matemática por medio de la cual el cálculo de **B** viene a ser un enunciado de contingencia que indica cuál sería la fuerza sobre un circuito *C si* éste se colocara ahí. Por otro lado, puede también considerarse a **B**, tal como en la sección 3-4, como una entidad física real en sí misma.

Si existe más de un circuito fuente, se puede encontrar **B** para cada uno de ellos, C_i, por medio de (14-2), y después la suma vectorial de las contribuciones individuales darán la inducción resultante en **r**:

$$\mathbf{B}_{\text{total}} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \frac{I_i\, d\mathbf{s}_i \times \hat{\mathbf{R}}_i}{R_i^2} \tag{14-4}$$

siendo $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ en función del vector de posición r_i del elemento de corriente $I_i d\mathbf{s}_i$ del circuito i. Nótese que $Id\mathbf{s}$ de C no queda incluido en (14-4), es decir, que no se acepta que un elemento de corriente pueda ejercer alguna fuerza sobre sí mismo.

Aunque (14-3) se expresó en función de la fuerza total sobre todo el circuito C, el integrando se puede interpretar naturalmente como la fuerza $d\mathbf{F}$ sobre el elemento de corriente $Id\mathbf{s}$ situado en **r**:

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{14-5}$$

Esta fuerza es perpendicular tanto al elemento de corriente como a la inducción magnética; es igual a cero cuando éstas son paralelas y su magnitud es máxima cuando son perpendiculares, como puede apreciarse en (1-22). Esta propiedad direccional de $d\mathbf{F}$ queda ilustrada en la figura 14-1, que corresponde a la definición del producto cruz como en la figura 1-14.

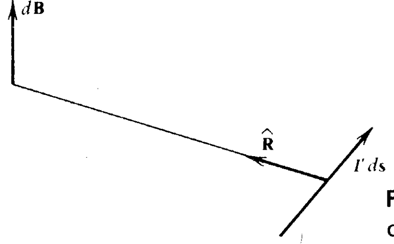


Figura 14-2 Relaciones geométricas entre un elemento de corriente y la inducción magnética que produce.

Similarmente, puede interpretarse el integrando de (14-2) como la contribución $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$ a la inducción total, producida por el elemento de corriente $I'd\mathbf{s}'$ situado en el punto fuente $\mathbf{r}'$:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'\,d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I'\,d\mathbf{s}' \times \mathbf{R}}{R^3} \tag{14-6}$$

Esta expresión viene a ser otra versión de la ley de Biot-Savart. Las relaciones direccionales dadas por (14-6) se ilustran en la figura 14-2. Puede observarse que $d\mathbf{B}$ es perpendicular al plano formado por $d\mathbf{s}'$, y $\hat{\mathbf{R}}$, tiene su magnitud máxima en el punto de campo situado sobre una línea perpendicular a $d\mathbf{s}'$ y es igual a cero en un punto de campo localizado directamente adelante o atrás de $d\mathbf{s}'$. Existe una regla de la mano derecha muy conveniente para describir *cualitativamente* la situación de la figura 14-2: se coloca el pulgar de la mano derecha en la dirección de $I'd\mathbf{s}'$ y entonces los dedos se doblarán en el *sentido general* correcto de $d\mathbf{B}$.

Hasta aquí, todo se ha enunciado en función de corrientes filamentales. Sin embargo, como ya se ha visto, existen muchas situaciones en las que resulta más conveniente expresar las cosas en función de corrientes distribuidas sobre un volumen o una superficie. Es fácil adaptar a esos casos los resultados hasta aquí obtenidos, por medio de la utilización de los equivalentes a lo elementos de corriente como los que se dedujeron en (12-10). Por ejemplo, si las corrientes fuente corresponden a una densidad volumétrica $\mathbf{J}'(\mathbf{r}')$, los resultados análogos a (14-2) y (14-6) serán

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}'(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}\, d\tau' \tag{14-7}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}' \times \hat{\mathbf{R}}\, d\tau'}{R^2} \tag{14-8}$$

tomándose la integral sobre todo el volumen, V', que contiene a las corrientes. De manera similar, (14-3) y (14-5) quedan

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})\, d\tau \tag{14-9}$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}\, d\tau \tag{14-10}$$

siendo $\mathbf{F}$ la fuerza total sobre todas las corrientes contenidas en el volumen V, cuya distribución se encuentra descrita por $\mathbf{J}(\mathbf{r})$.

Usando de nuevo (12-10) se obtienen las expresiones correspondientes para cuando se tienen corrientes superficiales:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K}'(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^2} da' \tag{14-11}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{K}' \times \hat{\mathbf{R}} da'}{R^2} \tag{14-12}$$

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) da \tag{14-13}$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} da \tag{14-14}$$

Por último, si ocurrieran en forma simultánea todas las posibilidades mencionadas, la **B** total en un punto dado es la suma de las diversas contribuciones dadas en (14-4), (14-7) y (14-11), y sería precisamente **B** resultante la que se utilizaría en (14-3), (14-5), (14-9), (14-19), (14-13) o (14-14), según fuera apropiado.

Para todo esto no se requirió hacer uso alguno de las clasificaciones de corriente que se hicieron en la sección 12-2, siendo una hipótesis básica de este tema que la inducción magnética **B** es producida por *todas* las corrientes, sea cual fuere su origen; más adelante será necesario introducir otros tipos de corriente muy diferentes a los que ya se han encontrado hasta aquí.

Como en el caso del campo eléctrico, una ecuación como la (14-2) puede considerarse como una "receta" para el cálculo de **B** una vez conocida la distribución de corriente; a continuación se consideran algunos ejemplos de tales cálculos directos.

14-2 Corriente recta de longitud finita

Considérese una corriente filamental constante, I', y encuéntrese la **B** producida por una longitud finita de la misma. Si se toma como origen el punto donde la perpendicular desde el punto de campo P intersecta la corriente y si se utilizan coordenadas cilíndricas, se obtiene la situación descrita en la figura 14-3*a*. Es evidente que no se trata de un circuito completo, sino de una porción del mismo. Sin embargo, casos como el presente resultan de gran utilidad porque a menudo es posible considerar circuitos completos más complicados como si estuvieran compuestos de partes como ésta; así, una vez encontrado **B** para cada una de las partes, la resultante se obtiene por adición vectorial, como queda implicado en (14-4).

En la figura se observa que $\mathbf{r} = \rho\hat{\rho}$ y que $\mathbf{r}' = z'\hat{\mathbf{z}}$, de manera que $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \rho\hat{\rho}$ $z'\hat{\mathbf{z}}$, $R^2 = \rho^2 + z'^2$ y que $d\mathbf{s}' = dz'\hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto, se encuentra que $d\mathbf{s}' \times \mathbf{R} = \rho dz'\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\rho} = \rho\, dz'\, \hat{\varphi}$ y así, dado que $\hat{\varphi}$ es constante, (14-2) queda

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I' \rho \hat{\varphi}}{4\pi} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I' \rho \hat{\varphi}}{4\pi} \left[\frac{z'}{\rho^2 (\rho^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{-L_1}^{L_2}$$

$$= \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I'}{4\pi\rho} \left[\frac{L_2}{(\rho^2 + L_2^2)^{1/2}} + \frac{L_1}{(\rho^2 + L_1^2)^{1/2}} \right] \tag{14-15}$$

Este resultado puede también expresarse en función de los angulos α_2 y α_1 cuyo sentido positivo se define en la figura 14-3*b*, pues de ésta se desprende que

$$\mathbf{B}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\mu_0 I'}{4\pi\rho}(\operatorname{sen}\alpha_2+\operatorname{sen}\alpha_1) \tag{14-16}$$

Así la inducción es siempre perpendicular al plano formado por la corriente y el vector de posición del punto de campo.

Se puede obtener **B** para una corriente infinitamente larga si se hace que $L_2 \to \infty$ y $L_1 \to \infty$ (o lo que es lo mismo, que $\alpha_2 \to \pi/2$ y $\alpha_1 \to \pi/2$), con lo que el resultado es

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{14-17}$$

Se puede utilizar esta expresión para comparar este procedimiento con el empleado en el capítulo anterior. Si se tiene una corriente infinitamente larga, paralela al eje z, que por P, como en la figura 13-2, puede calcularse la fuerza sobre una longitud ds de la misma al combinar (14-17), (14-15) y (14-76) para obtener

$$d\mathbf{F}=I\,dz\hat{\mathbf{z}}\times\frac{\mu_0 I'\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{2\pi\rho}=-\frac{\mu_0 II'\,dz\hat{\boldsymbol{\rho}}}{2\pi\rho}$$

que viene a ser exactamente lo mismo que se logró para cálculo directo en (13-13).

La magnitud de **B** dada por (14-17) varía inversamente con la distancia a la corriente. Así, las superficies de B constante con cilindros cuyos ejes coinciden con la corriente. El radio de un cilindro dado queda determinado por $\rho=\mu^0 I'/2\pi B$. Dado que **B** tiene la dirección φ, las líneas de **B** sobre un plano perpendicular a los cilindros, y por lo tanto a I' serán circunferencias. De esta manera se obtiene una imagen de la **B** debida a una corriente recta infinitamente larga, como la ilustrada en la figura 14-4; se ha dibujado la figura de manera tal que I' es perpendicular a la página y sale de ella.

14-3 Inducción axial de una corriente circular

Como otro ejemplo de corriente filamental, considérese una corriente I' que circula por la circunferencia de un círculo de radio a como se ilustra en la figura 14-5. Para mayor pre-

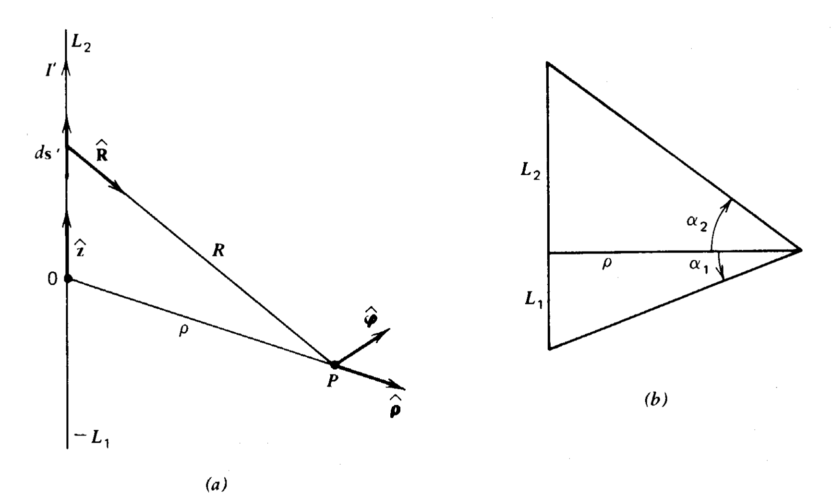


Figura 14-3 Cálculo de la **B** debida a una corriente recta de longitud finita.

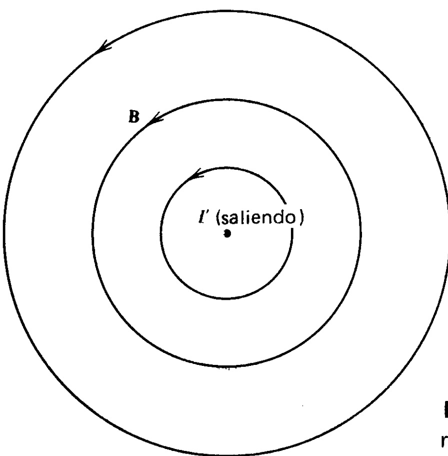


Figura 14-4 Líneas de **B** debidas a una corriente recta infinitamente larga que emerge de la página.

cisión, se supone que el círculo descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Se toma el punto de campo sobre el z, de modo que se encuentra sobre la recta normal a la superficie limitada por la corriente.

Se puede observar que $\mathbf{r} = z\,\hat{\mathbf{z}}$, mientras que $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} = a\,(\cos\varphi'\,\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\varphi'\,\hat{\mathbf{y}})$; se utiliza el ángulo polar φ' para localizar el punto fuente, pero se expresa su vector de posición en función de los vectores unitarios rectangulares *constantes.* Por lo tanto, $\mathbf{R} = -a\cos\varphi'\,\hat{\mathbf{x}} - a\operatorname{sen}\varphi'\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$, de modo que $R^2 = a^2 + z^2$. Además, $d\mathbf{s}' = d\mathbf{r}' = a\,d\varphi'\,(-\operatorname{sen}\varphi'\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi'\hat{\mathbf{y}})$, por lo que se tiene

$$d\mathbf{s}' \times \mathbf{R} = a\,d\varphi'[\,z(\cos\varphi'\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\varphi'\hat{\mathbf{y}}) + a\hat{\mathbf{z}}\,]$$

al usar (1-28). Substituyendo estos valores en (14-2) se obtiene

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I' a}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[\,z(\cos\varphi'\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\varphi'\hat{\mathbf{y}}) + a\hat{\mathbf{z}}\,]\,d\varphi'}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I' a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} \tag{14-18}$$

donde los componentes $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{x}}$ se han integrado dando cero. Por lo tanto, la inducción es enteramente a lo largo del eje z, como resulta evidente por la simetría de la situación, que se ilustra en la figura 14-5. En el centro del círculo ($z = 0$) la inducción es simplemente

$$\mathbf{B}_{\text{centro}} = \frac{\mu_0 I'}{2a}\hat{\mathbf{z}} \tag{14-19}$$

A grandes distancias del círculo, es decir, para $z \gg a$, (14-18) se aproxima a

$$\mathbf{B}(z) \simeq \frac{\mu_0 I' a^2}{2z^3}\hat{\mathbf{z}} \tag{14-20}$$

y varía en relación inversa al cubo de la distancia z. Desde este punto de vista, resulta similar al campo eléctrico de un dipolo, como se vio en (10-35). Esta similitud no es accidental, como se explicará después en el capítulo 19. Por ahora, considérese una de las aplicaciones de este resultado.

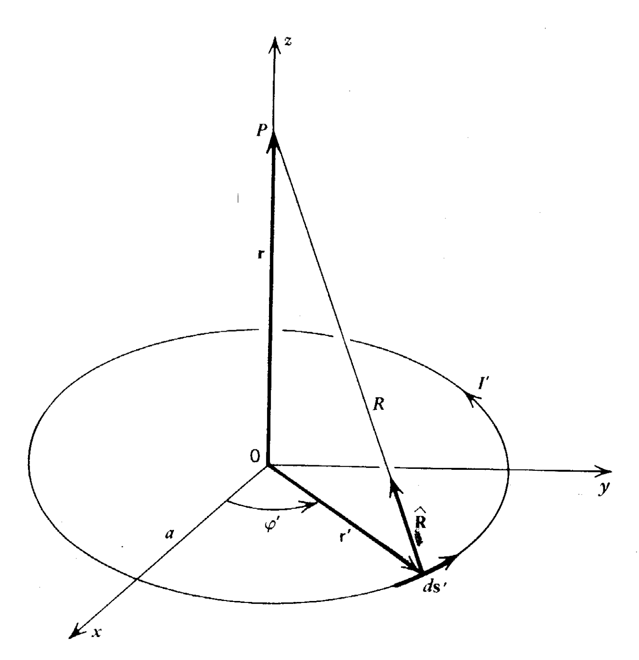


Figura 14-5 Cálculo de la inducción axial de una corriente circular.

Ejemplo

Inducción axial de un solenoide ideal. Supóngase que se tiene un cilindro de longitud L y sección circular de radio a. Si se enrolla un alambre a su alrededor para un total de N "vueltas", el dispositivo resultante recibe el nombre de *solenoide*, y se encuentra ilustrado en la figura 14-6 (solamente se muestran unas pocas vueltas en el corte.) Si el alambre fuera muy delgado y se enrollara muy apretadamente en cada vuelta, como una primera aproximación se podría despreciar el paso del enrollado, siendo equivalente a un conjunto de N corrientes filamentales circulares de radio a. (A menudo a esto se le llama "solenoide ideal".) Puede entonces obtenerse **B** en un punto P sobre el eje del solenoide con la suma de las contribuciones de cada una de las vueltas circulares, calculadas según (14-18). Considérese una pequeña porción de solenoide de longitud dz_0 situada a una distancia z_0 de uno de los extremos. Si $n = N/L$ es el número de vueltas por unidad de longitud, habrá $dN = ndz_0$ anillos circulares en esta pequeña porción, cada uno de los cuales se encuentra aproximadamente a la misma distancia $z = z_P - z_0$ del punto de campo P. Así, de (14-18) se desprende que su contribución a la magnitud de **B** en P será

$$dB = \frac{\mu_0 I' a^2 n\, dz_0}{2\left[a^2 + (z_P - z_0)^2\right]^{3/2}} \tag{14-21}$$

de acuerdo con (14-4). El valor total de B en P será entonces

$$B = \int_0^L \frac{\mu_0 I' a^2 n\, dz_0}{2\left[a^2 + (z_P - z_0)^2\right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I' n a^2}{2} \int_{-z_P}^{L - z_P} \frac{dz'}{(a^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 n I'}{2} \left\{ \frac{(L - z_P)}{\left[a^2 + (L - z_P)^2\right]^{1/2}} + \frac{z_P}{(a^2 + z_P{}^2)^{1/2}} \right\} \tag{14-22}$$

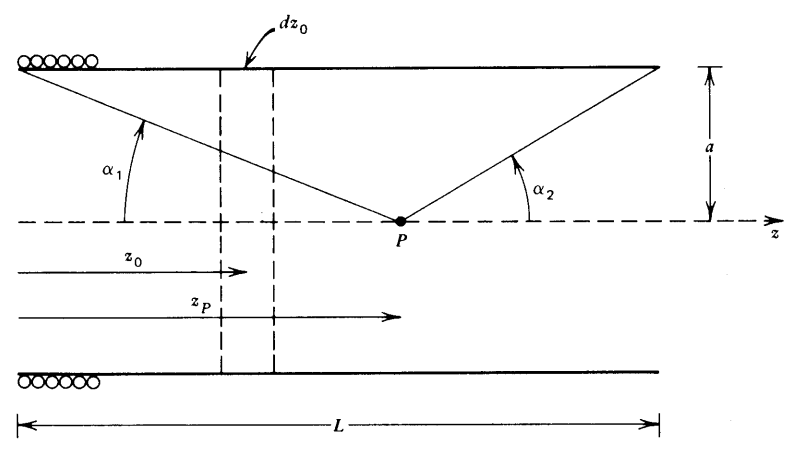


Figura 14-6 Sección de un solenoide ideal con su eje sobre el eje z. z

donde se tomó $z' = z_0 - z_P$ y se utilizó el valor dado para la integral en (14-15). Este resultado puede expresarse también de manera muy sencilla en función de los ángulos α_1 y α_2 definidos en la figura; se observa que se tiene

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0 n I'(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1) \tag{14-23}$$

Si el solenoide es infinitamente largo, entonces tanto α_1 como α_2 se aproximan a cero, con lo que (14-23) se reduce a

$$B = \mu_0 n I' \tag{14-24}$$

siendo independiente de la localización de P.

14-4 Plano infinito de corriente uniforme

Como ejemplo de una distribución continua de corriente, considérese un plano con densidad superficial de corriente constante $\mathbf{K}'$. Por medio de (14-11) se puede encontrar el valor de $\mathbf{B}$ en un punto de campo arbitrario. Supóngase que el plano coincide con el plano xy y que la dirección de $\mathbf{K}'$ es la misma de y, de manera que $\mathbf{K}' = K'\,\hat{\mathbf{y}}$, siendo $K' =$ const. Como se puede apreciar en la figura 14-7, $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{R} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$ y $da' = dx'dy'$. Por lo tanto, $\mathbf{K}' \times \mathbf{R} = K'\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{R} = K'[z\hat{\mathbf{x}} + (x' - x)\hat{\mathbf{z}}]$ con lo que (14-11) queda como

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 K'}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[z\hat{\mathbf{x}} + (x' - x)\hat{\mathbf{z}}]\,dx'\,dy'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{3/2}}\\ &= \frac{\mu_0 K'}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z\hat{\mathbf{x}} + X'\hat{\mathbf{z}})\,dX'\,dY'}{(X'^2 + Y'^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned} \tag{14-25}$$

donde $X' = x' - x$ y $Y' = y - y$. Se puede ver que la componente $\hat{\mathbf{z}}$ desaparece porque el integrando es una función impar de X'. Así, la integral se reduce a exactamente la misma

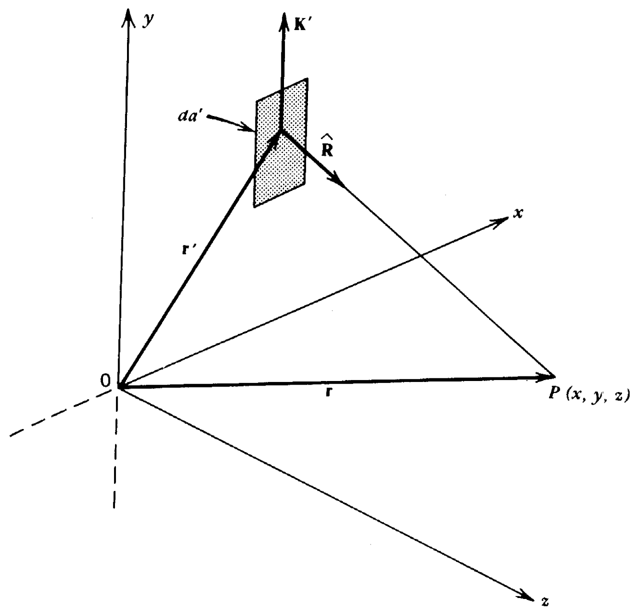


Figura 14-7 Cálculo de la B debida a un plano infinito de corriente uniforme.

forma de (3-11) y si se utilizan los resultados dados en (3-12) y (3-13) simplemente remplazando $\sigma\epsilon_0$ por $\mu_0 K'$ y $\hat{\mathbf{z}}$ por $\hat{\mathbf{x}}$, se obtiene

$$\mathbf{B} = \pm\tfrac{1}{2}\mu_0 K'\hat{\mathbf{x}} = \tfrac{1}{2}\mu_0 K'\left(\frac{z}{|z|}\right)\hat{\mathbf{x}} \tag{14-26}$$

Se observa así que la magnitud de **B** es independiente de la localización del punto de campo, que **B** es paralelo al plano de corriente y perpendicular a la dirección de la corriente y que tienen signos opuestos a ambos lados del plano. Esto queda resumido en la figura 14-8, que muestra las líneas de **B** dibujadas en el plano xy de manera que $\mathbf{K}'$ es perpendicular al plano de la página y sale de ella.

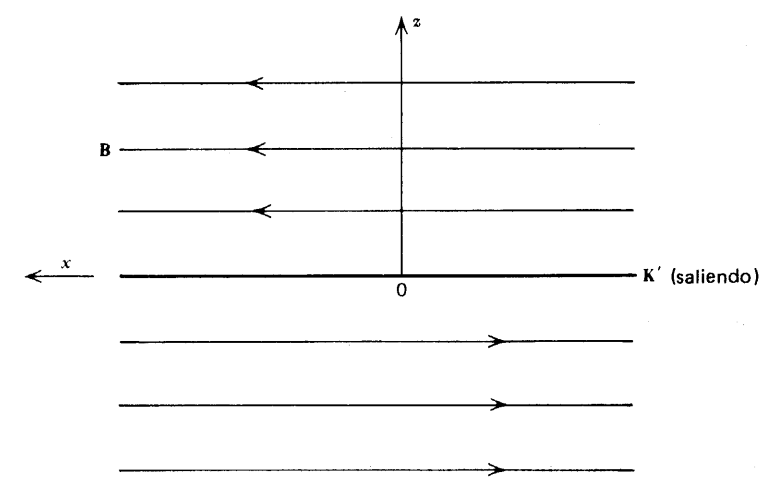


Figura 14-8 Líneas de B debidas a un plano infinito de corriente uniforme perpendicular a la página.

14-5 Cargas puntuales en movimiento

Si se expresa la densidad volumétrica de corriente como el producto $\rho' \mathbf{v}'$ dado por (12-3), entonces (14-7) queda como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\rho' \mathbf{v}' \times \hat{\mathbf{R}} \, d\tau'}{R^2} \tag{14-27}$$

Supóngase ahora que las cargas descritas por ρ' están contenidas en un volumen muy pequeño. En este caso $\mathbf{r}'$ será prácticamente el mismo para todos los elementos de volumen $d\tau'$, por lo que se puede tomar $\mathbf{r}' =$const., haciendo que $\hat{\mathbf{R}}$ y R^2 sean también constantes. Si además se supone que todas las cargas llevan la misma velocidad $\mathbf{v}'$, se pueden sacar todos estos factores constantes de la integral, haciendo que (14-27) quede como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \int_{V'} \rho' \, d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q' \mathbf{v}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{14-28}$$

donde q' es la carga total. Pero en estas circustancias se puede considerar a q' como una carga puntual, de modo que (14-28) viene a ser la inducción magnética producida por una carga puntual en movimiento.

Por comparación de (14-28) y (14-6), se puede ver que este valor de **B** es el mismo que el producido por un elemento de corriente

$$I' \, d\mathbf{s}' = q' \mathbf{v}' \tag{14-29}$$

En otras palabras, se ha encontrado que una carga puntual en movimiento es equivalente a un elemento de corriente, siendo (14-29) la conexión cuantitativa. Una vez obtenido este resultado, es fácil adaptar algunos resultados previos. Por ejemplo, si se combina esta equivalencia con (14-5) y se expresa la fuerza como **F** en lugar de $d\mathbf{F}$, se encuentra que la fuerza magnética sobre una carga puntual en movimiento es

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{14-30}$$

siendo **B** el valor de la inducción en la posición de la carga. De manera similar, se puede utilizar (13-17) para expresar la fuerza magnética sobre una carga puntual q que se mueve con una velocidad **v**, debida a otra carga puntual q' de velocidad $\mathbf{v}'$, resultando

$$\mathbf{F}_{q' \to q} = \frac{\mu_0 q q'}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times (\mathbf{v}' \times \hat{\mathbf{R}})}{R^2} \tag{14-31}$$

Por último, si se suman (14-30) y (3-1), que da la fuerza eléctrica sobre q, se concluye que la fuerza electromagnética total es

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{14-32}$$

A este resultado tan importante se le denomina *fuerza de Lorentz*.

Dado que todo lo visto acerca del magnetismo hasta ahora se basa en corrientes constantes, es de esperarse que (14-28) y (14-31) sólo se puedan aplicar en el caso de velo-

cidades constantes, es decir, cuando la aceleración es cero o despreciable. En efecto, resulta que los campos producidos por cargas aceleradas son diferentes de éstos y dan origen a una serie de fenómenos descritos generalmente como "radiación". Además, aun cuando las cargas se muevan a velocidad constante, únicamente se pueden usar (14-28) y (14-31) si las velocidades son "pequeñas". Aunque en este punto puede no resultar evidente todavía, ni se puede saber lo que significa "pequeñas", sí es posible anticipar algunos de los resultados del capítulo 28 y simplemente decir que se requiere que $|\mathbf{v}| \ll c$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. [Aunque solamente se han estudiado inducciones que son constantes en el tiempo, vale la pena observar que el valor de **B** en el punto fijo **r**, dado por (14-28), es en realidad una función del tiempo, ya que tanto R como **R** variarán a medida que se mueve q'.]

Se ha encontrado que las fuentes de **B** son corrientes de cualquier tipo. Tal como se hizo con **E** en el capítulo 4 y 5, resulta de interés expresar esta información en función de las ecuaciones diferenciales fuente para la inducción. En otras palabras, se desea avaluar $\nabla \times \mathbf{B}$ y $\nabla \cdot \mathbf{B}$, que es lo que se obtendrá, junto con otra información, en los dos capítulos que siguen.

Ejercicios

14-1 Encontrar la inducción magnética producida por las corrientes de la figura 13-4 en el punto sobre el eje x que se encuentra a la mitad entre ambas.

14-2 Supóngase que el punto de campo P de la figura 14-3 está situado en un valor arbitrario de z en vez de en $z=0$ como se indica. Demostrar que el valor de **B** ahí puede todavía expresarse en la forma (14-16), donde α_1 y α_2 se miden positivamente hacia abajo y hacia arriba, respectivamente, de la perpendicular trazada de P a la línea de I'.

14-3 Dos corrientes rectas infinitamente largas son paralelas al eje z. Una de ellas de corriente I_1, intersecta el plano xy en (x_2, y_2). Encontrar la B resultante producida por ellas en un punto de campo (x, y, z).

14-4 Un cuadrado de lado a descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Encontrar el valor de la inducción magnética en cualquier punto sobre el eje z cuando hay corriente I' circulando por el cuadrado. Demostrar que este resultado da el valor $2\sqrt{2}\,\mu_0 I'/\pi a$ para la inducción en el centro.

14-5 Un solenoide ideal de longitud L y N vueltas está enrollado sobre una sección cuadrada, es decir, que cada vuelta es un cuadrado de lado a. Encontrar la inducción producida en el centro del solenoide cuando las vueltas conducen una corriente I'. ¿Qué ocurre cor este valor cuando el solenoide es infinitamente largo?

14-6 Dos espiras circulares, cada una de ellas de radio a, tienen planos paralelos al plano xy y sus centros se encuentran sobre el eje z a una distancia d uno del otro. Cada espira conduce la misma corriente I' circulando en el mismo sentido. Tómese el origen en el punto medio entre ellos y encuéntrese el campo axial $B_z(z)$. ¿Cuánto vale B_z en el origen? Demostrar que dB_z/dz se anula cuando se evalúa en el punto medio. Demostrar que la segunda derivada de B_z también se anula ahí cuando $d=a$. ¿Cuánto vale $B_z(0)$ bajo estas condiciones? Demostrar que d^3B_z/dz^3 también se anula en el origen. A una disposición como ésta, con $d=a$, se le denomina *bobina de Helmholtz* y es utilizada para producir una inducción aproximadamente constante en una región pequeña.

14-7 La corriente que se ilustra en la figura 14-9 sigue la dirección de un arco de círculo sobre el plano xy con centro de curvatura en el origen. Encontrar **B** en cualquier punto del eje z. Para comprobar el resultado obtenido, demostrar que se reduce a (14-18) bajo las condiciones apropiadas.

14-8 Se enrolla un alambre en forma de hélice con ángulo de inclinación α sobre la superficie de un cilindro de radio a, de manera que se forman N vueltas completas. Si el alambre conduce una corriente I', demostrar que la componente axial de la inducción producida en el centro de la hélice es

$$\tfrac{1}{2}(\mu_0 NI'/a)(1+\pi^2 N^2 \tan^2\alpha)^{-(1/2)}.$$

14-9 Un plano infinito de corriente coincide con el plano xy. Su densidad superficial de corriente es $\mathbf{K}' = K'\hat{\mathbf{y}}$ siendo $K' = \text{const}$. Otro plano infinito de corriente es paralelo al plano xy e intersecta el eje z positivo en $z = d$. La densidad superficial de corriente del segundo es $\mathbf{K}' = K'\hat{\mathbf{y}}$. Encontrar **B** en todos los puntos.

14-10 Repetir el ejercicio anterior cuando la corriente superficial del segundo es $\mathbf{K}' = K'\hat{\mathbf{y}}$.

14-11 Un disco dieléctrico circular de radio a posee una densidad superficial de carga σ. Se le hace girar a velocidad angular constante, ω, alrededor de un eje que es normal a la superficie del disco y pasa por su centro. Suponer que la distribución de carga no se altera por la rotación y encontrar **B** en un punto arbitrario sobre el eje de rotación. ¿Cuál es el valor de **B** en el centro del disco?

14-12 Una esfera de radio a contiene una carga total, Q, distribuida uniformemente en todo su volumen. Se le hace girar alrededor de uno de sus diámetros a velocidad constante ω. Suponer que la distribución de carga no se altera con la rotación y encontrar **B** en el centro de la esfera.

14-13 Una esfera dieléctrica de radio a se encuentra polarizada uniformemente. Se le hace girar alrededor del diámetro paralelo a la polarización a velocidad constante, ω. Suponer que la polarización no se afecta con la rotación y encontrar **B** en el punto donde el eje de rotación intersecta la superficie de la esfera, es decir, en el "polo norte" de la esfera. ¿Cuánto vale **B** en el centro de la esfera?

14-14 Un cilindro infinitamente largo con sección circular de radio a conduce una corriente I' que está uniformemente distribuida sobre la superficie de su sección. El eje del cilindro coincide con el eje z e I' está en dirección z positiva. Escoger un punto de campo sobre el eje x y encontrar **B** para todos los valores de x, tanto dentro como fuera del cilindro.

14-15 En el circuito que se muestra en la figura 14-10, las líneas curvas son semicíeculos con centro común C. Las porciones rectas son horizontales. En cierto instante, una carga puntual q situada en C tiene una velocidad v en dirección vertical abajo. Encontrar la fuerza magnética sobre q.

14-16 Un circuito filamental cerrado, C, que conduce una corriente constante, I, se encuentra en una región donde **B** es constante. Demostrar que la fuerza total sobre C es igual a cero. Supóngase ahora que C es un circuito plano paralelo a la dirección de **B**. Demostrar que en este caso existirá un momento de torsión no nulo sobre C que será paralelo al plano de C.

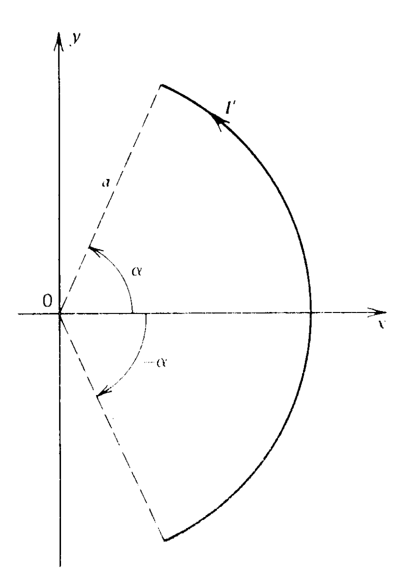


Figura 14-9. La corriente del ejercicio 14-7.

14-17 Demostrar que si todas las corrientes fuente distribuidas ocupan un volumen finito V', la expresión (14-7) para **B** puede ser transformada en

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \mathbf{J}'(\mathbf{r}')}{R} \, d\tau'$$

Este resultado enfatiza la función que desempeñan las faltas de uniformidad de las corrientes fuente en la producción de la inducción. Por lo general, no es conveniente utilizar esta forma.

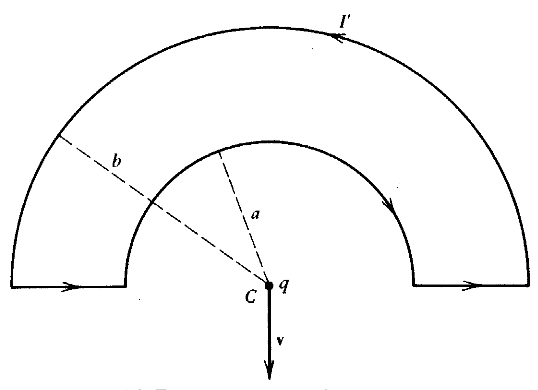


Figura 14-10 El circuito del ejercicio 14-15.

Capítulo

15
Forma integral de la ley de Ampere

La primera ecuación diferencial fuente que se desea considerar es $\nabla \times \mathbf{B}$. La definición general del rotacional de un vector dada en (1-73) sugiere que se debe considerar la integral de línea de **B** sobre alguna trayectoria cerrada.

15.1 Derivación de la forma integral

Se demostrará que

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{enc} \tag{15-1}$$

donde se toma la integral con respecto a una trayectoria cerrada arbitraria C, y I_{enc} es la corriente total que pasa a través de la superficie *encerrada* por la curva C. La trayectoria C puede ser cualquier curva cerrada y *no* necesita coincidir con algún circuito real. A la expresión (15-1) se le conoce como la *forma integral de la ley de Ampere;* otro nombre muy común que se le suele dar es la *ley circuital de Ampere.*

Para simplificar, se empieza suponiendo que **B** es producida por un solo circuito filamental, C', que conduce una corriente I', de manera que **B** está dada por (14-2). Al sustituir esta expresión en el miembro izquierdo de (15-1), se encuentra que

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_C\oint_{C'} \frac{d\mathbf{s}\cdot(d\mathbf{s}'\times\hat{\mathbf{R}})}{R^2} = -\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_C\oint_{C'} \frac{(-d\mathbf{s}\times d\mathbf{s}')\cdot\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \tag{15-2}$$

donde se ha utilizado (1-29) para intercambiar el punto y la cruz en el integrando. Recordando ahora de la sección 1-7 que la magnitud del producto cruz es igual al área del paralelogramo que tiene a los dos vectores como lados, y recordando también (4-3), se puede observar que es necesario analizar (15-2) en función de ángulos sólidos.

La figura 15-1 ilustra la situación general. Supóngase que se considera un punto dado P sobre la trayectoria de integración C. El circuito fuente C' subtenderá algún ángulo sólido total, Ω, en ese punto. Al efectuar la integración sobre C se le dan a P una serie de desplazamientos sucesivos, uno de los cuales es $d\mathbf{s}$. Después de que P ha sido des-

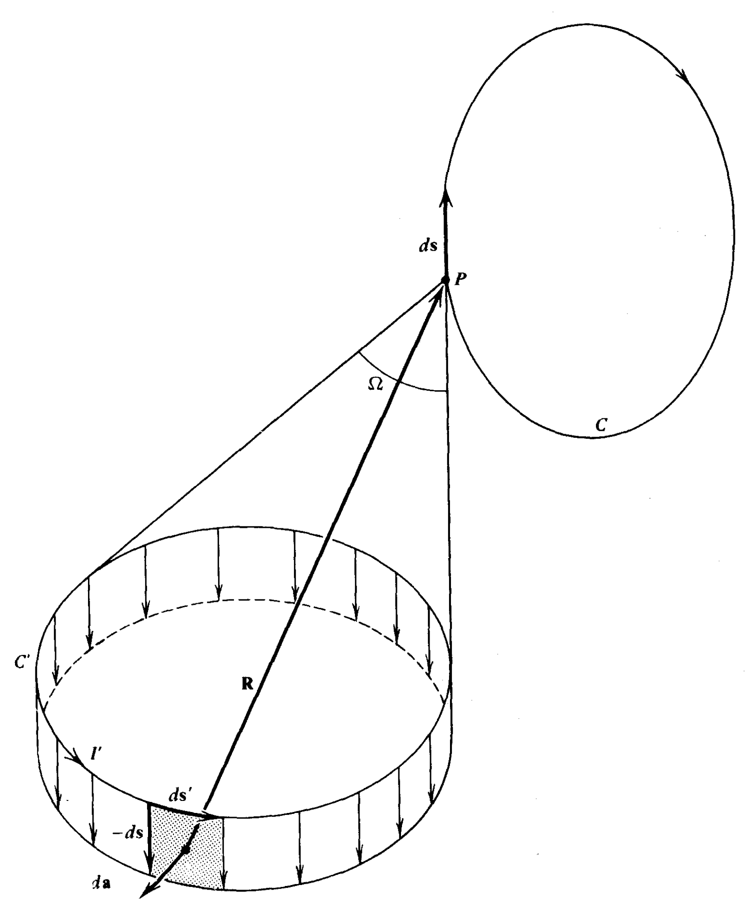


Figura 15-1 Cálculo del cambio en el ángulo sólido subtendido en P producido por un desplazamiento del circuito C'.

plazado por ds, el circuito fuente C', visto desde P, tendrá por lo general un aspecto diferente, de tal forma que el ángulo sólido subtendido por C' en la nueva posición de P habrá cambiado a un nuevo valor $\Omega' = \Omega + d\Omega$. Así, $d\Omega$ =cambio en el ángulo sólido subtendido por C' *en P* como resultado del desplazamiento *de P* por ds. Pero es posible obtener el mismo cambio *relativo* imaginando que P se encuentra fijo y que cada punto de C' recibe un desplazamiento igual y opuesto (-ds). (Puede uno fácilmente convencerse de ello si se mantiene este libro a una distancia razonable de los ojos y se compara el resultado visual de: (1) mantener el libro fijo y mover la cabeza hacia atrás y, (2) mantener la cabeza fija y mover el libro hacia adelante una distancia equivalente). Por lo tanto, se puede decir también que $d\ \Omega$ = cambio en el ángulo sólido producido al mantener a P fijo y desplazar todos los puntos de C' por -ds; la nueva posición y orientación de C' se muestra también en la figura. Se puede ahora observar que $-d\mathbf{s} \times d\mathbf{s}' = d\mathbf{a}$ superficie sombreada de lados -ds y ds$'$, de modo que, de acuerdo con (4-3), el término bajo las integrales de (15-2) es justamente $d\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}/R^2$ = ángulo sólido subtendido *en P* por da = *cambio* en el ángulo sólido subtendido *en P* como resultado del desplazamiento de ds$'$ por ds. Por lo tanto, cuando se efectúa la integración sobre C' en (15-2), se están sumando las contribuciones de todos los ds$'$ de C', de modo que se tiene

$$\oint_{C'} \frac{(-d\mathbf{s} \times d\mathbf{s}') \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} = d\Omega \qquad (15\text{-}3)$$

donde, de nuevo, $d\,\Omega$ es el cambio en el ángulo sólido observado en P debido a un desplazamiento $d\mathbf{s}$ de P, *pero* que se calcula en (15-3) por medio de una suma equivalente sobre C', basada en mantener fijo a P y desplazar a C'. Al sustituir (15-3) en (15-2) y llevar a cabo la integración sobre C, se obtiene

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_C d\Omega = -\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\Delta\Omega \tag{15-4}$$

donde $\Delta\,\Omega$ es el *cambio* total en el ángulo sólido subtendido por C' en los diversos puntos de C, sumando sobre la trayectoria cerrada C. Resulta que existen dos casos a considerar.

1. La trayectoria C no cruza el circuito C'. En este caso, las orientaciones relativas son como las que se muestran en la figura 15-2. Aquí, si se empieza en P, al regresar a P después de haber recorrido la trayectoria C, el ángulo sólido final tiene el mismo valor que tenía en un principio, de modo que $\Delta\Omega = 0$ y (15-4) resulta

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0 \tag{15-5}$$

2. La trayectoria C sí cruza el circuito C'. En este caso, la trayectoria de integración encierra la corriente fuente, teniéndose una situación como la que se ilustra en la figura 15-3. Es más fácil observar el cambio si se toma como punto inicial A el punto justamente por encima de la superficie S' encerrada por C', y como punto final **B** el que se encuentra justamente por debajo de S', tomando después el límite en que B y A coinciden. Antes que nada, se puede observar que la dirección de la normal $\hat{\mathbf{n}}'$ a la superficie limitada por C' queda determinada por la dirección de I' por medio de la regla normal de la mano derecha que se ilustró en la figura 1-24.

(a) En el punto inicial A. En la figura 15-4*a* se puede apreciar que el ángulo formado entre $d\mathbf{a}'$ y $\hat{\mathbf{R}}$ es $\Theta_A = 90°\text{-}\partial$, siendo ∂, muy pequeño y positivo. Así, de acuerdo con (4-3), el ángulo sólido subtendido por $d\mathbf{a}'$ en A será $da' \cos\Theta_A/R^2 = da' \cos(90°\text{-}\,\partial)/R^2$ y es *positivo*. A medida que A se acerca a la superficie S', $\partial \to 0$, todas las contribuciones al ángulo sólido subtendido por C' en A son positivas y, dado que A "ve" sólo la mitad de todo el espacio, se tiene

$$\Omega_{\text{para } A} = \Omega_{\text{inicial}} = +2\pi \tag{15-6}$$

(Para comprender esto mejor, imagínese un observador situado en A justamente sobre esta página y que después se acerca hasta casi tocar la hoja).

(b) En el punto final **B**. En la figura 15-4b se aprecia que el ángulo entre $d\mathbf{a}'$ y $\hat{\mathbf{R}}$ es ahora $\Theta \quad = 90° + \epsilon$, siendo ϵ positivo y muy pequeño. Así, el ángulo sólido subten-

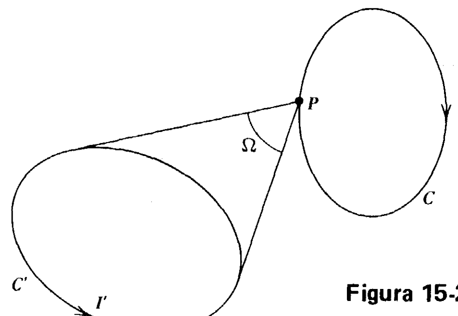


Figura 15-2 La trayectoria C no enlaza al circuito C'.

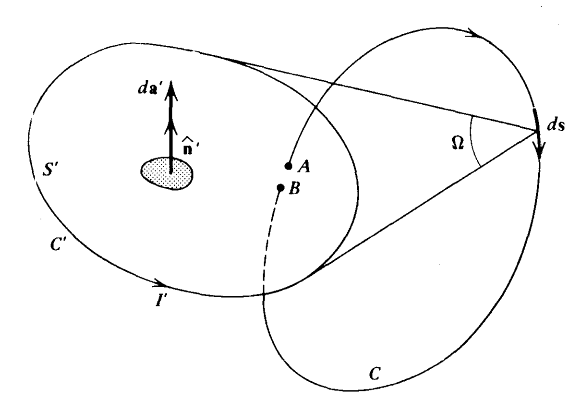


Figura 15-3 La trayectoria C enlaza al circuito C'.

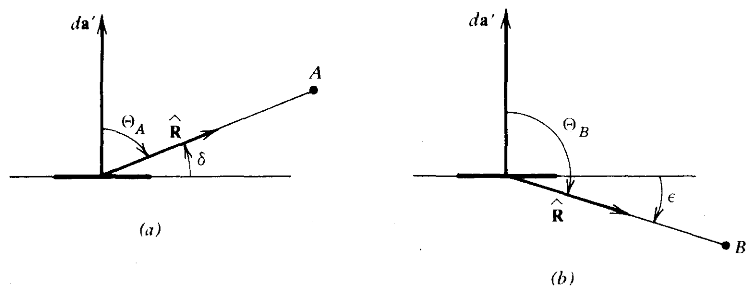


Figura 15-4 La situación cerca de (*a*) el punto inicial A y (*b*) el punto final B.

dido por da' en $\mathbf{B}$ será $da' \cos(90° + \epsilon)/R^B$ y sera *negativo.* A medida que $\mathbf{B}$ se acerca a la superficie, $\epsilon \to 0$, todas las contribuciones al ángulo sólido serán negativas y, dado que $\mathbf{B}$ "ve" sólo la mitad del espacio, se obtiene

$$\Omega_{\text{para } B} = \Omega_{\text{final}} = -2\pi \tag{15-7}$$

Combinando (15-7) con (15-6) se puede encontrar que el cambio total en el ángulo sólido en este caso es igual a

$$\Delta\Omega = \Omega_{\text{final}} - \Omega_{\text{inicial}} = (-2\pi) - (2\pi) = -4\pi \tag{15-8}$$

por lo que (15-4) queda

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I' \tag{15-9}$$

y es igual a μ_0 veces la corriente que pasa a través de la superficie limitada por la curva C. Al comparar (15-5) con (15-9) se puede observar que el valor de esta integral de línea de $\mathbf{B}$ no es igual a cero solamente si la trayectoria de integración encierra una corriente.

Se observa también que si se invierte el sentido de integración a lo largo de C, entonces A y B se intercambian como puntos inicial y final, $\Delta\Omega$ es igual a $+4\pi$ y el valor de la integral es igual a $-\mu_0 I'$, es decir, que la corriente I' se toma como negativa. La figura 15-5 resume estos resultados sobre los signos. Una vez que se ha elegido el sentido de integración sobre C, queda determinado el sentido positivo de su normal, $\hat{\mathbf{n}}$, como en la figura 1-24. Si entonces una corriente I' pasa a través de la superficie limitada por C en este mis-

mo sentido, como se muestra en la parte (*a*) de la figura, resultará una contribución positiva $\mu_0 \cdot I_i$ a la integral, mientras que si pasa a través de *C* en sentido opuesto, como en (*b*), su contribución a la integral es de $-\mu_0 I$. (Nótese que la figura 15-5*a* corresponde a la figura 15-3).

Si existe más de una corriente fuente, de manera que **B** esté determinada por una expresión como (14-4), cada una de las corrientes I_i contribuirá con 0 ó $\pm \mu I_i$, dependiendo de si I_i pasa o no a través de *C* y, si lo hace, del sentido en que lo hace; así se tiene

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \sum_{\substack{i \\ \text{encerrada}}} \mu_0 I_i = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{15-10}$$

donde I_{enc} es la corriente *neta* encerrada por la trayectoria de integración. De esta manera se ha obtenido la forma integral de la ley de Ampere que se enunció originalmente en (15-1). [Nótese la "similitud" de este resultado con la ley de Gauss (4-1)]. Se puede señalar ahora una serie de implicaciones que resultan de todo esto. Caulesquiera corrientes no encerradas por la trayectoria de integración no contribuyen en nada al valor *de la integral,* aunque desde luego afectan el valor de **B** en algún punto particular. También ocurre que la localización de las corrientes encerradas por *C* no afecta a *la integral,* aunque si se movieran de lugar dentro de **C** sí se efectaría el valor de **B** en algún punto en particular sobre la trayectoria de integración.

Se puede expresar ahora (15-10) de otra manera muy útil si se escribe I_{enc} en una función de la densidad de corriente **J** por medio de (12-6). (Por simplificación. aquí se elimina la prima de la densidad de corriente.) Al hacerlo, y usando el teorema de Stokes (1-67), se obtiene

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B})\cdot d\mathbf{a} \tag{15-11}$$

donde *S* es la superficie abierta limitada por *C*. Dado que *C* es arbitraria, (15-11) también es válida para cualquier superficie muy pequeña, por lo que se pueden igualar los integrandos para obtener la ecuación fuente deseada

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{15-12}$$

Este resultado fundamental es equivalente a la ley de Ampere para las fuerzas entre circuitos completos. Se puede observar de inmediato que la inducción magnética no es un campo conservativo porque $\nabla \times$ B no siempre es igual a cero, a diferencia del campo electrostático.

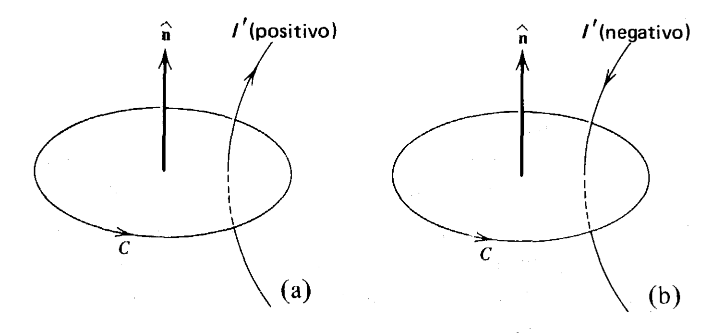


Figura 15-5 Convención de signos para la corriente, según el sentido de integración a lo largo de *C*.

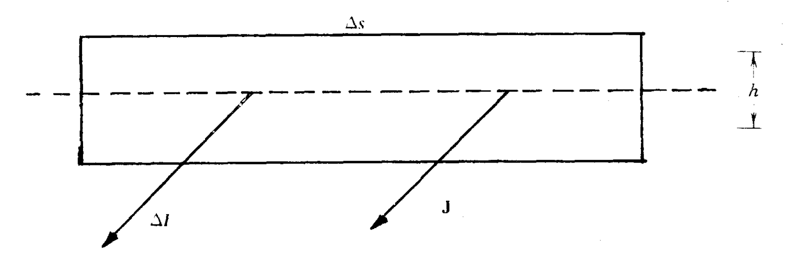


Figura 15-6 Pequeño elemento de superficie en la capa de transición.

Más aún, es posible utilizar (15-12) para obtener las condiciones frontera que las componentes tangenciales de **B** deben satisfacer en una superficie de discontinuidad. Si se sustituye (15-12) en (9-13), se tiene

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \lim_{h \to 0} (\mu_0 h \mathbf{J}) \tag{15-13}$$

Para poder interpretar este resultado, considérese un pequeño elemento de superficie en la capa de transición que sea perpendicular al flujo, tal como se ilustra en la figura 15-6. (compárese con la figura 9-5). De acuerdo con (12-6), la corriente total ΔI a través de esta superficie es $\Delta I = Jh \Delta s$. A medida que la capa de transición se reduce a un grosor de cero, de modo que $h \to 0$, la corriente total es reducida a una *corriente superficial* de densidad K, y el total constante puede ahora expresarse $\Delta I = K \Delta s$, como se aprecia en la figura 12-5*a*. Al comparar estas dos expresiones de ΔI se observa que $hj \to K$, y, puesto que los dos vectores están en la misma dirección se obtiene

$$\mathbf{K} = \lim_{h \to 0} (h\mathbf{J}) \tag{15-14}$$

con lo que (15-13) queda

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \mathbf{K} \tag{15-15}$$

que viene a ser la condición de frontera requerida. Como en el caso de (9-18), se puede utilizar la forma alternativa expresada directamente en función de las componentes tangenciales:

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} \tag{15-16}$$

donde la relación entre los vectores normal y tangencial queda ilustrada por la figura 9-5.

15-2 Algunas aplicaciones de la forma integral

Muy semejante como se hizo con la ley de Gauss en la sección 4-2, si el problema tiene la suficiente simetría es posible utilizar (15-1) para calcular campos **B**. El principal problema viene a ser la correcta elección de la trayectoria de integración. Lo que se debe buscar son curvas en las que **B** tenga una magnitud constante y curvas en las que **B** sea paralela o perpendicular a la trayectoria, tanto por facilidad en la integración como para evitar posibles dificultades originadas por alguna dependencia desconocida de **B** con respecto a la posición.

Este proceso se ilustra por medio de unos cuantos ejemplos.

Ejemplo

Corriente recta infinitamente larga. Supóngase que la corriente I se encuentra distribuida uniformemente sobre la sección circular de radio a de un cilindro infinitamente largo, como se muestra en la figura 15-7. Al revisar la dependencia general de la dirección del campo **B** producido por una corriente como la que se muestra en la figura 14-2, y si se considera la "simetría" general de este problema, se puede concluir que **B** está sobre el plano perpendicular a la dirección de I, que es tangente a todos los puntos del círculo de radio ρ que se muestra con línea punteada y que su magnitud únicamente puede depender de ρ, debiendo ser independiente tanto de z como de φ. En otras palabras, **B** tiene la forma general $\mathbf{B} = B\varphi\ (\rho)\ \hat{\varphi}$. Estas consideraciones son igualmente válidas tanto si se toma un punto de campo dentro del cilindro como fuera de él, siendo éste el caso que se muestra en la figura. Así, para cualquier valor de ρ, tómese como trayectoria de integración una circunferencia de radio ρ y recórrase en el mismo sentido asumido para **B**. De esta manera se tiene que $ds = \rho d\varphi\ \hat{\varphi}$, de acuerdo con (1-82), por lo que (15-1) queda

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} B_\varphi \hat{\varphi}\cdot \rho\, d\varphi \hat{\varphi} = 2\pi\rho B_\varphi = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{15-17}$$

ya que tanto ρ como $B\varphi\ (\rho)$ son constantes sobre la circunferencia. Por lo tanto,

$$B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi\rho} \tag{15-18}$$

1. Fuera del cilindro. Aquí $\rho\ \Delta\ a$ y resulta claro que C encierra la corriente total I, por lo que $I_{enc} = I$ y (15-18) queda

$$B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \qquad (\rho > a) \tag{15-19}$$

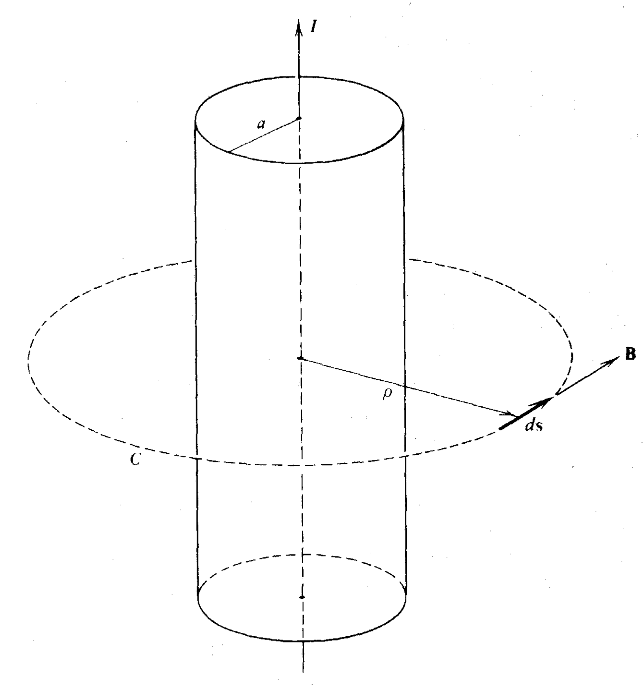


Figura 15-7 Porción de una corriente recta muy larga.

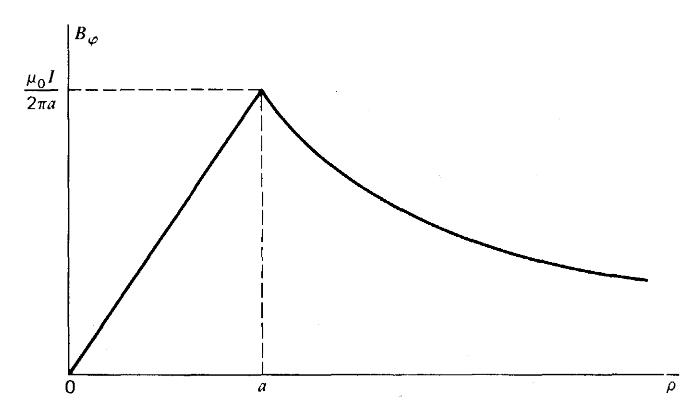


Figura 15-8 $B\varphi$ producida por una corriente recta infinitamente larga, en función de la distancia ρ al eje de la corriente.

Al comparar este resultado con (14-17) y recordar que se eliminó la prima de la corriente fuente, se puede observar que la inducción en el exterior de una corriente recta infinitamente larga es la misma que si la corriente fuera filamental y corriera por el eje del cilindro.

2. Dentro del cilindro. Aquí $\rho \Delta a$, por lo que C no encierra toda la corriente, sino sólo una fracción igual al área circular limitada por C dividida entre el área total de la sección del cilindro. De esta manera $I_{enc}/I = \pi \rho^2/\pi a^2$, es decir $I_{enc} = I(\rho^2/a^2)$, con lo que (15-18) queda

$$B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \qquad (\rho < a) \tag{15-20}$$

[Tanto (15-19) como (15-20) están en concordancia con los resultados obtenidos en el ejercicio 14-14, pero se lograron por un método mucho más sencillo aquí] .

Nótese también que ambas expresiones dan el mismo resultado $B\varphi(a) = \mu_0 I/2\pi a$ en la superficie del cilindro, de modo que $\mathbf{B}\varphi$ es continua ahí. Ello concuerda con (15-16) ya que B únicamente tiene componentes tangenciales en este caso y no existe corriente superficial **K** sobre el cilindro. La figura 15-8 ilustra la dependencia de $\mathbf{B}\varphi$ con respecto a ρ.

Ejemplo

Plano infinito de corriente uniforme. La figura 15-9 muestra una vista de perfil de un plano infinito de corriente en la que **K** sale de la página. Se supone que $|\mathbf{K}| = K =$ const.; una aproximación de este tipo de distribución de corrientes se podría lograr por medio de un conjunto de alambres paralelos dispuestos muy cerca unos de otros y todos conduciendo la misma corriente. Dado que no existe preferencia alguna para tener ángulos hacia arriba o hacia abajo de la horizontal, ni hacia afuera o hacia adentro de la página, se puede concluir que **B** es perpendicular a **K**, que es paralela al plano de corriente, y que tiene direcciones opuestas en ambos lados de él, como se puede observar en la figura 14-2. Sin embargo, **B** puede todavía ser función de la distancia D perpendicular al plano. Por todo lo anterio, se elige para la integración la trayectoria rectangular que se ilustra con línea punteada; los dos lados horizontales tienen una longitud l y se encuentran a la misma distancia D del plano; dos lados verticales de longitud $2D$ los conectan entre sí. Sobre los lados horizontales **B** es paralela a $d\mathbf{s}$, de modo que $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(D)ds$ y $B(D)$ es constante. Sobre los verticales **B** resulta perpendicular a $d\mathbf{s}$ por la propia construcción de la trayectoria, de modo que $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$, por lo que no hay contribuciones a la integral de parte de estos lados; esto resulta ser vantajoso ya que se desconoce la

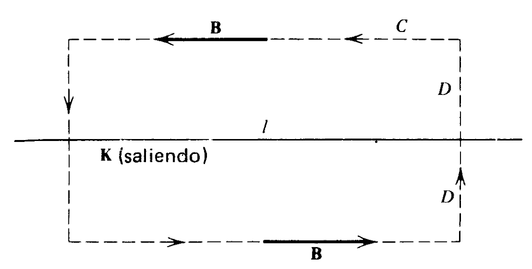


Figura 15-9 Trayectoria de integración para encontrar el campo **B** producido por un plano infinito de corriente uniforme.

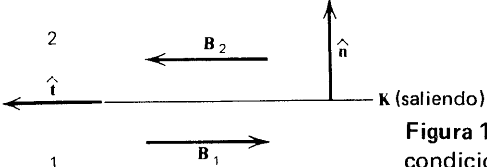


Figura 15-10 Geometría utilizada para verificar las condiciones de frontera en **B**.

forma de $B(D)$. Dado que $|\mathbf{K}|$ es corriente por unidad de longitud, se tiene que $I_{enc} = Kl$ para esta trayectoria, con lo que (15-1) queda

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2Bl = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 Kl$$

de modo que

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0 K \tag{15-21}$$

lo que está en exacta concordancia con el resultado obtenido por integración directa en (14-26). Aquí se ha podido una vez más encontrar que la magnitud de **B** es independiente de la distancia al plano de corriente.

Este resultado también concuerda con la condición de frontera 915-16) ya que, por la figura 15-10, se puede observar que dicha condición se convierte en $\mathbf{B}_{2t}$ - $\mathbf{B}_{1t} = B\hat{\mathbf{t}}$ - $(-B\hat{\mathbf{t}}) = 2B\hat{\mathbf{t}} = \mu_0$ $\mathbf{K} \,\mathrm{X} \hat{\mathbf{n}} = \mu_0$ $K\hat{\mathbf{t}}$, de modo que $\mathbf{B} = 1\&2\ \mu_0\ K$ como antes.

Ejemplo

Solenoide ideal infinitamente largo. Supóngase que las vueltas del solenoide cilíndrico están enrolladas tan apretadamente y que los alambres son tan delgados, que se puede despreciar el ángulo de inclinación de las vueltas. En este caso, de hecho se tiene una corriente plana de densidad superficial K circulando alrededor del cilindro, como se indica en la figura 15-11. Si hay n vueltas por unidad de longitud e I es la corriente en ellas, la corriente por unidad de longitud será nI, de manera que

$$K = nI \tag{15-22}$$

Si, además, se supone el solenoide infinitamente largo, se puede concluir que **B** será paralela al eje del cilindro y en el sentido ilustrado. En la figura, $\mathbf{B}_i$ es la inducción dentro del solenoide, mientras que $\mathbf{B}_0$ es la inducción en su exterior; ambos valores deben ser independientes de z por ser el solenoide infinitamente largo, lo cual hace que un valor dado de z sea tan válido como cualquier otro. Se vuelve a elegir la trayectoria de integración rectangular C que se muestra con línea punteada; los lados verticales tienen una longitud l y el sentido de integración es paralelo a $\mathbf{B}_i$ y antiparalelo a $\mathbf{B}_0$. El lado vertical que se encuentra en el interior está a una distancia d del plano de corriente y el lado vertical ex-

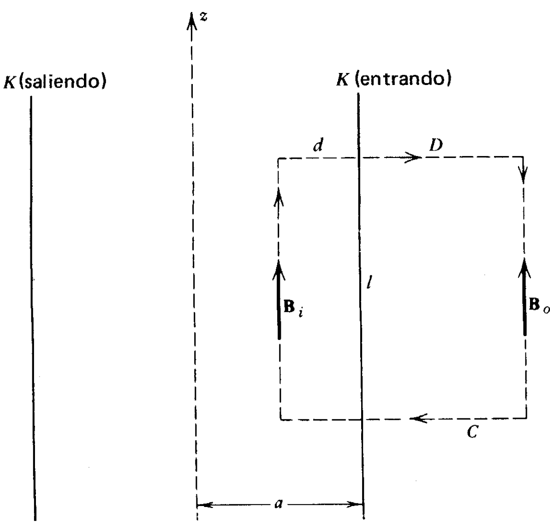


Figura 15-11 Trayectoria de integración para encontrar el campo **B** producido por un solenoide ideal infinitamente largo.

terior se encuentra a una distancia D del mismo. La longitud de los lados horizontales es $d + D$; dado que ds es perpendicular a $\mathbf{B}$ en estos lados, $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$ y su contribución a la integral nula. Además $I_{enc} = Kl = nIl$; por tanto, (15-1) queda

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_i l - B_o l = \mu_0 K l = \mu_0 n I l$$

de manera que

$$B_i - B_o = \mu_0 K = \mu_0 n I \tag{15-23}$$

En este resultado se puede observar que la inducción es independiente tanto de d como de D; por lo tanto, (15-23) también está en concordancia con (15-16), siempre que se elija la región 1 fuera y la región 2 dentro del solenoide.

Ya que (15-23) es independiente de D, dicha ecuación deberá ser cierta también para el caso en que $D \to \infty$. Pero en este caso, si se observa el solenoide desde un punto muy alejado, el efecto resultante es que las dos corrientes opuestas se ven superpuestas, pero el resultado experimental de Ampere indica que en tal caso el efecto que éstas pueden producir es despreciable. Por lo tanto, para $D \to \infty$, $B_0 = 0$ y en este caso (15-23) resulta

$$B_i = \mu_0 K = \mu_0 n I \tag{15-24}$$

Si se vuelve a sustituir esto en (15-23), lo que es posible porque se supone que es cierta para cualquier D, se encuentra que

$$\mathbf{B}_o = 0 \qquad \text{(en todo lugar)} \tag{15-25}$$

Es más, dado que los resultados (15-23) y (14-24) son también independientes de d, se puede concluir que

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 K \hat{\mathbf{z}} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} \qquad \text{(en todo lugar)} \tag{15-26}$$

En otras palabras, en el caso de un *solenoide ideal infinitamente largo* la inducción queda confinada enteramente a su interior y es *uniforme* en toda su sección; es también indepen-

diente de a, el radio del cilindro. [El resultado (15-24) concuerda con el obtenido antes en (14-24); sin embargo, en este último caso sólo se había obtenido el valor sobre el eje del solenoide y ahora se aprecia que es el mismo para todos los puntos de su interior].

Ejemplo

Bobina toroidal. Este es el caso de una corriente I en un conductor que se enrolla uniformemente, es decir, con ángulo de inclinación constante alrededor de un anillo (toroide), como se muestra en la figura 15-12, en la que se ilustran solamente unas cuantas vueltas. La sección del toroide puede ser circular o rectangular, por ejemplo. (Se puede pensar que esta configuración se logra tomando un solenoide de longitud finita y doblándolo en la forma de una dona, es decir, conectando sus extremos). No es posible que (15-1) dé toda la información acerca de **B** en este caso, por lo que aquí sólo se consideran trayectorias circulares de radio ρ centradas en el centro del anillo y que se encuentran sobre el plano que contiene al eje central del toroide. Para *cualquier* trayectoria circular tal, $d\mathbf{s} = \rho d\varphi\hat{\varphi}$ por lo que (15-1) queda

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{B}\cdot\hat{\varphi}\rho\, d\varphi = B_\varphi \cdot 2\pi\rho = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

de manera que

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi\rho} \tag{15-27}$$

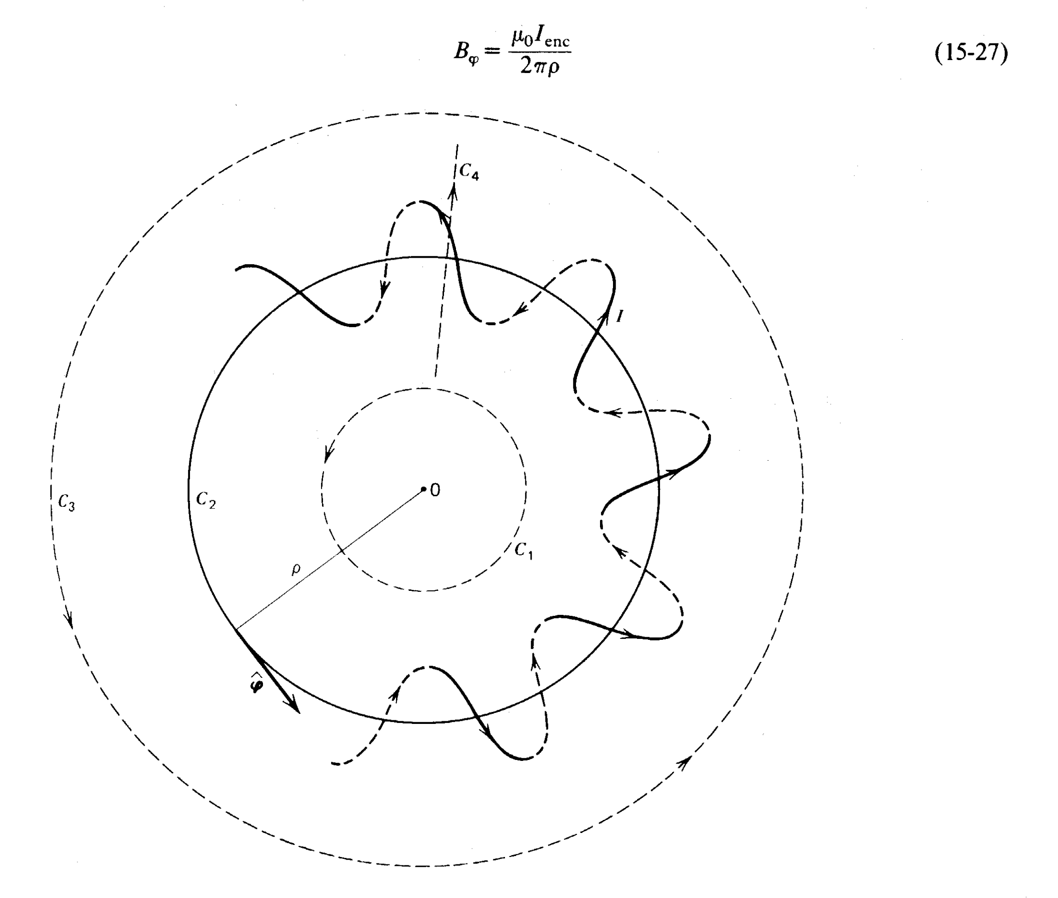


Figura 15-12 Bobina toroidal y trayectorias de integración utilizadas para calcular la inducción que produce.

ya que, por simetría $B\varphi$ es función exlusivamente de ρ y será constante en toda la trayectoria.

Para el caso de una trayectoria dentro del círculo definido por la frontera interior del toroide, como C_1, por ejemplo, $I_{enc} = 0$, por lo que $B\ \varphi = 0$. Para una trayectoria dentro del toroide, tal como C_2, $I_{enc} = NI$. siendo N el número total de vueltas, con lo que (15-27) da

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho} \tag{15-28}$$

Por último, para una trayectoria completamente exterior al toroide, tal como C_3, resulta que I_{enc} $||NI - NI = 0$, de acuerdo con la figura 15-5, ya que para cada corriente I hacia afuera de la página necesariamente existe otra igual hacia dentro de la página. Por lo tanto, $B\varphi \neq 0$ únicamente en el interior del propio toroide.

Si las dimensiones de la sección del toroide son muy pequeñas en comparación con su radio central, entonces $\rho \simeq$ const. para todas las trayectorias C_2, por lo que $B\varphi$ será aproximadamente constante en toda su sección.

Estos cálculos no proporcionan información alguna acerca de $B\varphi$ y de B_z; éstas deben encontrarse por cálculo directo a partir de la ley de Biot-Savart (14-2). No se realizarán dichos cálculos aquí, pero baste saber que resultan ser del orden de magnitud de $B\varphi/N$; así, es posible hacerlas despreciables si se utiliza un gran número de vueltas, es decir, si el enrollado es muy apretado. Sin embargo, pueden hacerse varias observaciones considerando una trayectoria de integración como la que se muestra con el símbolo C_4 en la figura 15-13. Se trata de una trayectoria que encierra completamente al toroide en un plano perpendicular a su eje, es decir, en el plano φ = consta.; la traza de esta trayectoria también se muestra en la figura15-12. Se puede observar que para cualquier ángulo de inclinación finito del enrollado, que corresponde a un número finito, N, de vueltas, solamente una vuelta pasará a través del plano limitado por C_4; de esta manera, $I_{enc} = I$. El valor de ds, dado por (1-82) con $d\varphi = 0$ es $d\mathbf{s} = d\rho\hat{\rho} + dz\hat{z}$, con lo que (15-1) se convierte en

$$\oint_{C_4} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_4} (B_\rho d\rho + B_z dz) = \mu_0 I \tag{15-29}$$

Dado que esto no es igual a cero, se puede concluir que $B\varphi$ ó B_z o ambas deben ser diferentes de cero en por lo menos algunas porciones de C_4. Además, el valor de esta integral es N veces más pequeño que el de $B\varphi$ como se puede observar en (15-28), de modo que para dimensiones de trayectoria comparables, la magnitud de $B\varphi$ y/o de B_z será aproximadamente del orden de $B\varphi/N$ como se enunció arriba.

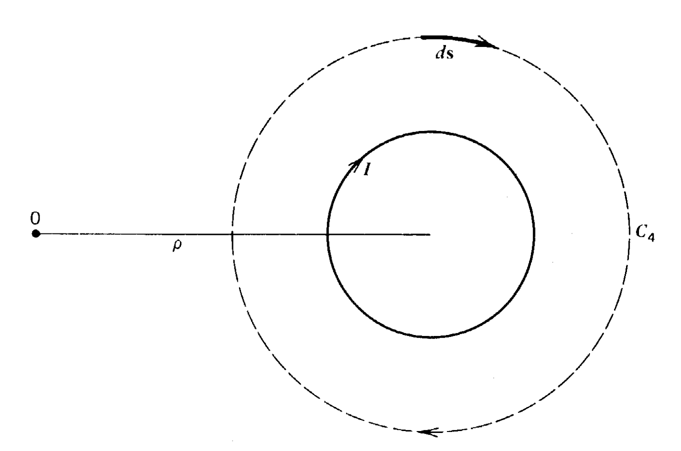


Figura 15-13 Trayectoria de integración en un plano perpendicular al eje del toroide.

15-3 Cálculo directo de $\nabla \times \mathbf{B}$

Aunque en (15-12) ya se encontró el rotacional de **B**, se le obtuvo de una manera muy directa. Es interesante ver que este mismo resultado puede lograrse al operar directamente sobre la ecuación básica de la definición de **B**. Para ello es conveniente utilizar la expresión (14-7) en función de una distribución continua de corriente. Al obtener el rotacional de esta expresión se tiene

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}'(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}\, d\tau'}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}'(\mathbf{r}')\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right] d\tau' \quad (15\text{-}30)$$

donde fue posible pasar del segundo al tercer término debido a que los límites de la integración dependen de las coordenadas de puntos fuente (x', y', z'), mientras que ∇ involucra derivadas con respecto a las coordenadas de puntos de campo (x,y,z). Si ahora se utiliza (1-121), se encuentra que la cantidad dentro de la integral es

$$\mathbf{J}'(\mathbf{r}')\left[\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)\right] - \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)[\nabla\cdot\mathbf{J}'(\mathbf{r}')] + \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\cdot\nabla\right)\mathbf{J}'(\mathbf{r}') - [\mathbf{J}'(\mathbf{r}')\cdot\nabla]\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)$$
$$= \mathbf{J}'(\mathbf{r}')\left[\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)\right] - [\mathbf{J}'(\mathbf{r}')\cdot\nabla]\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right) \quad (15\text{-}31)$$

en la que el segundo y tercer términos son iguales a cero porque cualquier componente de ∇ que opera sobre $\mathbf{J}'$ dará cero, ya que $\mathbf{J}'$ depende exclusivamente de las componentes de $\mathbf{r}'$. Una vez obtenida (15-31), se puede utilizar (1-134) para pasar de ∇ a ∇ en el *segundo* término del miembro derecho, a fin de obtener un integrando que únicamente sea función de las coordenadas primas y se puede así efectuar la integración; el primer término no se altera. Procediendo así y sustituyendo el resultado en (15-3) se encuentra que

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \mathbf{J}'(\mathbf{r}')\left[\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)\right]d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}[\mathbf{J}'(\mathbf{r}')\cdot\nabla']\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)d\tau' \quad (15\text{-}32)$$

Se puede demostrar que la segunda integral es igual a cero si se le escribe de nuevo por medio de (1-131).

$$\int_{V'}[\mathbf{J}'\cdot\nabla']\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)d\tau' = -\int_{V'}\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)(\nabla'\cdot\mathbf{J}')d\tau' + \oint_{S'}\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)(\mathbf{J}'\cdot d\mathbf{a}') \quad (15\text{-}33)$$

Dado que únicamente se están tomando en cuenta corrientes constantes, $\nabla'\cdot\mathbf{J}' = 0$ debido a (12-15), con lo que la integral de volumen se anula. Ahora la distribución de corrientes fuente ocupa un volumen finito; en consecuencia, la superficie limitante S' puede siempre elegirse lo suficientemente grande para que $\mathbf{J}'(\mathbf{r}') = 0$ en todos los puntos de S', por lo que la integral de superficie también se anula. Por lo tanto, como ya se había dicho, la integral en (15-33) es cero, con lo que (15-32) se reduce a

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\mathbf{J}'(\mathbf{r}')\left[\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)\right]d\tau' \quad (15\text{-}34)$$

La componente x de esta ecuación tiene *exactamente* la misma forma de (4-23), con μ_0 $\mathbf{J}'_x$ en lugar de ρ/ϵ_0, el resultado de la integración de (4-23) fue (4-26), de manera que se tiene

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} J_x'(\mathbf{r}')\left[\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}\right)\right]d\tau' = \mu_0 J_x'(\mathbf{r}) \tag{15-35}$$

y expresiones similares para las componentes y y z de (15-34). Sumando estos resultados y después quitando la prima de $\mathbf{J}'$ para estar de acuerdo con la notación estándar convenida, se tiene que es exactamente lo mismo que se encontró antes en (15-12).

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0[J_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + J_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + J_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}}] = \mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}) = (\nabla\times\mathbf{B})_{\text{at } \mathbf{r}}$$

Ejercicios

15-1 Un círculo de radio a descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Encontrar el ángulo sólido Ω subtendido por este círculo en un punto sobre el eje z positivo.

15-2 Considérese la inducción **B** producida por una corriente I recta, infinitamente larga. Tómese una trayectoria cerrada conveniente, C, en el plano perpendicular a la corriente y que no encierra a dicha corriente. Demostrar por integración directa que (15-5) es correcta en este caso.

15-3 Aplicar (15-1) al caso de un círculo de radio $\rho < a$ cuyo plano sea perpendicular al eje z del solenoide de la figura 15-11, y demostrar así que 9B $B\varphi = 0$ en su interior.

15-4 Aplicar (15-1) al caso de un círculo de radio $\rho > a$ cuyo plano sea perpendicular al eje z del solenoide de la figura 15-11, y demostrar así que, si el enrollado tiene un ángulo finito, el valor promedio de $B\varphi$ sobre el círculo es igual a $\mu_0\ I/2\pi\rho$.

15-5 Encontrar otra distribución de corriente que produzca la misma $B\varphi$ en un toroide como el que se calculó en (15-28).

15-6 Una bobina toroidal de N vueltas está enrollada sobre una sección circular de radio b. Si el radio del eje central es a, es decir, que ésta es la distancia del centro 0 al centro de la sección, encontrar la relación b/a que se requiere para que la desviación total de $B\varphi$ en la sección no sea mayor del 2 % de su valor en el centro.

15-7 Considérense los conductores cilíndricos coaxiales infinitamente largos de la figura 6-12. El conductor interior lleva una corriente total I en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, mientras que el conductor exterior lleva la misma corriente I pero en la dirección - $\hat{\mathbf{z}}$. Supóngase que las corrientes se encuentran distribuidas uniformemente sobre sus respectivas secciones. Encontrar **B** en todo lugar y graficar los resultados en función de ρ.

15-8 Un determinado campo **B** está dado en coordenadas cilíndricas como $\mathbf{B} = 0$ para $0 < \rho < a$, $\mathbf{B} = (\mu_0\ I/2\ \pi\ \rho)\ [(\rho^2 - a^2)\ /\ (b^2 - a^2)\ ]\ \hat{\varphi}$ para $a < \rho < b$, y $\mathbf{B} = (\mu_0\ {}^1/_2\ \pi\rho)\ \hat{\varphi}$ para $b < \rho$. Encontrar la densidad de corriente **J** en todo lugar. ¿Cómo se podría producir una **B** de este tipo?

15-9 Considérese un haz cilíndrico muy largo de partículas cargadas. El haz tiene una sección circular de radio a, una densidad de carga uniforme ρ_{ch}, y las partículas se mue-

ven a la misma velocidad constante **v**. Encontrar **B** dentro y fuera del haz y expresar los resultados en función de estas cantidades dadas.

15-10 Dos superficies cilíndricas coaxiales, infinitamente largas, tienen al eje z como eje común. La superficie interior, de radio a, conduce una corriente superficial $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1\ \hat{\varphi}$, mientras que la superficie exterior, de radio b, conduce una corriente superficial $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2\ \hat{\varphi}$. Tanto K_1 como K_2 son constantes. Encontrar **B** en todo lugar.

15-11 En la figura 15-14 se ilustra una porción de una región libre de corrientes en la que **B** es uniforme. Demostrar que una inducción de este tipo no puede bajar repentinamente a cero, como se indica esquemáticamente por la posición de las flechas, aplicando (15-1) a la trayectoria rectangular mostrada en líneas punteadas. Demostrar cualitativamente que un cambio en **B** de la naturaleza general que se ilustra en la figura 6-10 sí sería compatible con (15-1).

15-12 Demostrar que se puede obtener (15-12) por cálculo directo del rotacional de la expresión de **B** dada en el ejercicio 14-17.

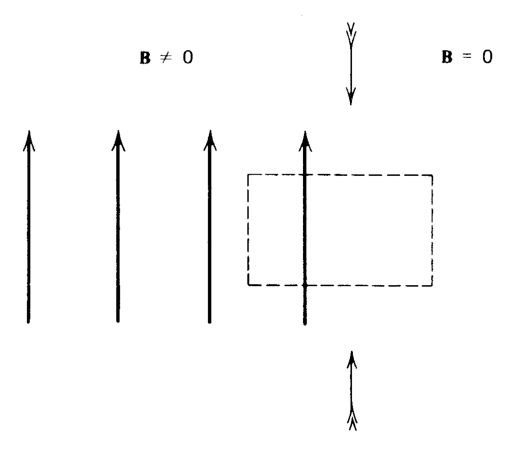


Figura 15-14 Líneas de **B** hipotéticas para el ejercicio 15-11.

Capítulo

16
Potencial vectorial

La ecuación diferencial fuente que falta por calcular para la inducción es $\nabla \cdot \mathbf{B}$. Es mucho más facil obtener ésta que lo que resultó el caso de $\nabla \times \mathbf{B}$. Después de haberla encontrado, se verá que es posible expresar mucho de la misma información que antes en función de un nuevo campo vectorial que se introducirá más adelante.

16-1 Divergencia de B

El método directo resulta bastante sencillo en este caso. Si se utiliza la definición de **B** en función de una corriente filamental, (14-2), se encuentra que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right] = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \cdot \left[\frac{d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right] \tag{16-1}$$

ya que aquí también los límites de integración dependen sólo de $\mathbf{r}'$, mientras que ∇ opera sobre las componentes de **r** Se puede utilizar (1-118) para escribir el integrando como

$$\nabla \cdot \left[d\mathbf{s}' \times \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) \right] = \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) \cdot (\nabla \times d\mathbf{s}') - d\mathbf{s}' \cdot \left[\nabla \times \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) \right] \tag{16-2}$$

Aquí $d\mathbf{s}'$ es función solamente de las componentes de $\mathbf{r}'$, por lo que se puede considerar como constante en lo que respecta a ∇; así, $\nabla \times d\mathbf{s}' = 0$. Al utilizar (1-143) y (1-48) se puede ver que $\nabla \times (\hat{\mathbf{R}}/R^2) = -\nabla \times \nabla (1/R) = 0$. Por lo tanto, (16-2) es idéntico a cero con lo que (16-1) queda exactamente como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{16-3}$$

Resulta evidente que esto también es verdad en el caso de más de una fuente filamental, siendo **B** dada por (14-4); el caso de corrientes distribuidas queda como ejercicio.

Ya que se tiene (16-3), se puede inmediatamente obtener la condición de frontera que las componentes normales de **B** deben satisfacer en una superficie de discontinuidad, encontrándose por medio de (9-6) y (9-7) que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = B_{2n} - B_{1n} = 0 \tag{16-4}$$

de modo que las componentes normales de **B** son siempre continuas.

Este importante resultado, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, es una de las ecuaciones de Maxwell. Ya se verá más adelante que no existe situación en donde se deba cambiar, ni siquiera cuando se estudien campos no estáticos, por lo que (16-4) será también generalmente correcta. Se puede obtener una interpretación de (16-3) si ésta se compara con la ecuación análoga para el caso del campo eléctrico, (4-10), o sea, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Aquí ρ es la densidad de carga neta y aparece porque la carga eléctrica existe en unidades individuales de signo opuesto, de manera que es posible tener $\rho \neq 0$ cuando haya exceso de un signo o del otro. Pero (16-3) implica que una situación tal no puede darse en el caso magnético y por lo tanto no pueden existir unidades individuales de carga magnética análogas a las de carga eléctrica. A dichas cargas magnéticas se les da el nombre de *monopolos magnéticos*. Aun cuando se ha demostrado que su existencia es compatible con los requerimientos de la mecánica cuántica, toda búsqueda experimental para comprobar su existencia ha fracasado. En consecuencia, hasta que no se llegue a demostrar sin lugar a duda que tales monopolos magnéticos existen en realidad, se deberá seguir escribiendo $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, recordando que las fuentes de **B** son siempre *corrientes*.

Si se combina (16-3) con el teorema de la divergencia (1-59), se encuentra que

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{16-5}$$

lo que significa en el flujo de **B** a través de *cualquier superficie cerrada* es siempre igual a cero. Al expresar lo anterior en función de las líneas de **B**, (16-5) indica que no existen líneas netas de **B** que atraviesen cualquier superficie cerrada, o sea, que el número de líneas que entran a ella será igual al que salen de ella; por lo tanto, la figura 16-1 ilustra la situación general de lo que ocurre. Esto contrasta con el caso eléctrico pues para éste las líneas de **E** pueden iniciarse o terminar en una carga, como se muestra, por ejemplo, en la figura 8-7.

Sin embargo, resulta de gran utilidad considerar la integral de superficie de **B** con respecto a una superficie que *no* es cerrada. Si Φ es el *flujo magnético* que atraviesa una superficie S, por definición se tiene que

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{16-6}$$

que puede muy bien ser diferente de cero. Dado que **B** se mide en weber/metro^2, la unidad del flujo es el weber.

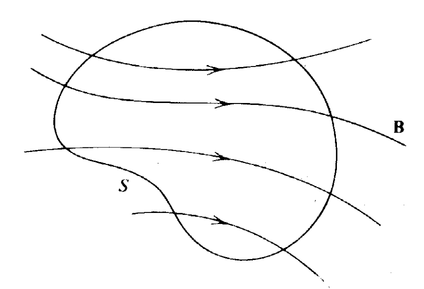


Figura 16-1 El flujo neto de **B** a través de la superficie cerrada S es cero.

16-2 Definición y propiedades del potencial vectorial

Al comparar (16-3) con el teorema vectorial general (1-49), que establecen que la divergencia del rotacional es siempre igual a cero, resulta lógico sospechar que debe ser posible escribir

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tag{16-7}$$

Al campo vectorial A(r) que se introduce así se le da el nombre de *potencial vectorial*. Más adelante se podrá apreciar que desde muchos puntos de vista es una especie de análogo del potencial escalar φ. De (16-7) se puede deducir que la unidad del **A** es 1 weber/metro = 1 volt-segundo/metro.

Para que (16-7) tenga alguna utilidad, debe ser posible encontrar una manera explícita para calcular A en función de una determinada distribución de corrientes fuente. Esto se logra demostrando directamente que la ecuación que define a **B** puede, de hecho, expresarse de esta manera. Si se usan (1-143) y (1-120), se tiene que

$$\frac{d\mathbf{s}' \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} = -d\mathbf{s}' \times \nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{s}'}{R}\right) - \frac{(\nabla \times d\mathbf{s}')}{R} = \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{s}'}{R}\right) \tag{16-8}$$

dado que $\nabla \times d\mathbf{s}' = 0$ como antes. Sustituyendo en (14-2) se obtiene

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \times \left(\frac{d\mathbf{s}'}{R}\right) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0 I'}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\mathbf{s}'}{R}\right) \tag{16-9}$$

al utilizar el hecho de que ∇ opera únicamente sobre las componentes de **r**. Se puede observar que (16-9) sí tiene la forma de (16-7) y que, por comparación, se puede definir **A** para esta corriente filamental como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I' d\mathbf{s}'}{R} \tag{16-10}$$

Si existen más de una corriente filamental fuente, se puede aplicar (16-8) a cada uno de los términos de (14-4) para que la resultante de **A** quede dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \frac{I_i d\mathbf{s}_i}{R_i} \tag{16-11}$$

donde $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. De esta manera se ha logrado demostrar que **B** puede expresarse en la forma (16-7) y además, se ha encontrado un método para calcular **A**. Nótese que la distribución de cada elemento de corrientes $I_i d\mathbf{s}_i$ a **A** se encuentra en la dirección del propio elemento.

Si en lugar de corrientes filamentales se tuvieran corrientes distribuidas, se podrían utilizar los equivalentes (12-10) para adaptar (16-10); así se encuentra que los potenciales vectoriales producidos por corrientes volumétricas y superficiales están dados, respectivamente, por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\tau'}{R} \tag{16-12}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')da'}{R} \tag{16-13}$$

mientras que el producido por una sola carga puntual en movimiento se obtiene al combinar (14-29) con el integrando de (16-10) para tener

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}}{R} \tag{16-14}$$

[Como en la sección 14-5, se usará (16-14) únicamente para el caso en que $|\mathbf{v}|\ll c$.]

La idea general detrás de todo esto es la de usar las expresiones logradas arriba para encontrar **A** y después encontrar **B** por diferenciación, de acuerdo con (16-7), de manera que el procedimiento sería, en este aspecto, análogo al que se utilizó en electrostática.

Resulta de gran interés encontrar la divergencia de **A**. Al realizar el producto punto de ∇ con (16-10), se obtiene

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\nabla\cdot\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C'}\frac{I'\,d\mathbf{s}'}{R}\right)=\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_{C'}\nabla\cdot\left(\frac{d\mathbf{s}'}{R}\right) \tag{16-15}$$

y, al utilizar (1-117), (1-143) y (1-16), se encuentra que

$$\nabla\cdot\left(\frac{d\mathbf{s}'}{R}\right)=d\mathbf{s}'\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)+\frac{1}{R}(\nabla\cdot d\mathbf{s}')=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\cdot d\mathbf{s}' \tag{16-16}$$

ya que $\nabla\cdot d\mathbf{s}'=0$ por la razón conocida. Si se sustituye (16-16) en (16-15) y se utiliza después (1-67) se obtiene

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=-\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\oint_{C'}\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\cdot d\mathbf{s}'=-\frac{\mu_0 I'}{4\pi}\int_{S'}\left[\nabla'\times\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\right]\cdot d\mathbf{a}'$$

Pero de acuerdo con (1-48) el integrando es siempre igual a cero y, por lo tanto,

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0 \tag{16-17}$$

Aunque (16-17) se obtuvo para una sola corriente filamental, se puede observar que sigue válida para más de una corriente fuente, o sea, cuando **A** está dada por (16-11).

A pesar de que ya se cuenta con la forma integral (16-12) para calcular **A** a partir de una distribución de corriente conocida, resulta útil obtener la ecuación diferencial que **A** debe satisfacer en caso de que la información esté dada en otra forma, como ocurrió tan a menudo con ϕ en el capítulo 11. Al obtener el rotacional de ambos miembros de (16-7) y utilizar (1-122), (16-17) y (15-12), se obtiene

$$\nabla\times\mathbf{B}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}=-\nabla^2\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J}$$

de manera que

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J} \tag{16-18}$$

lo que en coordenadas rectangulares viene a ser

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \qquad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \qquad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \tag{16-19}$$

Si se compara esto con (11-1) se puede observar que cada una de las componentes rectangulares de **A** satisface la ecuación de Poisson.

Si en este momento se cambia el punto de vista, se puede considerar que (16-7) y (16-17) son dos ecuaciones diferenciales fuente para **A**, en el sentido del teorema de Helmholtz de la sección 1-18. En este caso se pueden encontrar de inmediato las condiciones de frontera que las componentes de **A** deben satisfacer en una superficie de discontinuidad de propiedades. De (16-17) y (9-6) se encuentra que

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1) = A_{2n} - A_{1n} = 0 \tag{16-20}$$

de modo que las componentes normales son continuas. Si ahora se sustituye (16-7) en (9-13), se obtiene

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{A}_2-\mathbf{A}_1) = \lim_{h\to 0}(h\mathbf{B}) = 0 \tag{16-21}$$

ya que, sea cual fuere el comportamiento de **B** en la capa de transición, existe la certeza de que **B** debe permanecer *finita* a medida que el grosor de la capa de transición se reduce a cero, por lo que $h\mathbf{B}\to 0$ a medida que $h\to 0$. De esta manera se concluye que las componentes tangenciales de **A** son también continuas. Pero cuando todas las componentes de un vector son continuas el vector mismo resulta continuo a través de esa superficie, por lo que se puede concluir que

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \tag{16-22}$$

en perfecta analogía con la continuidad del potencial escalar ϕ expresada por (9-29).

El flujo magnético, Φ, puede expresarse también en función del potencial vectorial. Si se sustituye (16-7) en la definición (16-6) y se utiliza el teorema de Stokes (1-67), se encuentra que

$$\Phi = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} \tag{16-23}$$

lo que demuestra que el flujo puede escribirse como la integral de línea de **A** con respecto a una curva limitante de la superficie para la que se desea obtener Φ. En algunas ocasiones (16-23) viene a ser una alternativa para calcular **A** cuando es fácil conocer Φ a partir de alguna solución previa y cuando el problema tiene la simetría suficiente como para encontrar una trayectoria C conveniente.

Todas las cantidades que en la física reciben el nombre de "potenciales" implican por lo general una cierta ambigüedad relacionada con su valor absoluto, pues por lo común se les introduce como funciones a partir de las cuales se puedan calcular otras funciones de interés por medio de la diferenciación. Esto se vio en el caso del potencial escalar discutido en relación con (5-10), siendo ése indeterminado hasta una constante escalar aditiva. En el caso del potencial vectorial existe una situación similar, pero más complicada. Si se

revisa el argumento que se utilizó para pasar de (16-9) a (16-10) por medio de (16-7), y si se recuerda el resultado vectorial general (1-48) en el sentido de que el rotacional del gradiente de un escalar es siempre igual a cero, se observará que se puede añadir el gradiente de un escalar arbitrario a (16-10) y aún así obtener el mismo resultado. Para hacer esto más explícito, supóngase que **A** es un potencial vectorial "adecuado", es decir, que da el valor correcto de **B** cuando se le usa en $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Supóngase ahora que $\mathbf{A}^\dagger$ es otra función dada por

$$\mathbf{A}^\dagger(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}) \tag{16-24}$$

donde $\chi(\mathbf{r})$ es un campo escalar, pero por lo demás es arbitrario. La inducción $\mathbf{B}^\dagger$ que corresponde a $\mathbf{A}^\dagger$ se obtiene de (16-7) y (1-48) y es

$$\mathbf{B}^\dagger = \nabla \times \mathbf{A}^\dagger = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\chi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{16-25}$$

De esta manera se ve que ambas inducciones son idénticas. Sin embargo, la propiedad $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ fue consecuencia directa de la definición original (16-10), y condujo a la muy conveniente condición de continuidad (16-22) y a la ecuación diferencial simple que se obtuvo en (16-18). En consecuencia, resulta razonable que cualquier potencial vectorial que se desee utilizar deberá satisfacer esta misma condición de modo que, además de requerir que $\mathbf{A}^\dagger$ dé el valor correcto de **B**,debe *requerirse* también que $\mathbf{A}^\dagger$ satisfaga (16-17):

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^\dagger = 0 \tag{16-26}$$

Es obvio que esto implica ciertas restricciones en la elección de χ. Se puede observar cuáles serán estas rectricciones si se sustituye (16-24) en (16-26) y se utilizan (16-17) y (1-45): $\nabla \cdot \mathbf{A}^\dagger = 0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla\chi = \nabla^2\chi$, y, por lo tanto.

$$\nabla^2\chi = 0 \tag{16-27}$$

En otras palabras, no se desea utilizar simplemente cualquier función escalar en (16-24) sino que se requiere *además* que χ sea una solución a la ecuación de Laplace (11-3). [La expresión (16-24) es un ejemplo de lo que se conoce como una *transformación de norma*, y se estudiará en mayor detalle en el capítulo 22 una vez que se haya completado el desarrollo de la teoría general. El requisito (16-26) y, por tanto (16-27), conducen a la llamada *norma de Coulomb*.]

El potencial vectorial no resulta tan útil en la magnetostática como se podría esperar por analogía con el potencial escalar en la electrostática. Uno de los problemas es que, aún en muchos casos aparentemente sencillos, no es posible expresar **A** en una forma cerrada o por lo menos en alguna de las formas que se han visto. Es en el tratamiento de los problemas que dependen del tiempo donde el potencial vectorial se vuelve útil. Sin embargo, se considerarán aquí algunos problemas específicos para ilustrar las propiedades generales que se acaban de tratar.

16-3 Inducción uniforme

Una vez que se ha encontrado **B** por cualquier otro medio, es casi siempre posible utilizar

(16-7) junto con (16-17) para obtener **A**. Como ejemplo de un caso extremo, considérese una inducción uniforme dada por $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, por medio de (1-43), se obtienen tres ecuaciones:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B \tag{16-28}$$

que se intentará resolver por inspección. Se pueden satisfacer las primeras dos si se toman A_x y A_y indenpendientes de z, mientras que A_z es, cuando mucho, una función de z; sin embargo, si se mantine a (16-17) en mente, quizá resulte más sencillo tomar A_z = const. En ese caso la ecuación que resta en (16-28) se satisface si (*a*) $A_x = 0, A_y = Bx$, (*b*) $A_x = -By, A_y = 0$ ó (*c*) $A_x = \frac{1}{2} - By, A_y = \frac{1}{2}Bx$ así sucesivamente. Nótese que (*c*) no es más que la suma de (*a*) y (*b*) dividida entre dos. Se puede observar también que estas tres soluciones satisfacen la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Resulta evidente que existen muchas más posibilidades, pero sean éstas suficientes para ilustrar la existencia de mucha arbitrariedad en **A**. Para recalcar el hecho de que éstas son funciones diferentes y sin embargo dan la misma **B**, la figura 16-2 muestra las proyecciones de **A** sobre el plano xy para un origen arbitrario, como las partes (*a*), (*b*) y (*c*) respectivamente; la parte (*c*) se puede obtener más fácilmente si se observa que $A^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 = \frac{1}{4}B^2(x + y^2)$, que viene a ser la ecuación de una circunferencia.

Desde el punto de vista físico, la ambigüedad de **A** en este caso reflejada el hecho de que una **B** uniforme se puede generar en una región dada en una diversidad de maneras. Por ejemplo, podría ser producida en el interior de un solenoide como es el caso en (15-26), o en un lado de un plano infinito de corriente como en (15-21), o en la región entre dos planos de corriente como sucede en el ejercicio 14-9, y así sucesivamente.
De esta manera, las propiedades de simetría de **A** generalmente reflejan la correspondiente simetría de la distribución fuente, como se podría encontrar por cálculo directo a partir de (16-12), por ejemplo.

Una expresión muy útil y usual para el potencial vectorial que describe una inducción uniforme está basada en (*c*), pues puede escribirse en forma de vector como

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} \qquad (\mathbf{B} = \text{const.}) \tag{16-29}$$

En esta forma, **A** es independiente de la elección original de la dirección de **B**.

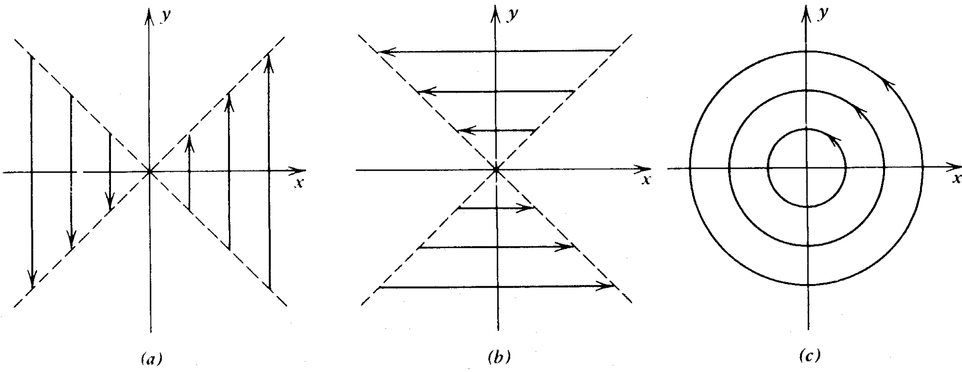


Figura 16-2 Diferentes potenciales vectoriales que describen la misma inducción uniforme

16-4 Corrientes rectas

En la sección 14-2 se calculó el valor de **B** producida por la corriente recta de longitud finita que se muestra en la figura 14-3. Considérese ahora la misma distribución de corriente en función del potencial vectorial. Como antes, $ds' = dz'\hat{\mathbf{z}}$, $R^2 = \rho^2 + z'^2$ y si ahora a la corriente se le asigna el símbolo I, (16-10) queda

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L_1}^{L_2}\frac{dz'}{(\rho^2+z'^2)^{1/2}} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{(\rho^2+L_1^2)^{1/2}+L_1}{(\rho^2+L_2^2)^{1/2}-L_2}\right] \tag{16-30}$$

donde se han utilizado (5-29) y (5-30) con $z = 0$. Antes de revisar las propiedades de esta **A**, verifíquese el resultado obtenido demostrando que éste da el valor correcto de **B**. Si se combina (16-30) con (16-7) y (1-88), observando que $A_z(\rho)$ es la única componente no nula de **A**, se encuentra que $B\rho = B_z = 0$. mientras que

$$\begin{aligned} B_\varphi &= -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ &= \frac{\mu_0 I\rho}{4\pi}\left\{\frac{1}{(\rho^2+L_2^2)^{1/2}\left[(\rho^2+L_2^2)^{1/2}-L_2\right]} - \frac{1}{(\rho^2+L_1^2)^{1/2}\left[(\rho^2+L_1^2)^{1/2}+L_1\right]}\right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left[\frac{L_2}{(\rho^2+L_2^2)^{1/2}} + \frac{L_1}{(\rho^2+L_1^2)^{1/2}}\right] \end{aligned} \tag{16-31}$$

que es justamente lo que ya se había encontrado antes en (14-15).

La dependencia de A_z con respecto a ρ, expresada por el logaritmo de (16-30), es exactamente la misma que se encontró para el potencial escalar de una carga lineal en (5-30) y, por lo tanto, da origen a algunas de las mismas dificultades. Por ejemplo, si se desea pasar al límite de una corriente infinitamente larga haciendo que L_2 y L_1 se hagan infinitas, de acuerdo con (5-32) se encontrará que

$$\mathbf{A} \simeq \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left[\frac{(4L_2L_1)^{1/2}}{\rho}\right] \tag{16-32}$$

Esto demuestra la dependencia de **A** con respecto a ρ para una corriente recta muy larga, pero se hará infinito para una longitud infinita. Como se hizo con ϕ en (5-28), se puede tomar otro cero para el potencial vectorial si se escribe

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \tag{16-33}$$

de manera que ρ_0 sea la distancia a la corriente infinitamente larga para la que *se ha elegido* que **A** valga cero, ya que este punto no puede estar en el infinito. Sin embargo, aquí también se tiene un caso en el que las ambigüedades de **A** desaparecen por la naturaleza misma del sistema.

Ejemplo

Dos corrientes largas antiparalelas. Considérese el sistema compuesto por una corriente I en la dirección positiva de z y otra corriente paralela $-I$, es decir, en la dirección negativa de z; las dos corrientes se encuentran a una distancia $2a$ una de otra, como se ilustra en la figura 16-3. (Compárese con la figura 5-6.) Suponiendo que L_2 y L_1 son ya lo suficientemente largas para que se pueda utilizar (16-32), se encuentra que el potencial total en **P** es

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\ln\left[\frac{(4L_2L_1)^{1/2}}{\rho_+}\right] - \ln\left[\frac{(4L_2L_1)^{1/2}}{\rho_-}\right]\right\} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{\rho_-^2}{\rho_+^2}\right) \qquad (16\text{-}34)$$

siendo ρ_+ y ρ_- las distancias a cada una de las corrientes respectivas. Dado que ni L_2 ni L_1 aparecen ya en esta expresión, se pueden tomar como infinitas para obtener el resultado *finito* sin ambigüedad (16-34) para estas corrientes en sentido contrario; nótese que se hubiera obtenido el mismo resultado de haberse comenzado con (16-33).

En un caso específico, ρ_+ y ρ_- deberán ser evaluadas en función del sistema coordenado particular que se esté usando. Para ilustrar lo anterior, supóngase que las corrientes, que son paralelas al eje z, descansan también sobre el plano xz, y que I intersecta el eje x en a e $-I$ en $-a$. Ahora la situación corresponde exactamente a la que se muestra en la figura 5-7, remplazando el símbolo λ con I, por lo que se puede utilizar (5-34) para escribir el potencial vectorial para este caso como

$$\mathbf{A}(\rho,\varphi) = \hat{\mathbf{z}}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left(\frac{a^2+\rho^2+2a\rho\cos\varphi}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos\varphi}\right) \qquad (16\text{-}35)$$

Las superficies de A_z constantes son entonces las mismas que se dan en (5-37) y (5-38), remplazando con $\mu_0 I$ el término λ/ϵ_0, es decir, que A_z = const. correspondiente a

$$\frac{\rho_-^2}{\rho_+^2} = e^{4\pi A_z/\mu_0 I} = \text{const.} \qquad (16\text{-}36)$$

que, en coordenadas rectangulares es

$$(x - a\coth\eta)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{senh}\eta}\right)^2 \qquad (16\text{-}37)$$

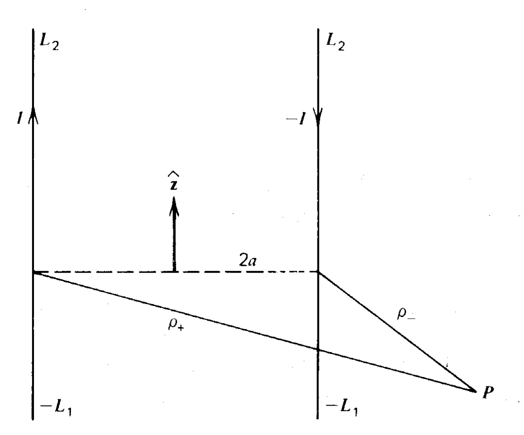


Figura 16-3 Dos corrientes rectas largas y antiparalelas.

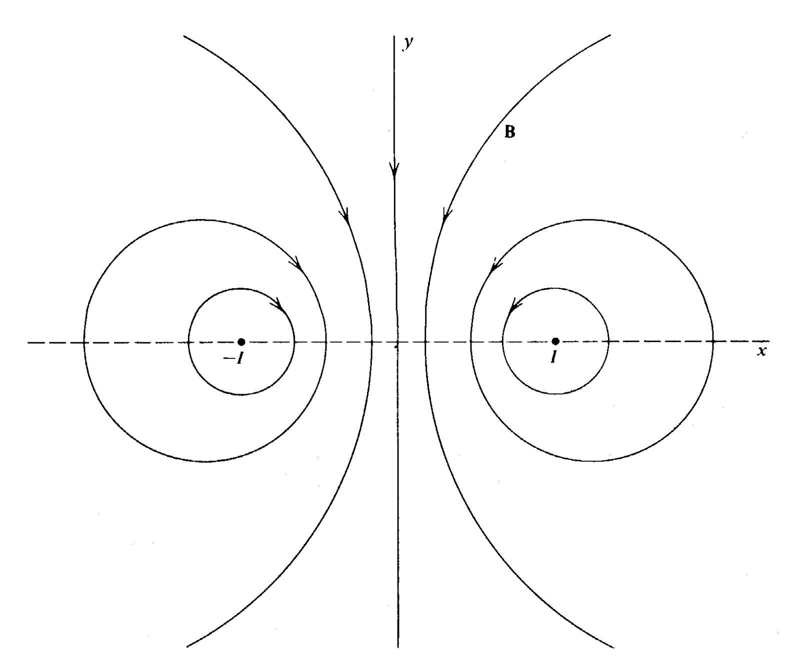


Figura 16-4 Líneas de **B** producidas por dos corrientes rectas largas y antiparalelas.

donde ahora $\eta = 2\pi A_z/\mu_0 I$. De esta manera, las superficies de A_z constantes son cilindros con ejes paralelos al eje z cuyas intersecciones con el plano xy son los circuitos descritos por (16-37), ya que, de hecho, son exactamente los mismos círculos que se muestran con líneas llenas en la figura 5-8. Como antes, los círculos cuyos centros quedan sobre el eje x positivo corresponden a $A_z > 0$, mientras que aquéllos que quedan sobre el eje x negativo corresponden a $A_z < 0$; el plano yz ($x = 0$ ó $\varphi = 90°$) es la superficie para la que $A_z = 0$.

La inducción **B** puede ahora calcularse a partir de (16-35) y (16-7) con el uso de (1-88); los resultados son

$$B_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = -\frac{\mu_0 Ia(a^2+\rho^2)\operatorname{sen}\varphi}{\pi\rho_+^2\rho_-^2} \tag{16-38}$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 Ia(\rho^2-a^2)\cos\varphi}{\pi\rho_+^2\rho_-^2} \tag{16-39}$$

$$B_z = 0 \tag{16-40}$$

de manera que **B** está enteramente sobre el plano xy. Nótese que la dependencia de $B\rho$ con respecto a la posición es como la de $-E\varphi$ en (5-36), mientras que la de $\mathbf{B}\varphi$ es como la de $E\rho$ en (5-35); de hecho, se pueden conectar estos dos campos en un sentido formal mediante $\mathbf{B} = (\mu_0\epsilon_0 I/\lambda)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$, como puede fácilmente verificarse por medio de (1-76). Sin embargo, esto significa que las líneas de **B** son, en este caso, perpendiculares a las líneas de **E** que se muestran como líneas punteadas en la figura 5-8; pero en la figura se pueden observar que las líneas perpendiculares a las líneas de **E** son exactamente los círculos equipotenciales que se muestran con líneas llenas. Por lo tanto, las líneas de **B** son también círculos de este mismo tipo, descritas de acuerdo a (16-36) y (16-37) y que se ilustran en la figura 16-4.

Se puede llegar a la misma conclusión si se encuentran las líneas de **B** directamente.

La dirección de una línea de inducción está dada por una ecuación del mismo tipo que (5-39), es decir,

$$d\mathbf{s}_{li} = k\mathbf{B} \tag{16-41}$$

donde k es una constante. Cuando se expresa esto en función de las coordenadas ρ y φ en el plano xy, se tiene las análoga de (5-41):

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{B_\rho}{B_\varphi} \tag{16-42}$$

En este caso específico, si se sustituyen (16-38) y (16-39) en esta ecuación, se encuentra que

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{(a^2+\rho^2)\operatorname{sen}\varphi}{(\rho^2-a^2)\cos\varphi}$$

o sea

$$\frac{(\rho^2-a^2)d\rho}{\rho(a^2+\rho^2)} = -\frac{\operatorname{sen}\varphi d\varphi}{\cos\varphi} \tag{16-43}$$

Esta ecuación puede integrarse por medio de tablas para obtener

$$\rho^2 + a^2 = \mathcal{K}\rho\cos\varphi \tag{16-44}$$

donde K es una constante cuyo valor caracteriza una determinada línea de inducción. Si se expresa (16-44) en coordenadas rectangulares, queda

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\mathcal{K}\right)^2 + y^2 = \left(\tfrac{1}{2}\mathcal{K}\right)^2 - a^2 \tag{16-45}$$

demostrando que las líneas de $\mathbf{B}$ son círculos con centros en $\frac{1}{2}K$ sobre el eje x y con un radio $(\frac{1}{2}K^2 - a^2)^{1/2}$, lo que de nuevo conduce a la figura 16-4.

16-5 Solenoide ideal infinitamente largo

Dado que ya se han encontrado los valores del $\mathbf{B}$ producido por este sistema en (15-25) y (15-26), se les usará aquí como un ejemplo del cálculo de $\mathbf{A}$ por medio de (16-23). La figura 16-5 muestra el solenoide visto desde un extremo, con una corriente superficial K equivalente a la de (15-22) circulando a su alrededor; el eje del solenoide (eje z) apunta hacia afuera de la página, lo mismo que $\mathbf{B}$. De acuerdo con (16-13), cada elemento de corriente $\mathbf{K}da'$ aporta una contribución a $\mathbf{A}$ en su propia dirección, y si se consideran las contribuciones respectivas $d\mathbf{A}_1$ y $d\mathbf{A}_2$ de dos elementos $\mathbf{K}_1 da_1$ y $\mathbf{K}_2 da_2$ situados simétricamente como se muestra en la figura 16-6, se puede observar que las componentes $\hat{\rho}$ se cancelan entre sí, por lo que solamente queda una componente $\hat{\varphi}$. Se concluye así que $\mathbf{A}$ solamente tiene componentes $\hat{\varphi}$, es decir, que las líneas de $\mathbf{A}$ son círculos sobre este plano, de modo que puede escribirse que

$$\mathbf{A} = A_\varphi(\rho)\hat{\varphi} \tag{16-46}$$

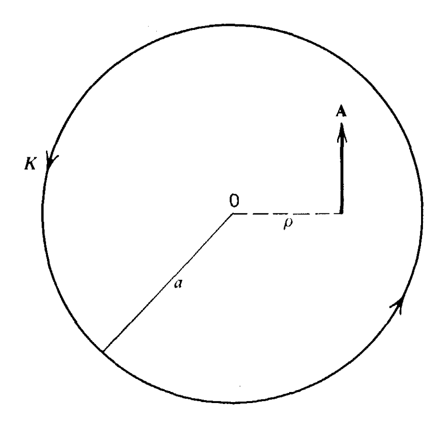


Figura 16-5 Vista desde un extremo de un solenoide ideal muy largo.

ya que $A\varphi$ debe ser independiente de z para este solenoide infinitamente largo y es independiente de φ por simetría. Así, una trayectoria de integración adecuada, C, para ser usada con (16-23) es una circunferencia de radio ρ para la cual $d\mathbf{s} = \rho d\varphi\hat{\varphi}$; de esta manera se obtiene

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A}\cdot\hat{\varphi}\rho d\varphi = 2\pi\rho A_\varphi = \Phi$$

así que

$$A_\varphi(\rho) = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \tag{16-47}$$

1. Dentro del solenoide. Aquí $\rho < a$, y dado que $\mathbf{B}_i$ es uniforme de acuerdo con (15-26), el flujo se obtiene de (16-6), (1-52) y (1-53) y es

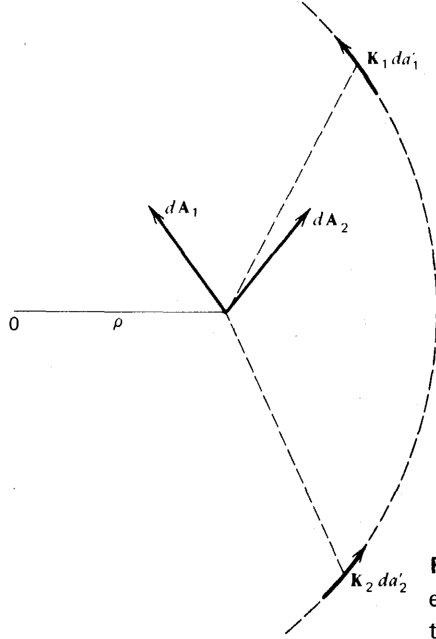


Figura 16-6 El potencial vectorial resultante de dos elementos de corriente situados simétricamente tiene sólo una componente $\hat{\varphi}$.

$$\Phi = \int_S B_i \hat{\mathbf{z}} \cdot da\hat{\mathbf{z}} = \mu_0 nI \int_S da = \mu_0 nI\pi\rho^2 \tag{16-48}$$

el cual, al ser sustituido en (16-47) da

$$A_\varphi(\rho) = \tfrac{1}{2}\mu_0 nI\rho \qquad (\rho < a) \tag{16-49}$$

2. Fuera del selenoide. Aquí $\rho > a$, y dado que $\mathbf{B}_0 = 0$, el flujo encerrado es el valor *constante* que se obtuvo de (16-48) para $\rho = a$, es decir, $\Phi = \mu_0 nI\pi a^2$. Cuando esto se sustituye en (16-47) se obtiene

$$A_\varphi = \tfrac{1}{2}\mu_0 nI\left(\frac{a^2}{\rho}\right) \qquad (\rho > a) \tag{16-50}$$

Nótese que tanto (16-49) como (16-50) dan el mismo valor de $\frac{1}{2}\mu_0 nIa$ para $\rho = a$; esto concuerda con la propiedad de continuidad de **A** expresada en (16-22).

En la figura 16-7 se muestran tanto A_φ como B_z graficados en función de ρ para comparar su comportamiento. Este resultado interesante muestra que *fuera* del solenoide, donde la inducción es igual a cero, el potencial vectorial *es diferente de cero*. Esto deja en claro que lo que realmente importa desde este punto de vista no es el valor absoluto de **A**, sino la manera en que cambia, descrita por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Para apreciar lo que en realidad ocurre aquí, de (1-88) de **B** que no es igual a cero es $B_z = \partial(\rho A_\varphi)/\rho\partial\rho$. Dentro del solenoide $\rho A_\varphi = \frac{1}{2}\mu_0 nI\rho^2$ según (16-49), por lo que $B_{zi} = \mu_0 nI$, en concordancia con (15-26). Sin embargo, fuera de él, (16-50) da $\rho A_\varphi = \frac{1}{2}\mu_0 nIa^2$ = const., de modo que $B_z = 0$ como ya se sabía.

Resulta también interesante observar que las líneas de **A** circulares que sí funcionan en este caso como se comprobó anteriormente corresponden cualitativamente a las de la figura 16-2*c*, lo cual ya se dedujo como una posible descripción de inducción uniforme.

Ejercicios

16-1 Los resultados (16-3), (16-7) y (16-17) se obtuvieron con base en corrientes filamentales. Demostrar que se obtienen estos mismos resultados suponiendo corrientes distribuidas constantes.

16-2 Aplicar (16-5) a un pequeño cilindro en el interior de solenoide ideal infinitamente largo. Suponer que el eje del cilindro coincida con el eje del solenoide y así demostrar que $B\rho = 0$.

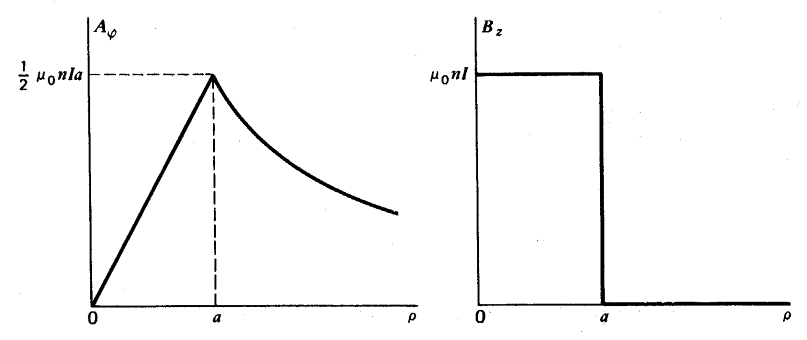


Figura 16-7 Potencial vectorial e inducción magnética de un solenoide ideal muy largo, como funciones de la distancia ρ al eje.

16-3 Una inducción determinada tiene la forma $\mathbf{B} = (\alpha x/y^2)\hat{\mathbf{x}} + (\beta y/x^2)\,\hat{\mathbf{y}} + f(x, y, z)\,\hat{\mathbf{z}}$, donde α y β son constantes. Encontrar la forma más general posible para la función $f(x, y, z)$. Encontrar la densidad de corriente **J** y verificar que corresponde a una distribución de corriente constante.
16-4 Demostrar que (16-29) es un potencial vectorial adecuado para cualquier inducción constante y no únicamente para alguna sobre el eje z. Demostrar también que (16-29) satisface (16-17).
16-5 Encontrar la χ que transforma cada uno de los potenciales vectoriales de la sección 16-3 en los demás, y verificar que cada una de esas χ satisface (16-27).
16-6 Repetir el cálculo que condujo a (16-30) para un punto de campo con coordenadas (z,ρ) en lugar de simplemente $(0,\rho)$. Demostrar que el **A** obtenido da la misma **B** que se encontró en el ejercicio 14-2.
16-7 Siempre es cierto que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ también es cierto en un punto donde no haya corriente. Estos resultados son una indicación de cómo se relacionan entre sí ciertas derivadas de **B**. Se puede hacer uso de estas relaciones para obtener valores aproximados de **B** en los casos donde resulte muy difícil resolver exactamente en el caso general, mientras que es fácil resolver los casos especiales. Por ejemplo, considérese un anillo circular que conduce una corriente. En (14-18) se encontró fácilmente la inducción en su eje. Si se toma (14-2) para un punto de campo general, se encontrará que resulta una integral que debe expresarse en términos de funciones elípticas. Es posible aproximar esta integral para puntos cercanos al eje z por medio de un desarrollo en series de potencias del integrando para ρ pequeñas, pero es mejor otro método. A partir de (14-18), se escribe un desarrollo en serie de Taylor para B_ρ como $B_\rho\,(\rho, z) \simeq B_\rho\,(0, z) + (\partial B_\rho/\partial\rho)_0\rho$. Se utilizan después (14-18) y $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ para evaluar esta aproximación de B_ρ en un punto fuera del eje pero cerca de él. De manera similar, encontrar una expresión para $B_z(\rho, z)$.
16-8 Una circunferencia de radio a está sobre el plano xy con su centro en el origen. Una corriente I la recorre en el sentido en que aumenta el ángulo polar φ'. Encontrar una expresión para el **A** producido en un punto arbitrario (x,y,z). Escribirlo en función de sus coordenadas rectangulares y expresarlo como una integral con respecto a φ'. No evaluar la integral. Suponer ahora que el punto de campo está sobre el eje z y evaluar la integral para encontrar **A**, encontrar las expresiones integrales para las componentes de **B** y demostrar que si el punto de campo se encuentra sobre el eje, se obtiene (14-18).
16-9 Un cuadrado de lado $2a$ descansa sobre el plano xy con su centro en el origen I circulando en sentido contrario al de las manecillas del reloj si se observa desde las z positivas. Encontrar **A** para todos los puntos dentro del cuadrado. ¿Cuánto vale **A** en el centro?
16-10 Encontrar el **A** producido en cualquier punto del eje z por una corriente en el arco circular que se muestra en la figura 14-9. ¿Por qué este resultado no daría el valor correcto de **B** que se encontró en el ejercicio 14-7?
16-11 Un cilindro infinitamente largo tiene una sección circular de radio a y su eje a lo largo del eje z. Una corriente constante, I, se distribuye uniformemente por su sección en la dirección positiva de z. Utilizar (16-23) para encontrar **A** en todo lugar. Si se expresa el **A** fuera del cilindro en la forma (16-33), ¿cuál es el valor de **A** sobre el eje z?
16-12 Se enrolla un alambre en forma de hélice con ángulo de inclinación α sobre la superficie de un cilindro de radio a, de modo que se forman N vueltas completas. Si el alambre conduce una corriente I, demostrar que la componente axial del potencial vectorial producido en el centro de la hélice es

$$(\mu_0 I/2\pi)\ln\left\{N\pi\tan\alpha + \left[1 + (N\pi\tan\alpha)^2\right]^{1/2}\right\}$$

Demostrar que este valor es el mismo que aquél producido por una corriente I en un alambre de la misma longitud del cilindro en dirección paralela al eje y sobre la superficie exterior del cilindro. Mostrar por qué tiene que ser así.

16-13 Encontrar **A** para los cilindros coaxiales con corrientes iguales y opuestas que se describen en el ejercicio 15-7. Expresar la respuesta en función de A_0, el valor sobre el eje. Si fuera posible, hacer $\mathbf{A} = 0$ fuera del cilindro exterior y encontrar el valor de A_0 correspondiente.

16-14 Un plano infinito de corriente coincide con el plano xy. La densidad de corriente tiene magnitud constante K y va en la dirección positiva de y. Encontrar el potencial vectorial **A** en todo lugar. Si no es posible hacer que se anule en el infinito, expresarlo en función de su valor en el plano de corriente.

16-15 Una esfera de radio a contiene una carga total Q distribuida uniformemente en su volumen. Se le hace girar alrededor de uno de sus diámetros a velocidad angular constante ω. Suponer que la distribución de carga no se altera por la rotación y encontrar **A** en cualquier punto sobre el eje de rotación.

16-16 Expresar la constante K de (16-44) en función de la magnitud de **B** cuando cruza el eje x positivo a su máxima distancia del origen. ¿Cuál sería el valor de A_z cuya magnitud constante corresponde a este mismo círculo?

16-17 Los resultados que se obtuvieron para las dos rectas paralelas infinitamente largas con corrientes opuestas no son tan accidentales como se podría pensar. Considérese una distribución de corrientes en la que las corrientes solamente están en la dirección z. Demostrar que en este caso es siempre posible escribir $\mathbf{B} = \nabla A_z \times \hat{\mathbf{z}}$, y demostrar así que las líneas de **B** serán siempre paralelas a las superficies de A_z constante. Aplicar este resultado a las dos corrientes antiparalelas infinitamente largas y demostrar que resulta consistente con las direcciones de **B** que se muestran en la figura 16-4.

Capítulo

17

Ley de inducción, de Faraday

Los resultados generales que se han obtenido hasta ahora pueden resumirse en las cuatro ecuaciones diferenciales fuente para campos vectoriales:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{17-1}$$

según se desprenden de (4-10), (5-4), (15-12) y (16-3). Se cuenta también con (12-13), que expresa la conservación de la carga, y con (14-32) que da la fuerza sobre una carga puntual en función del campo eléctrico y de la inducción magnética:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{17-2}$$

Las ecuaciones (17-1) forman dos conjuntos completamente independientes, uno para **E** y otro para **B**, sin implicar conexión alguna entre ambos campos vectoriales. Faraday sospechó que en realidad existía cierta relación entre estos campos, por lo que diseñó muchos experimentos para tratar de demostrarlo. Por fin, aproximadamente en 1831 pudo lograrlo, aunque sólo fuera para el caso en el que las cosas cambian con el tiempo, es decir, para un situación *no estática.* Henry también encontró el mismo resultado en forma independiente, pero se le ha dado el nombre de *ley de inducción de Faraday* o más simplemente de *ley de Faraday.*

Todas las ecuaciones (17-1) se obtuvieron por el estudio de campos *estádicos.* Unicamente en el caso de la derivación de la ecuación de continuidad se consideraron, aunque sólo en forma breve, algunos casos dependientes del tiempo. Para poder seguir adelante, lo más conveniente es *suponer* que las ecuaciones (17-1) son también válidas para casos no estáticos, a menos que la experimentación indique que deban ser modificadas. En este capítulo se podrá ver que una de ellas debe cambiarse a fin de tomar en cuenta nuevas circunstancias.

17-1 Ley de Faraday

Se considera aquí sustancialmente la misma situación esperimental que utilizó Faraday, aunque hasta cierto punto simplificada. Supóngase que se tiene un circuito cerrado, C, formado por un alambre conductor como el que se muestra en la figura 17-1. Supóngase también que existe una inducción **B**, de manera que existe un flujo Φ a través de la superficie S encerrada por C. Si se escoge una dirección arbitraria de recorrido de C, como la que se indica con la flecha, queda definida la dirección del elemento de superficie $d\mathbf{a}$, de acuerdo con la figura 1-24, por lo que se puede así obtener Φ a partir de (16-6); Φ será positivo para la dirección que se muestra en la figura. Se supone que no existen baterías ni otras fuentes de fem en el circuito.

Si el flujo a través de C es constante, de modo que $d\Phi/dt=0$, entonces puede observarse que no existe corriente en el circuito. Sin embargo, Faraday encontró que si el flujo *no* es constante a través de C, de modo que $d\Phi/dt \neq 0$, entonces existe una corriente provocada en C. Se dice que esta corriente fue "inducida" por el cambio de flujo, por lo que el valor numérico de la corriente depende de la resistencia del circuito, por lo que es más conveniente expresar el resultado cuantitativo del experimento en función de la *fem inducida,* Es decir, el trabajo realizado por unidad de carga como quedó definido en (12-22). Resulta que

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{17-3}$$

lo que viene a ser la *ley de Faraday*. Dado que $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ se mide en volts, a veces también se le llama *voltaje inducido* o solamente el *voltaje;* otro nombre que se le suele dar es el de *electromotancia inducida.*

El flujo Φ puede cambiar por diversas razones: la inducción **B** puede variar con el tiempo, el circuito puede moverse por traslación o por rotación encerrando así diferentes valores de **B**, o bien puede haber una combinación de ambos efectos. Una experimentación muy extensa ha demostrado que (17-3) es válida cualquiera que sea la cusa de $d\Phi/dt$. Se puede observar también que no es necesario que **B** sea diferente de cero en todas las partes de la superficie S, pudiendo anularse en algunas porciones de S; aun en estos casos (17-3) sigue siendo aplicable. Más aún, la forma (17-3) de la ley de Faraday sigue siendo válida incluso en presencia de materia. Ya que no se estudiarán sistemáticamente los efectos magnéticos sobre la materia hasta el capítulo 20, se supondrá que todos los materiales hasta entonces son "no magnéticos", es decir, que tienen las mismas propiedades magnéticas que el vacío.

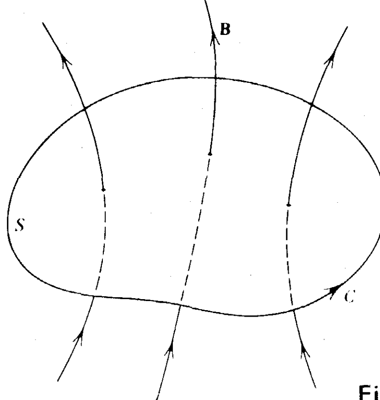


Figura 17-1 El flujo a través de este circuito es positivo.

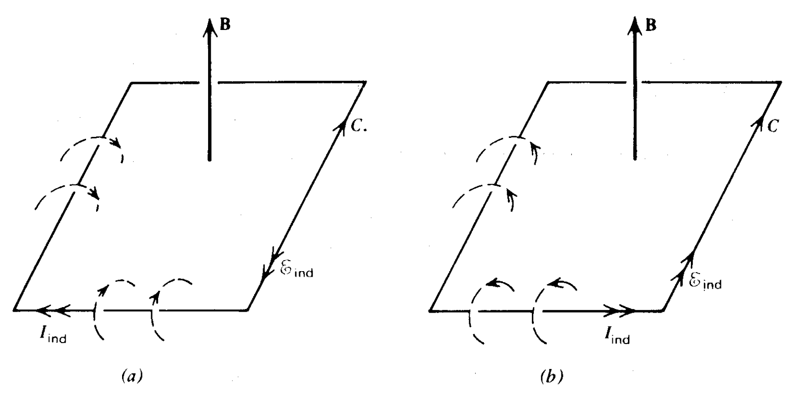


Figura 17-2 La dirección de la corriente inducida cuando la magnitud de **B** está (*a*) aumentando y (*b*) disminuyendo.

El signo negativo que se incluye en (17-3) representa la "dirección" o "sentido" de la fem inducida *en comparación* con el sentido original arbitrariamente elegido para el recorrido por *C*. Este sentido queda descrito de una manera más conveniente por la *ley de Lenz:* la fem inducida (y, por lo tanto, la corriente inducida) tiene un sentido tal que tiene a *oponerse al cambio* que la provoca. Las palabras claves a recordar de esta ley son *oponerse y cambio:* en otras palabras, no es el valor absoluto de Φ ni su signo lo que aquí importa, sino la manera en que cambia. (cuando se enuncia de esta manera, se puede observar que ley de Lenz viene a ser un ejemplo del principio de Le Chatelier, que describe la respuesta de un sistema en estado de equilibrio estable a efectos externos que tiendan a alterar ese estado.) Para ilustrar la aplicación de la ley de Lenz, por simplicidad considérese un circuito que es fijo en forma, tamaño y posición, de manera que únicamente puede haber una variación de Φ si cambia **B**. La figura 17-2 muestra el caso, y en ella se ha elegido como dirección de recorrido de *C* aquélla para la cual Φ es positivo. Primero se supone que **B** está aumentando; en este caso $d\Phi/dt$ es positivo y, según (17-3), $\mathcal{E}_{ind}$ debe ser negativa. Esto significa que $\mathcal{E}_{ind}$ será opuesta a la elección original de recorrido por *C* y, por lo tanto, quedará en el "sentido" de las flechas dobles de *(a)* en la figura; esta misma será la dirección de la corriente inducida I_{ind}, tal como se ilustra. [No necesariamente debe considerarse que $\mathcal{E}_{ind}$ está localizada, como podría inferirse de la posición de su símbolo, ya que (17-3) describe el efecto total sobre un circuito macroscópico.] Considérese ahora la concordancia entre estos resultados y la ley de Lenz. Dado que ϕ está aumentando, la corriente inducida tenderá a oponerse a este cambio tratando de hacer disminuir el flujo por medio de la producción de líneas de **B** opuestas al sentido positivo de la normal a la superficie, es decir, hacia "adentro" del circuito. Las curvas punteadas muestran las direcciones generales de las líneas de **B** producidas por I_{ind}, obtenidas de acuerdo con la regla de la mano derecha que siguió a (14-6), y puede observarse que en realidad representan una tendencia a disminuir el flujo a través de

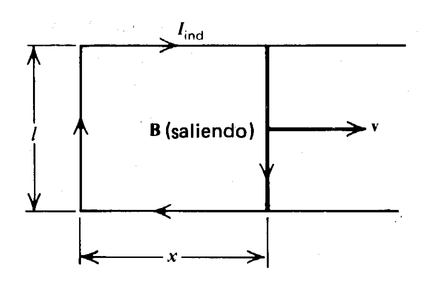


Figura 17-3 La barra conductora se mueve hacia la derecha a velocidad constante.

C. Así, las dos proposiciones llevan a la misma conclusión cualitativa. En la parte *(b)* de la figura se ilustran los resultados obtenidos cuando se supone que [**B**] está disminuyendo. Así, Φ sigue siendo positivo pero decreciente, de modo que $d\Phi/dt$ es negativo y $\mathcal{E}_{ind}$ es positiva, es decir, en el mismo sentido que el de recorrido original por C. La dirección de I_{ind} en este caso es tal que produce líneas de **B** que tienden a aumentar el flujo a través de la superficie encerrada, es decir, *se opone al cambio,* de acuerdo con la ley de Lenz.

Antes de expresar la ley de Faraday en función de los campos, considérese un ejemplo que puede ser analizado cuantitativamente de manera sencilla.

Ejemplo

La figura 17-3 muesta una barra conductora que descansa sobre otro conductor doblado en forma de U. Un agente externo mueve la barra hacia la derecha a velocidad constante, **v**. Existe una inducción constante, **B**, que es normal a la página y sale de ella. Por lo tanto, el circuito C viene a ser el rectángulo de lados l y x. Tómese el sentido de recorrido por C en el sentido positivo de la superficie es saliendo de la página. De acuerdo con (16-6), el flujo a través de C es

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = Blx \tag{17-4}$$

De (17-3) se obtiene la fem inducida y es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv \tag{17-5}$$

siendo negativa, es decir, en el sentido de las manecillas del reloj. Esta también será la dirección de I_{ind}, tal como se muestra. Para comparar esto con la ley de Lenz, se puede observar que Φ aumenta a medida que aumenta x. Así, I_{ind} tenderá a que Φ disminuya produciendo líneas de **B** que, dentro del circuito, estén dirigidas hacia *adentro* de la página, en total de acuerdo con el sentido de I_{ind} que se encontró arriba y que se muestra en la figura. La magnitud de la fem inducida es constante porque v es constante. Pero, a medida que aumenta x el contacto que forma el circuito es más largo, por lo que la resistencia aumenta. Por lo tanto, la corriente inducida disminuye a medida que aumenta la superficie encerrada por el circuito.

De (12-23) puede observarse que la existencia de la fem inducida puede interpretarse como indicativa de la presencia de un *campo eléctrico inducido,* $\mathbf{E}_{ind}$, no conservativo a lo largo del alambre, de modo que también se puede expresar (17-3) en la forma

$$\oint_C \mathbf{E}_{ind}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{17-6}$$

En (9-21) se vio que las componentes tangenciales del campo eléctrico son continuas, y en las siguientes secciones se verá que eso sigue siendo correcto en este caso. Por lo tanto, el campo eléctrico justo afuera del alambre será el mismo que adentro, de tal forma que (17-6) es también aplicable a una trayectoria muy próxima al circuito y *fuera de él.* De hecho, (17-6) ya no contiene ninguna característica específica del alambre, por lo que es lógico suponer que (17-6) representa una *ley física general* que relaciona el campo eléctrico inducido con el flujo cambiante y que por lo tanto se puede aplicar a *cualquier curva cerrada,* sea o no que existe ahí un circuito capaz de llevar una corriente inducida. Más aún, para cualquier

punto del espacio, el campo eléctrico total puede expresarse como la suma de una parte conservativa, $\mathbf{E}_c$, y una parte no conservativa, $\mathbf{E}_{ind}$, es decir, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_{ind}$, con lo que se tiene

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{E}_c\cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{E}_{ind}\cdot d\mathbf{s} \tag{17-7}$$

Pero, de acuerdo con (5-5), la primera integral es cero para el campo conservativo, por lo que, al combinar (17-7) y (17-6) se obtiene una expresión que relaciona el campo eléctrico total **E** con el flujo cambiante:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} \tag{17-8}$$

Aquí se tomará a (17-8) como el enunciado final de la ley de Faraday expresada en función de los vectores de campo, y es válida para cualquier trayectoria cerrada C y para cualquier motivo por el que pueda variar Φ. Debido a las diversas posibilidades para la variación del flujo, es conveniente dividir el subsecuente estudio de (17-8) en dos grandes categorías, dependiendo de si el medio se encuentra en reposo o en movimiento.

17-2 Medios estacionarios

Si las diversas partes de la región de interés no se encuentran en movimiento, entonces la curva limitante C no variará su forma o tamaño en forma instantánea, de manera que Φ sólo puede estar cambiando debido a que **B** varia con el tiempo, es decir, que $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Si entonces se utiliza (1-67), (17-8) se vuelve

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{a}$$

y, por lo tanto,

$$\int_S \left(\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{17-9}$$

Pero dado que (17-8), y por ello (17-9), es válida para cualquier trayectoria de integración arbitraria con su correspondiente superficie S, aun una infinitesimal, el integrando de (17-9) debe ser igual a cero en todo lugar, con lo que se tiene que

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{17-10}$$

como un enunciado diferencial de la ley de Faraday para un medio estacionario. Con (17-10) se tiene al fin una relación entre la electricidad y el magnetismo, en función de los vectores de campo.

Es posible expresar (17-10) de otra manera más. Es todavía cierto que $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ y por ello $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$, como en (16-7). Sustituyendo esto en (17-10) se tiene $\nabla\times\mathbf{E} = -\partial(\nabla\times\mathbf{A})/\partial t = -\nabla\times(\partial\mathbf{A}/\partial t)$ o sea,

$$\nabla\times\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{17-11}$$

Pero, de acuerdo con (1-48), se sabe que una cantidad cuyo rotacional es cero puede expresarse como el gradiente de un escalar, de modo que se puede concluir que $\mathbf{E} + (\partial \mathbf{A}/\partial t) = -\nabla\Phi$, o sea,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{17-12}$$

lo que demuestra que, en general, **E** depende tanto del potencial escalar como del vectorial. En un caso estadístico, donde $\varphi\ \mathbf{A}/\delta t = \text{o}$, (17-12) se reduce a $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ con lo que se vuelve al campo eléctrico conservativo; sin embargo, es posible anticipar que por lo general ϕ no siempre será exactamente el mismo potencial escalar de la electrostática.

Dado que ahora $\nabla \times \mathbf{E}$ puede ser diferente de cero, se hace necesario volver a investigar el comportamiento de las componentes tangenciales de **E** en una superficie de discontinuidad, ya que el resultado anterior (9-21) dependía de que $\nabla \times = 0$. Si se sustituye (17-10) en (9-18), se obtiene

$$\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = \lim_{h\to 0} \left\{ h\left[\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\times\hat{\mathbf{n}}\right]\right\}$$

A medida que la capa de transición se reduce a cero, es lógico esperar que $\partial \mathbf{B}/\partial t$ siga siendo *finita,* de modo que a medida que $h \to 0$, $h(\partial \mathbf{B}/\partial t) \to 0$; así, el miembro derecho de la ecuación de arriba será igual a cero, con lo que

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} \tag{17-13}$$

que demuestra que las componentes tangenciales del campo eléctrico son todavía continuas, de acuerdo con la observación hecha entre paréntesis después de (9-22). En lo que sigue no aparece ninguna razón para alterar esta conclusión.

Ejemplo

Espira fija en una inducción alterna. Como ejemplo de un sistema estacionario que contiene un circuito real, considérese la espira rectangular de lados a y b que se muestra en la figura 17-4. Tómese el eje z sobre el plano de la espira y paralelo al lado a; tómese el origen en el centro. El plano de la espira forma un ángulo φ con el plano yz, de manera que la normal $\hat{\mathbf{n}}$ al plano está sobre el plano xy y forma el mismo ángulo φ con el eje x. Supóngase también la presencia de una inducción **B** dirigida a lo largo del eje x y dada por $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{x}}\cos(\omega t + \alpha)$, es decir, que es espacialmente constante sobre toda la superficie de la espira pero oscila armónicamente, con el tiempo, con un ángulo de fase α que depende de la elección del cero de t. Aquí, $\omega = 2\pi\nu$ es la *frecuencia circular* (o *angular*) que se mide en $(\text{segundos})^{-1}$. o en radianes/segundo; por otro lado, ν es la *frecuencia* normal, es decir, el número de oscilaciones por unidad de tiempo y se mide en hertz, siendo 1 hertz = 1 $(\text{segundo})^{-1}$. De acuerdo con (16-6), el flujo a través de la espira es

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da = B_0\cos\varphi\cos(\omega t + \alpha)\int_S da = B_0 ab\cos\varphi\cos(\omega t + \alpha) \tag{17-14}$$

siendo ab el área de la misma. La fem inducida está dada por (17-8) y es

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \omega B_0 ab\cos\varphi\,\text{sen}(\omega t + \alpha) \tag{17-15}$$

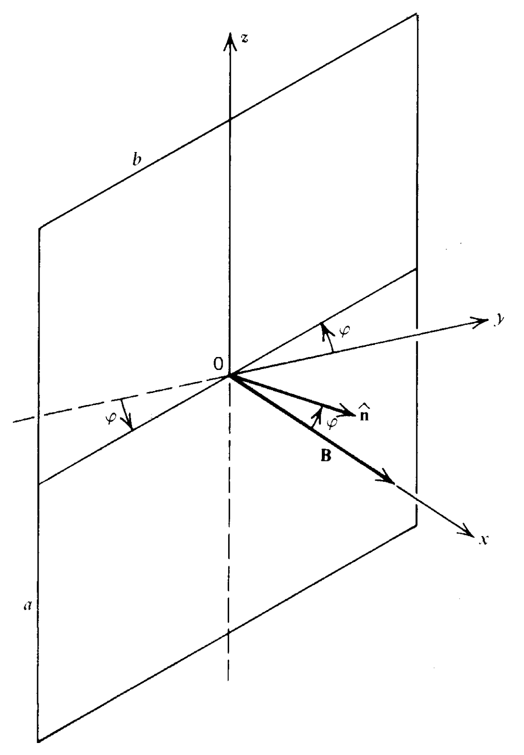


Figura 17-4 Una espira rectangular fija en presencia de una inducción alterna.

que, como se puede observar, es proporcional a la frecuencia de oscilación y, dado que varía según sen $(\omega t + \alpha)$, está 90 ° fuera de fase con respecto a **B**, que varía según cos$(\omega t + \alpha)$. Por ejemplo, $\mathcal{E}_{ind}$ es máxima cuando el flujo es cero pero tiene su máxima razón de cambio. Si la espira estuviera formada por un solo alambre enrollado N vueltas, cada una de las vueltas tendría la fem inducida dada por (17-15), de tal forma que la fem total de la bobina sería N veces mayor, ya que corresponde al trabajo total por unidad de carga calculado sobre todo el circuito, por lo que es aditivo. Así, estaría dada por $N\omega B_0 ab$ cos φ sen $(\omega t + \infty)$.

Ejemplo

Considérese ahora una región cilíndrica infinitamente larga, que contiene un campo **B** dado en coordenadas cilíndricas por

$$\mathbf{B} = \begin{cases} B_0 \cos(\omega t + \alpha)\hat{\mathbf{z}} & (\rho \leqslant a) \\ 0 & (\rho > a) \end{cases} \tag{17-16}$$

donde B_0 = const. En otras palabras, **B** es espacialmente en el tiempo; puede visualizarse mejor la situación si se considera que estuviera producida por un solenoide ideal infinito con corriente alterna circulando en sus vueltas. Al aplicar (17-10) se obtiene $\nabla \times \mathbf{E} = \omega B_0$ sen $(\omega t + \alpha)\, \hat{\mathbf{z}}$. La simetría cilíndrica de este problema, junto con la experiencia anterior, hacen esperar que **E** resulte sobre el plano xy y tenga la forma $\mathbf{E} = E$ q (p) **S** , es decir, que sea tangente a los círculos de radio ρ. De acuerdo con esto, se toma uno de esos círculos como trayectoria de integración, resultando que para cualquier ρ,

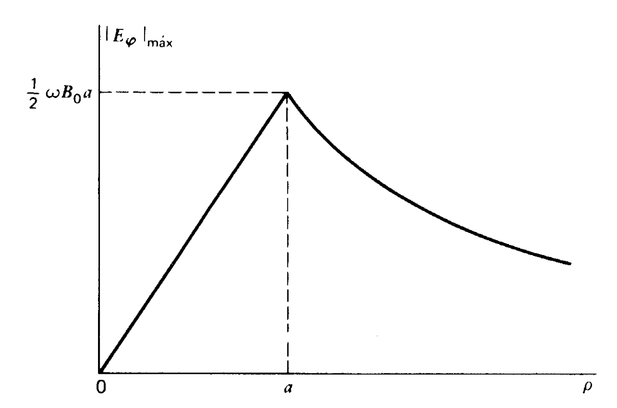


Figura 17-5 El campo eléctrico inducido como función de la distancia al eje de un cilindro de radio *a* que contiene una inducción alterna.

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint_C E_\varphi \hat{\varphi}\cdot \rho d\varphi \hat{\varphi} = 2\pi\rho E_\varphi$$

$$= \int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{a} = \omega B_0 \operatorname{sen}(\omega t+\alpha)\int da_z \qquad (17\text{-}17)$$

con la ayuda de (167) y (1-53). La integral de superficie es igual a $\pi\rho^2$ si $\rho > a$, y tiene el valor constante πa^2 si $\rho > a$, debido
a (17-16). Al sustituir estos valores en (17-17) se obtiene

$$E_\varphi = \frac{1}{2}\omega B_0 \rho \operatorname{sen}(\omega t+\alpha) \qquad (\rho \leqslant a) \qquad (17\text{-}18)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{2}\omega B_0 \left(\frac{a^2}{\rho}\right)\operatorname{sen}(\omega t+\alpha) \qquad (\rho > a) \qquad (17\text{-}19)$$

La figura 17-5 muestra el valor máximo de $[E_\varphi]$ es decir, su amplitud, en función de ρ Como en el ejemplo anterior, E_φ está 90° fuera de fase con respecto a **B**, puesto que depnde de **B** y no de valor absoluto. Los campos eléctricos inducidos que se producen de esta manera general constituyen la base de operación del acelerador de partículas cargadas conocido como *betatrón.*

17-3 Medios en movimiento

Muchas de las aplicaciones más interesantes y prácticas de la ley de Faraday ocurren cuando una parte o todo el circuito o "medio" se encuentra en movimiento. Si se toma una trayectoria de integración *C* que pase a través de algunos puntos específicos del medio, resulta que al moverse estos puntos también se mueve *C*, y por esa razón Φpuede variar también; simultáneamente, podría darse el caso de que **B** también estuviera variando en el tiempo. Por lo tanto, para poder evaluar $d\Phi/dt$ se debe comparar el flujo que pasa a través de la superficie encerrada por la forma final de *C*, con el enlazado por la forma original de *C*; es decir, se necesita evaluar

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{S(t+\Delta t)}\mathbf{B}(t+\Delta t)\cdot d\mathbf{a}(t+\Delta t) - \int_{S(t)}\mathbf{B}(t)\cdot d\mathbf{a}(t)\right] \qquad (17\text{-}20)$$

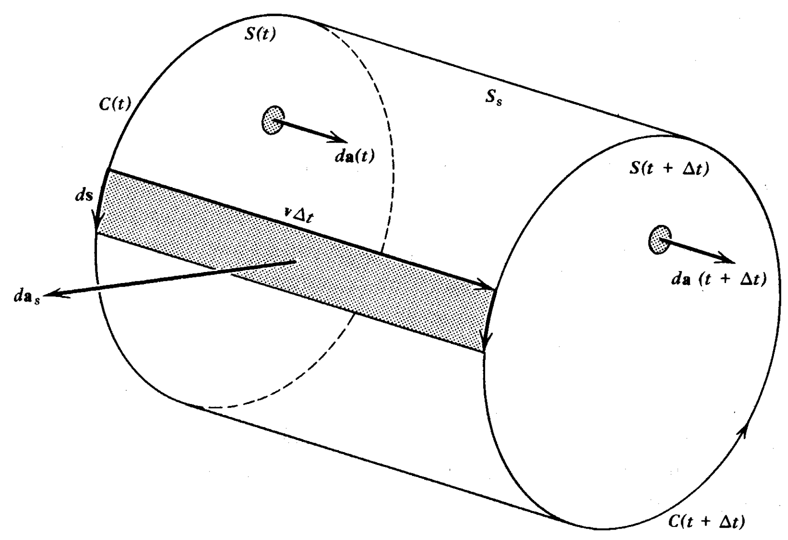


Figura 17-6 La curva frontera C en un instante t y en un instante $t + \Delta t$ posterior. El elemento lineal ds barre la superficie da_s.

La figura 17-6 ilustra las posiciones inicial y final de la curva limitante C. El elemento ds de $C(t)$ se ha desplazado una cantidad $v\,\Delta t$ como resultado del movimiento. En el proceso, barre el elemento de superficie

$$d\mathbf{a}_s = d\mathbf{s} \times \mathbf{v}\Delta t \tag{17-21}$$

que se muestra sombreado. Se observa también que $d\mathbf{a}_s$ | es una porción de la superfice S_s lateral, que conecta $C(t)$ con $C(t \leqslant Yt)$, de manera que la superficie total

$$S_{\text{tot}} = S(t) + S_s + S(t + \Delta t) \tag{17-22}$$

es la frontera de un volumen *"cerrado"* a través del cual el flujo total de **B** es igual a cero, de acuerdo con (16-5). Para poder evaluar el primer término entre corchetes en (17-20), se aplica (16-5) al volumen de la figura 17-6 *al tiempo* $t + \Delta t$. Por lo tanto,

$$\oint_{S_{\text{tot}}} \mathbf{B}(t+\Delta t)\cdot d\mathbf{a} = 0 = -\int_{S(t)} \mathbf{B}(t+\Delta t)\cdot d\mathbf{a}(t)$$

$$+ \int_{S_s} \mathbf{B}(t+\Delta t)\cdot d\mathbf{a}_s + \int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t)\cdot d\mathbf{a}(t+\Delta t) \tag{17-23}$$

donde el signo negativo del primer término surge debido a que $d\mathbf{a}(t)$ apunta *hacia* el volumen, mientras que la integral de superficie se definió en (1-56) tomando el elemento de superficie como positivo hacia afuera. Además, todos los valores de **B** se toman en $t + \Delta t$, mientras que las superficies se expresan en función de sus valores que definen la forma de la figura que se muestra en la figura 17-6. Dado que se está tendiendo al límite $\Delta t \to 0$ como meta final, resulta apropiado pensar en desarrollar **B** en una serie de potencias:

$$\mathbf{B}(t+\Delta t) = \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\Delta t + \cdots$$

Conservándose explícitamente sólo los términos de primer orden en Δt. Si ahora sustituye esta expresión solamente en la primera y segunda integrales de (17-23) y se utilizan (17-21), (1-23) y (1-29), se obtiene

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t)\cdot d\mathbf{a}(t+\Delta t) - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t)\cdot d\mathbf{a}(t)$$

$$= \Delta t \left\{ \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a}(t) + \oint_{C(t)} [\mathbf{B}(t)\times\mathbf{v}(t)]\cdot d\mathbf{s} \right\}$$

$$+ \text{ Términos del orden de } (\Delta t)^2 \tag{17-24}$$

con lo que ha sido posible, después de sustituir (17-21), escribir la integral sobre S_s de (17-23) como una integral sobre C, dado que todos los términos en ella se evalúan sobre $C(t)$, es decir, la curva limitante original. Si ahora se sustituye (17-24) en (17-20) y se hace que $\Delta t \to 0$, los términos que originalmente eran de orden de $(\Delta t)^2$ y superiores desaparecerán, quedando

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} + \oint_C (\mathbf{B}\times\mathbf{v})\cdot d\mathbf{s} \tag{17-25}$$

El primer término, ya es el resultado de la variación de **B**, de modo que es el segundo término el que resulta debido al movimiento. Si ahora se sustituye (17-25) en (17-3) y en (17-8), se obtienen la fem inducida y la integral de línea del campo eléctrico *en el sistema en movimiento*. Si a estas cantidades se les denota con una prima y se vuelve a utilizar (1-23), se encuentra que

$$\mathcal{E}' = \oint_C \mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} + \oint_C (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{s} \tag{17-26}$$

que, con la ayuda de (1-67) puede expresarse como

$$\int_S \nabla\times(\mathbf{E}' - \mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{a} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} \tag{17-27}$$

de manera que

$$\nabla\times(\mathbf{E}' - \mathbf{v}\times\mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{17-28}$$

ya que (17-27) es aplicable a cualquier curva limitante.

Es importante recordar que estas tres últimas ecuaciones numeradas contienen cantidades referidas a y medidas en sistemas *diferentes*. Las cantidades primas son aquéllas que serían observadas por alguien en el sistema en movimiento y, por tanto, en reposo con respecto a él. Por otro lado, las cantidades **v**, **B** y $\partial \mathbf{B}/\partial t$ serían medidas por un observador estacionario en el sistema coordenado sin primas (al que a menudo se llamará sistema de laboratorio); esto es así porque la derivación se basó esencialmente en la figura 17-6 y todo se escribió desde el punto de vista de alguien que observa la curva C en movimiento.

Teniendo estos comentarios en mente, se puede ahora obtener una interpretación para el argumento del rotacional en (17-28), considerando la fuerza sobre una carga puntual q tal como la describirían estos dos observadores hipotéticos. Desde el punto de vista del ob-

servador estacionario, lo que se tiene es una carga q moviéndose a velocidad $\mathbf{v}$ en una inducción $\mathbf{B}$, por lo que la fuerza que actúa sobre ella está dada por (17-2) como $\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, siendo $\mathbf{E}$ el campo eléctrico en este sistema. Para el observador que se mueve con el sistema primo, la carga q se encuentra en reposo y, por tanto, la única posible fuerza electromagnética que él podría expresar de acuerdo con (17-2) sería $\mathbf{F}' = q\mathbf{E}'$, siendo aquí $\mathbf{E}'$ el campo eléctrico en el sistema en movimiento. Si se restringe la situación a casos donde la aceleración es nula o despreciable, como se ha estado haciendo en forma consistente, entonces se puede considerar que ambos sistemas son inerciales, y de la mecánica se sabe que las dos fuerzas deberán ser las mismas, es decir, que $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$. Al igualar las dos expresiones de las fuerzas, se encuentra que los campos de ambos sistemas están relacionados entre sí como sigue:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{17-29}$$

Se observa ahora que el argumento del rotacional de (17-28) es en realidad el campo eléctrico del sistema no primo, de tal suerte que la ecuación puede escribirse como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{17-30}$$

que es exactamente la misma que (17-10), que se encontró para el caso de medio estacionario. En otras palabras, la ley de inducción de Faraday, cuando se escribe de esta manera, tiene una *forma* que es *independiente del movimiento del medio.* [Aquí de nuevo, cuando se consideren velocidades relativas, $\mathbf{v}$, que sean comparables a la velocidad de la luz en el vacío, en el capítulo 28, se encontrará que (17-29) necesitará ser modificada; sin embargo, las conclusiones acerca de (17-30) *no* sufrirán modificación alguna.]

Los términos dependientes de $\mathbf{v}$ en (17-26) y (17-29) reciben, por lo general, el nombre de términos "del movimiento", mientras que aquéllos que dependen de la variación temporal de $\mathbf{B}$ son conocidos como los términos de "transformador". Algunos problemas pueden entenderse y resolverse de una manera más sencilla si se analiza la situación desde el punto de vista del observador en un sistema en movimiento, de tal manera que se utilizan expresiones como *fem de movimiento y campo eléctrico de movimiento*, dados por

$$\mathcal{E}_m' = \oint_C \mathbf{E}_m' \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} \tag{17-31}$$

$$\mathbf{E}_m' = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{17-32}$$

A continuación se analizan algunos ejemplos de este tipo.

Ejemplo

Para empezar, considérese el sistema ilustrado en la figura 17-3. Ya se ha hecho este análisis por medio de la ley de Faraday en su forma macroscópica (17-3), y se encontró que la fem inducida total estaba dada por (17-5). Dado que $\mathbf{B}$ es constante en el tiempo en este caso, la fem debe estar dada completamente por el término de movimiento. Ya que la barra deslizante es la única parte del sistema que se encuentra en movimiento, de (17-32) se ve que solamente ahí puede ocurrir que $\mathbf{E}' \neq \mathbf{0}$. También se observa que $\mathbf{E}'$ está dirigido a lo largo de la barra deslizante, como se muestra en la figura 17-7, y que tiene magnitud constante $E' = Bv$, dado que $\mathbf{B}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares. También se ilustra la dirección de $d\mathbf{s}$ que corresponde a la elección original del sentido positivo de recorrido por el circuito sobre la que se basó el cálculo de Φ dado en (17-4). Así, $\mathbf{E}'$ *y* $d\mathbf{s}$ se encuentran con sus direcciones

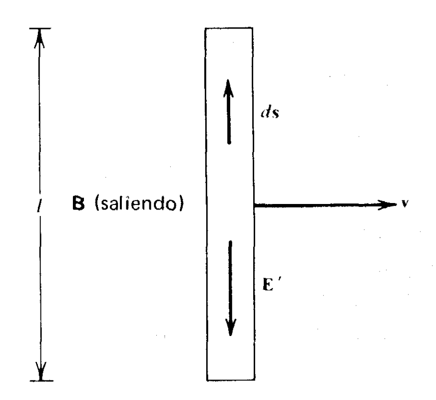


Figura 17-7 El campo eléctrico visto por un observador que se mueve con la barra de la figura 17-3.

encontradas y $\mathbf{E}'\cdot d\mathbf{s} = -E'ds = -$ Bvds, por lo que de (17-31) se tiene

$$\mathcal{E}_m' = -\int_{\text{barra}} Bv\,ds = -Blv \tag{17-33}$$

en concordancia con (17-5). Dado que la dirección de la corriente inducida será la misma que la de $\mathbf{E}'$, de las figuras 17-7 y 17-3 se desprende que I_{ind} tendrá un sentido como el de las manecillas del reloj, lo que, como ya se vio, concuerda con la ley de Lenz. Aunque en (17-5) se obtuvo el valor correcto de la fem inducida, no era posible entonces "localizarla", pero ahora es posible observar que se puede atribuir su origen completamente a la situación dentro de la barra deslizante. Además, *en este ejemplo* se puede atribuir el origen de la corriente inducida a la fuerza magnética producida sobre una carga que se mueve en una inducción, como se podría observar desde un punto estacionario.

Ejemplo

Como una variante del ejemplo anterior, considérese una barra conductora de longitud l que se mueve con una velocidad constante perpendicular a la barra y también perpendicular a una **B** constante, como se ilustra en la figura 17-8. En este caso no se cuenta con un circuito completo, por lo que no puede existir corriente inducida circulando. En efecto, en el *estado estacionario final* del sistema no puede existir corriente alguna sobre la barra, por lo que $\mathbf{E}' = 0$ de acuerdo con (13-25). Pero en este caso (17-29) conduce a

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{17-34}$$

de manera que el observador estacionario ve un campo eléctrico de magnitud $E = Bv$ diri-

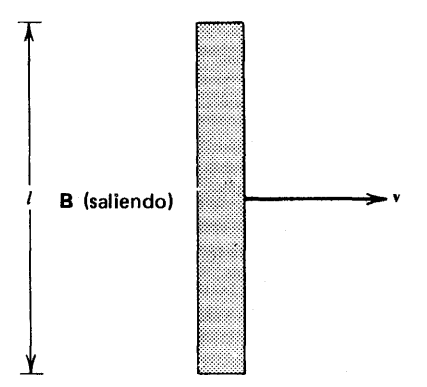


Figura 17-8 Una barra conductora en movimiento, que no forma parte de un circuito.

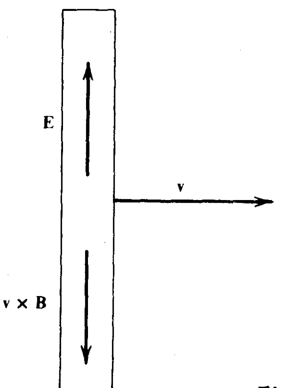


Figura 17-9 La situación vista por un observador estacionario.

gido hacia arriba a lo largo de la barra, como se muestra en la figura 17-9 que está dibujada desde su punto de vista. Pero este campo eléctrico debe venir de algún lado, y dado que se trata de un material homogéneo, solamente puede venir de cargas superficiales en sus extremos, mismas que tendrán los signos que se indican en la figura. Además, el observador no primo deberá llegar a la conclusión de que existe una diferencia de potencial $\Delta\,\Phi$ entre los extremos de la barra, que se puede calcular por (5-11) y (17-34), resultando

$$\Delta\phi=\int_{+}^{-}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=El=Blv \tag{17-35}$$

[Nótese que esto tiene el mismo valor *numérico* que la fem de movimiento dada por (17-33) para el ejemplo anterior, aunque ahora se está hablando de un concepto enteramente diferente.]

¿Cuál es el origen de estas cargas superficiales? durante las etapas originales del movimiento, las cargas móviles del conductor fueron sometidas a la acción de la fuerza magnética $q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ dirigida hacia abajo y a lo largo de la barra. Esto provocó una *separación* de cargas,

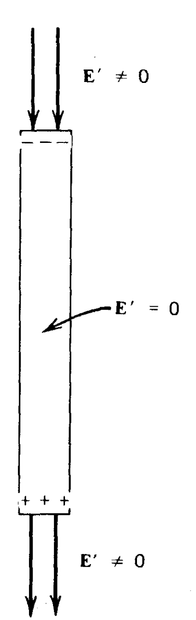


Figura 17-10 La situación vista por un observador que se mueve junto con la barra.

haciendo que las positivas se movieran hacia el fondo de la barra,mientras que las negativas debieron ir hacia arriba. Pero estas cargas separadas producen un campo eléctrico que apunta hacia arriba, mismo que presentará la tendencia a disminuir la fuerza total sobre una carga dada en el interior de la barra. Por último,un número suficiente de cargas será separado, por lo que el campo eléctrico **E** producido por ellas dará una fuerza hacia arriba que balanceará exactamente la fuerza magnética hacia abajo.Este es justamente el estado final de equilibrio que se describe en (17-34).

Pero ahora se tiene que el *número* de cargas en los extremos debe ser el mismo para ambos observadores, ya que únicamente se necesita un conteo, mismo que ambos pueden realizar igualmente bien. Por lo tanto, el observador en movimiento ve la *misma* distribución de carga en los extremos que la descrita anteriormente. Pero dado que **E'** = 0, en su sistema el observador debe necesariamente tomar la barra como un *volumen equipotencial,* por lo que la diferencia de potencial entre los extremos debe ser $\Delta\phi' = 0$, en contraste con (17-35) pero en concordancia con el hecho de que en su sistema no puede haber corriente. Sin embargo, estas cargas superficiales producirán un campo $\mathbf{E}' \neq 0$ en la región *exterior* a la barra, de modo que *su* idea de la situación será cualitativamente como la que se muestra en la figura 17-10; los valores de **E'** *en* la superficie pueden calcularse en función de la distribución superficial de carga a partir de (6-4). Así, la utilidad de este ejemplo ha sido demostrar que no necesariamente una situación dada será descrita en exactamente la misma manera por dos observadores diferentes cuando la descripción se hace en función de los campos, sino que su descripción respectiva dependerá de sus movimientos relativos.

Si la barra fuera un dieléctrico en lugar de un conductor, no habría cargas móviles que pudieran ser separadas para lograr una situación como la de la figura 17-9, por lo que es muy posible que en este caso **E'** no fuera igual a cero. Aquí el dieléctrico en movimiento podría quedar polarizado; en los ejercicios se consideran varios ejemplos de estas situaciones.

Ejemplo

Espira en rotación. Considérese de nuevo la espira con la orientación y dimensiones que se muestran en la figura 17-4. Sin embargo, se supone ahora que $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{x}}$ es constante en tiempo, mientras que la espira está girando como un cuerpo rígido alrededor del eje z, a velocidad angular constante ω, de manera que φ es una función del tiempo con la forma $\varphi = \omega t + \varphi_0$, siendo φ_0 el valor del ángulo para $t = 0$.

En primer término, se encuentra la fem inducida a partir del punto de vista general dado en (17-3). El flujo se calcula de la misma manera en que se obtuvo (17-14);

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da = B_0 ab\cos\varphi = B_0 ab\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{17-36}$$

Al sustituir esto en (17-3), se puede encontrar que la fem inducida es

$$\mathcal{E}_{ind} = \omega B_0 ab \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \tag{17-37}$$

Aquí también, si la espira estuviera formada por N vueltas de un alambre enrollado, cada una de las vueltas tendría la fem dada en (17-37), de modo que la fem total de la bobina sería N veces más grande, es decir,

$$\mathcal{E}_{ind} = N\omega B_0 ab \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \tag{17-38}$$

Lo que se acaba de ver es una forma rudimentaria de *generador* eléctrico, y es justamente esta aplicación de la ley de Faraday la que hoy día produce la mayor parte de la energía eléctrica en todo el mundo.

Aunque al comparar las fems inducidas dadas por (17-15) y (17-37) se pueden observar similitudes *de forma* obvias, los mecanismos físicos que intervienen son completamente diferentes; una de ellas es producida por una inducción cambiante sobre una bobina esta-

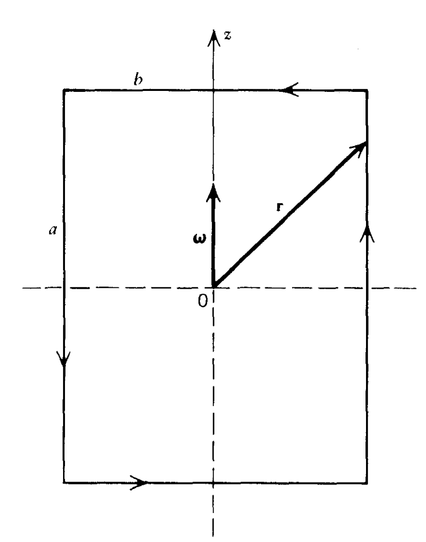


Figura 17-11 La espira rectangular se encuentra girando en presencia de una inducción constante.

cionaria, mientras que la otra surge en una bobina en movimiento con respecto a una inducción constante.

Es interesante considerar este mismo ejemplo en términos del campo eléctrico de movimiento. En la figura 17-11 se muestra el plano de la espira en un instante dado. La velocidad angular de rotación está dada por $\omega = \omega\,\hat{\mathbf{z}}$, mientras que r es el vector de posición de un punto sobre la espira, con respecto al origen en su centro. Las flechas indican el sentido positivo de recorrido de la espira, que se ha venido utilizando para que la normal $\hat{\mathbf{n}}$ de la figura 17-4 apunte aquí hacia afuera del papel. Para la rotación de un cuerpo rígido, la velocidad de cualquier punto está dada por $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, y dado que $\mathbf{B}$ está dada por $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{x}}$, se encuentra que el campo eléctrico de movimiento, $\mathbf{E}'_m$, se calcula de a partir de (17-32), (1-30) y (1-20), y es

$$\mathbf{E}'_m = \mathbf{v}\times\mathbf{B} = -(\mathbf{B}\cdot\mathbf{r})\omega = -B_0 x\omega\hat{\mathbf{z}} \tag{17-39}$$

Ahora se sustituye esta expresión en (17-31) y se integra sobre todo la espira. De la figura 17-11 se observa que las ds de las porciones horizontales de longitud b son perpendiculares a $\hat{\mathbf{z}}$, de modo que, sobre dichas porciones, $E'_m \cdot ds \sim \hat{\mathbf{z}} \cdot ds = 0$, por lo que no contribuyen a la integral. Para los dos lados verticales de longitud a se tiene que $ds = dz\,\hat{\mathbf{z}}$ y, si x_1 y x_r son las coordenadas x de los lados izquierdo y derecho, respectivamente, se encuentra que cuando (17-39) se sustituye en (17-31) se obtiene

$$\mathcal{E}'_m = \int_{a/2}^{-(a/2)} (-B_0 x_l \omega\, dz) + \int_{-(a/2)}^{a/2} (-B_0 x_r \omega\, dz) = \omega B_0 a(x_l - x_r) \tag{17-40}$$

Con referencia a la figura 17-4, se puede observar que $x_r = -1/2 b \operatorname{sen}\varphi$, mientras que $x_1 = 1/2 b \operatorname{sen}\varphi$; por lo tanto, $x_1 - x_r = b \operatorname{sen}\varphi$, con lo que (17-40) queda como

$$\mathcal{E}_m{}' = \omega B_0 ab \operatorname{sen}\varphi = \omega B_0 ab \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \tag{17-41}$$

exactamente como se encontró en (17-37). Sin embargo, ahora se puede observar que mientras existe un campo eléctrico de movimiento asociado con cada punto de la espira, dado por (17-39), únicamente aquellas porciones de la espira que son paralelas a la velocidad angular contribuyen a la fem inducida. En todas las demás porciones el campo eléctrico inducido es perpendicular al desplazamiento, por lo que no puede realizar trabajo alguno sobre una carga que pase por estas porciones de la espira.

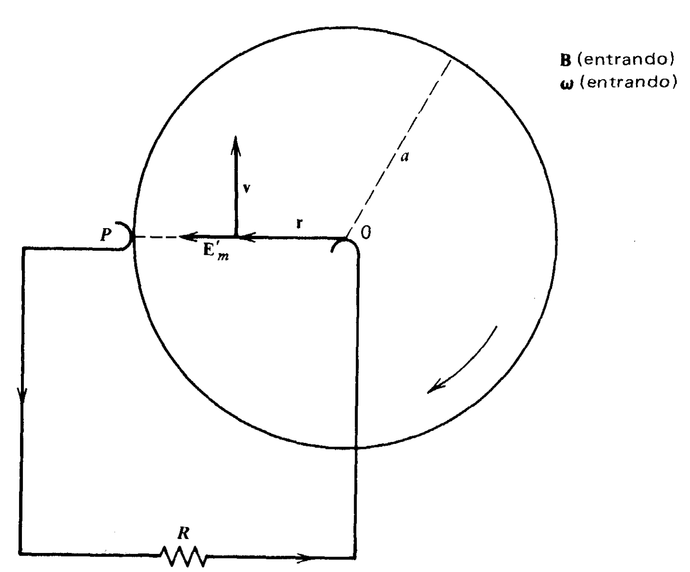


Figura 17-12 Generador homopolar.

Ejemplo

Generador homopolar. Faraday inventó este interesante aparato. Considérese un disco conductor circular, plano y de radio a que gira a velocidad angular constante, ω, en una $\mathbf{B}$ uniforme que es perpendicular al plano del disco. La situación se ilustra en la figura 17-12, donde se han tomado tanto $\mathbf{B}$ como ω apuntando hacia el papel. Existen contactos deslizantes en el eje central 0 y en un punto P en el borde del disco. Se completa el circuito con cables conductores y una resistencia R. En un punto cuyo vector de posición con respecto al origen en el centro es $\mathbf{r}$, la velocidad será $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ y estará dirigida tangencialmente como se indica. Por lo tanto, existirá un campo eléctrico de movimiento

$$\mathbf{E}_m' = (\omega \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \omega B \mathbf{r} \tag{17-42}$$

dirigido radialmente hacia afuera del disco, que se encuentra a partir de (17-32):
Cuando se sustituye esto en (17-31), se puede observar que la única contribución a la fem inducida provendrá de la parte del disco entre O y P, y dado que $ds = dr$, se tendrá

$$\mathcal{E}_m' = \int_0^P \mathbf{E}_m' \cdot d\mathbf{s} = \int_0^a \omega B r\, dr = \tfrac{1}{2}\omega B a^2 \tag{17-43}$$

La corriente resultante en el circuito externo tendrá la dirección que se indica y que corresponde al sentido general de $\mathbf{E}_m'$. Aunque este tipo de aparatos pueden ser construidos y en realidad funcionan, son en general muy imprácticos porque requieren de grandes dimensiones y de una muy alta velocidad de giro para obtener una fem de valor apreciable. Si en lugar de una configuración como ésta se utiliza una fem externa, como por ejemplo una batería, para producir una corriente a través del sistema, el disco girará, resultando así un *motor homopolar.*

17-4 Inductancia

Aunque en un principio se obtuvo la ley de Faraday en la forma (17-3), que es apropiada para un sistema considerado globalmente, pronto fue convertida en una expresión que im-

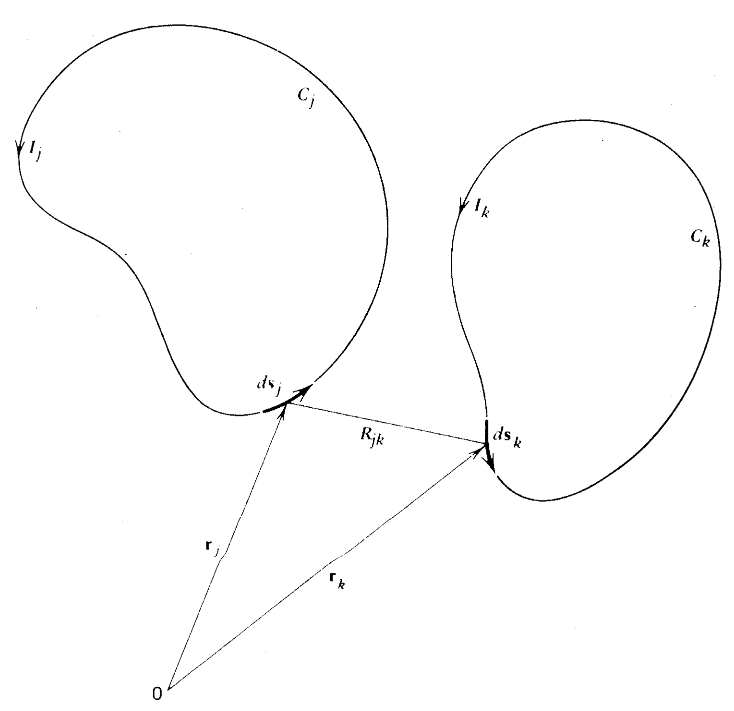


Figura 17-13 Posiciones de los elementos de corriente de dos circuitos filamentales.

plica los campos. Para muchas aplicaciones resulta conveniente tratar con las propiedades del sistema como un todo, muy a la manera de la capacitancia, que demostró ser un concepto útil; por ello es deseable aquí retomar esa actitud. Para empezar, se considera de nuevo el flujo magnético Φ: de esta manera se llegará a otra importante propiedad geométrica del sistema llamada *inductancia.*

La figura 17-13 muestra dos circuitos filamentales, C_j y C_k, con sus corrientes respectivas I_j e I_k. Los elementos lineales ds_j y ds_k se localizan por medio de sus rectores de posición $\mathbf{r}_j$ y $\mathbf{r}_k$ con respecto a un origen arbitrario *0,* siendo $r_{jk} = [\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k]$. La corriente I_k producirá una inducción $\mathbf{B}_k$ en cada uno de los puntos de la superficie S_j encerrada por C_j por lo que es posible calcular un flujo $\Phi_{k \to j}$ en C_j a partir de (16-6). Sin embargo, para los propósitos que aquí se persiguen resulta de mayor utilidad expresar el flujo en función del potencial vectorial por medio de (16-32). Por lo tanto, si $\mathbf{A}_k(\mathbf{r}_j)$ es el potencial vectorial producido por el circuito C_k en el punto $\mathbf{r}_j$ del circuito C_j entonces el flujo a través de C_j debido a C_k estará dado por (16-23(y (16-10) como

$$\Phi_{k \to j} = \oint_{C_j} \mathbf{A}_k(\mathbf{r}_j) \cdot d\mathbf{s}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_j} \oint_{C_k} \frac{I_k \, d\mathbf{s}_j \cdot d\mathbf{s}_k}{R_{jk}} \tag{17-44}$$

Se puede observar que el flujo a través de C_j es proporcional a la corriente I_k de C_k. Si a este factor de proporcionalidad se le asigna el símbolo M_{jk} y se le denomina la *inductancia mutua* de los circuitos *j* y *k,* se puede escribir que

$$\Phi_{k \to j} = M_{jk} I_k \tag{17-45}$$

$$M_{jk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_j} \oint_{C_k} \frac{d\mathbf{s}_j \cdot d\mathbf{s}_k}{R_{jk}} \tag{17-46}$$

De (17-46) se puede observar que la inductancia mutua es un factor puramente geométrico que relaciona los tamaños y orientaciones relativos de los dos circuitos y que, en principio puede ser encontrada evaluando la integral doble sobre los dos circuitos. Dado que μ_0 se definió con las unidades henry/metro en (13-2), se observa que la unidad de la inductancia mutua es el henry.

De manera similar, si se calcula el flujo en C_k debido a la corriente I_j de C_j se encontrará que

$$\Phi_{j\to k} = M_{kj} I_j \tag{17-47}$$

$$M_{kj} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{s}_k \cdot d\mathbf{s}_j}{R_{kj}} \tag{17-48}$$

Pero dado que $d\mathbf{s}_k \cdot d\mathbf{s}_j = d\mathbf{s}_j \cdot d\mathbf{s}_k$, $R_{kj} = R_{jk} = [\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k]$ y que el orden de integración no afecta el valor de la integral doble, se tiene

$$M_{kj} = M_{jk} \tag{17-49}$$

Esto indica que el flujo a través de C_j por una corriente I_0 en E_k es igual al flujo a través de C_k por la misma corriente I_0 en C_j.

De (17-46) se desprende que la inductancia mutua puede ser positiva o negativa dependiendo de las elecciones que se hayan hecho para los sentidos de recorrido por C_j y C_k, ya que estas elecciones pueden hacerse arbitraria e independientemente, lo que se reflejará, desde luego, en los signos de los flujos.

La fem total inducida que se producirá en uno de los circuitos por una corriente cambiante en el otro puede expresarse convenientemente en función de la inductancia mutua; si se sustituye (17-45) en (17-3) se obtiene

$$\mathcal{E}_{k\to j} = -\frac{d\Phi_{k\to j}}{dt} = -M_{jk}\frac{dI_k}{dt} \tag{17-50}$$

ya que se supone que los circuitos se encuentran en reposo, de manera que M_{jk} es constante. La fem inducida en C_k puede obtenerse a partir de (17-50) al intercambiar los índices j y k.

Si existe más de un circuito produciendo la **B** resultante a través de C_j, de (17-4) ó (16-11) se desprende que el flujo total será una suma de términos como (17-45):

$$\Phi_j = \sum_k \Phi_{k\to j} = \sum_k M_{jk} I_k \tag{17-51}$$

De manera similar, la fem inducida total en C_j producida por otros circuitos se puede obtener de (17-51) y (17-3), resultando

$$\mathcal{E}_{j,\,\text{mutua}} = -\frac{d\Phi_j}{dt} = -\sum_k M_{jk}\frac{dI_k}{dt} \tag{17-52}$$

Aunque (17-46) viene a ser una buena receta para calcular la inductancia mutua, por lo general una aplicación directa de la misma lleva a integrales muy complicadas.

Ejemplo

Dos anillos coaxiales paralelos. En la figura 17-14 se ilustra un círculo, C_j, de radio a que descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Otro círculo, C_k, de radio b es paralelo al plano xy y su centro está sobre el eje z a una distancia c del origen. Los vectores de posición relevantes son, según se puede observar, $\mathbf{r}_j = a \cos\varphi_j\,\hat{\mathbf{x}} + a \operatorname{sen}\varphi_j\,\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{r}_k = b\cos\varphi_k\,\hat{\mathbf{x}} + b \operatorname{sen}\varphi_k\,\hat{\mathbf{y}} + c\,\hat{\mathbf{z}}$ y por lo tanto,

$$d\mathbf{s}_j = d\mathbf{r}_j = a\,d\varphi_j(-\operatorname{sen}\varphi_j\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi_j\mathbf{y})$$

$$d\mathbf{s}_k = d\mathbf{r}_k = b\,d\varphi_k(-\operatorname{sen}\varphi_k\hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi_k\mathbf{y})$$

$$R_{jk} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| = \left[c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi_j - \varphi_k)\right]^{1/2}$$

$$d\mathbf{s}_j \cdot d\mathbf{s}_k = ab\cos(\varphi_j - \varphi_k)\,d\varphi_j\,d\varphi_k$$

Cuando se sustituyen éstas en (17-46), el resultado es

$$M_{jk} = \frac{\mu_0 ab}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\varphi_j - \varphi_k)\,d\varphi_j\,d\varphi_k}{\left[c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi_j - \varphi_k)\right]^{1/2}} \tag{17-53}$$

Aunque resultó relativamente fácil escribir (17-53), ésta no puede ser expresada en términos de funciones elementales, sino que requiere del uso de funciones elípticas, por lo que se dejará (17-53) como está.

En muchos casos, el problema de encontrar la inductancia mutua puede manejarse más fácilmente si se utiliza su definición como flujo por unidad de corriente, tal como lo expresa (17-45). Por tanto, este método requiere que se calcule primero Φ a partir del conocimiento previo de **B** y que después se use la ecuación determinativa (16-6).

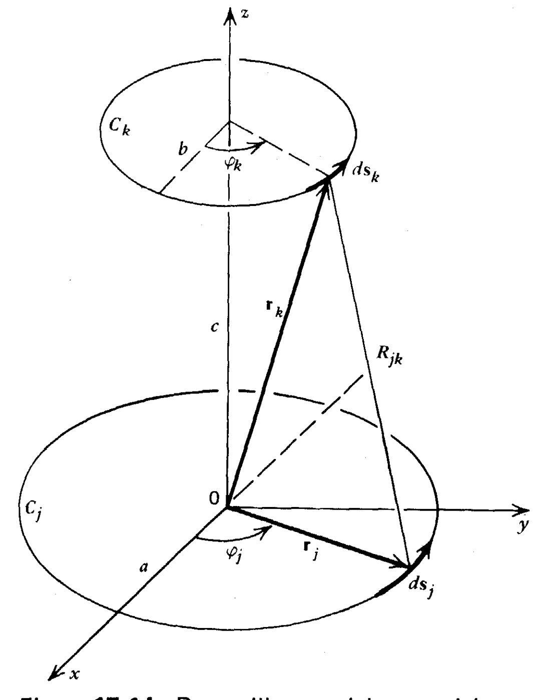


Figura 17-14 Dos anillos paralelos coaxiales.

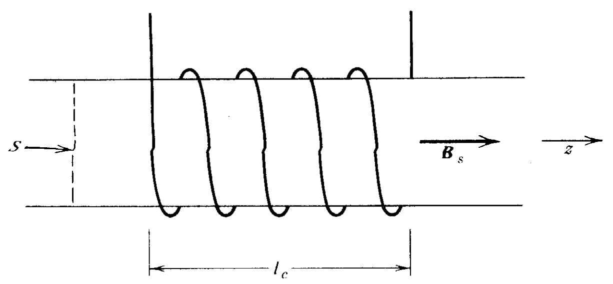


Figura 17-15 Bobina corta enrollada sobre un solenoide largo.

Ejemplo

Bobina corta enrollada sobre un solenoide largo. Supóngase que se tiene un solenoide infinitamente largo con n_s vueltas por unidad de longitud. Supóngase ahora que se enrolla otra bobina apretadamente sobre el solenoide de tal manera que tenga un total de N_c vueltas ocupando una longitud total l_c, como se muestra en la figura 17-15. El número de vueltas por unidad de longitud de la bobina es $n_c = N_c/l_c$. En este caso ya se sabe cómo calcular **B** cuando hay una corriente I_s en las vueltas del solenoide; el valor uniforme en el interior está dado por (15-26) y es $\mathbf{B}_s = \mu_0 n_s I_s \hat{\mathbf{z}}$. Si la bobina se enrolló apretadamente sobre la superficie del solenoide, se puede suponer que su sección sea aproximadamente la misma que la del solenoide, S. Y entonces, dado que $\mathbf{B}_s$ es normal al plano de S, el flujo por vuelta de la bobina será Φ vuelta $= B_s S = \mu_0 n_s S I_s$, de manera que el flujo total a través de las N_c vueltas será $\Phi_c = N_c \Phi$ vuelta $= \mu_0 n_s N_c S I_s$. Al sustituir esto en (17-45) se encuentra que la inductancia mutua de este sistema es

$$M_{cs} = \frac{\Phi_c}{I_s} = \mu_0 n_s N_c S = \mu_0 n_s n_c l_c S \tag{17-54}$$

Dado que, de acuerdo con (17-49), $M_{sc} = M_{cs}$, se puede utilizar este resultado para encontrar el flujo Φ_s producido en el solenoide cuando se hace pasar una corriente I_c por la bobina. El resultado será $\Phi_s = M_{sc} I_c = \mu_0 n_s n_c l_c S I_c$.

Es desde luego posible que el circuito C_j produzca un flujo $\Phi_{j \to j}$ que pase a través de sí mismo. El coeficiente de proporcionalidad que surge en este caso recibe el nombre de *autoinductancia*, que a menudo también suele llamarse simplemente *inductancia*. Si se utiliza la figura 17-16 y se procede de la misma manera que para obtener (17-44) a (17-46), se encuentra que

$$\Phi_{j \to j} = L_{jj} I_j \tag{17-55}$$

$$L_{jj} = L_j = L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_j} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{s}_j \cdot d\mathbf{s}'_j}{R_{jj}} \tag{17-56}$$

Aquí la integral doble se toma dos veces sobre el mismo circuito, y $d\mathbf{s}_j$ y $d\mathbf{s}'_j$ son dos elementos lineales diferentes pertenecientes a C_j. Como se indica en (17-56), algunas veces se suprime uno o más de los índices de la autoinductancia siempre que esto no cause ninguna confusión. Si se comparan las figuras (17-16) y (14-2), se puede observar que debido a la convención de signos que se está utilizando, $\Phi_{j \to j}$ siempre será positivo, de manera que la autoinductancia L_{jj} dada en (17-55) siempre será una cantidad positiva.

Si la corriente I_j está cambiando, entonces, de acuerdo con (17-3), existirá una fem

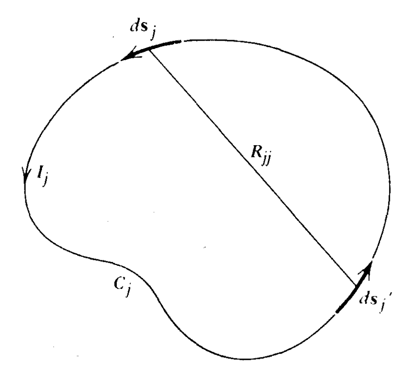


Figura 17-16 Cálculo de la autoinductancia.

inducida en el circuito debida a su propio flujo cambiante. A esto generalmente se le denomina *fem autoinducida* o *contra fem* y está dada por

$$\mathcal{E}_{j,\text{misma}} = -L_{jj}\frac{dI_j}{dt} = -L\frac{dI_j}{dt} \tag{17-57}$$

Por último, si existen otros circuitos en las cercanías, el flujo total en C_j será la suma de (17-51) y (17-55), y la fem inducida total será la suma de su fem autoinducida y mutuamente inducida. Así, se puede escribir

$$\Phi_j = \sum_k M_{jk} I_k \tag{17-58}$$

$$\mathcal{E}_j = -\sum_k M_{jk}\frac{dI_k}{dt} \tag{17-59}$$

donde el índice k toma el valor j, así como los valores usados para designar los demás circuitos, tomando en cuenta que cuando los índices son iguales se utiliza la notación

$$M_{jj} = L_{jj} = L_j \tag{17-60}$$

Aunque (17-56) tiene una apariencia llamativa y es útil en cálculos formales, *no* funciona para corrientes filamentales reales de grosor cero, por la razón de que siempre daría un valor infinito para la autoinductancia. Esto ocurre porque en la doble integral, cuando ds_j y ds_j' coinciden, $R_{jj} = 0$ y la integral se vuelve divergente. La razón física para ello es que cerca de un filamento tal, $|\mathbf{B}| \sim I/\rho$ y se vuelve infinita a medida que $\rho \to 0$, haciendo que el flujo también sea infinito. Para circuitos más realistas, en los que en realidad se manejan distribuciones de corriente, en lugar de tratar de desarrollar una generalización de (17-56), generalmente resulta mejor regresar a (17-55) para encontrar la autoinductancia como la relación de flujo a corriente, o se utilizan los métodos de la energía que se estudiarán en el siguiente capítulo. En consecuencia, se considera aquí solamente un ejemplo sencillo de la aplicación de (17-55).

Ejemplo

Solenoide ideal. Como en el caso del ejemplo anterior, la inducción está dada por $\mathbf{B} = \mu_0 nI$ y es uniforme en toda la sección de área S. Por lo tanto, el flujo por vuelta será $BS = \mu_0 nSI$.

Si se considera una longitud l del solenoide habrá nl vueltas y el flujo total será $\mu_0 n^2$ SII. Al sustituir esto en (17-55) se obtiene $L = \Phi/I$, o sea,

$$L = \mu_0 n^2 lS \tag{17-61}$$

Nótese que $L \sim lS$, que viene a ser el volumen de esta porción del solenoide. Se observa también que $L \sim n^2$; esto resulta porque $B \sim n$ y el número de vueltas es también $\sim n$.

Ejercicios

17-1 Tomar como sentido positivo de recorrido por C el opuesto al que se muestra en la figura 17-2 y demostrar que (17-3) da las mismas direcciones para la fem inducida en cada uno de los dos casos que se estudian en el texto.

17-2 En una cierta región, la inducción de función del tiempo está dada por $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\,(t/\tau)\,\hat{\mathbf{z}}$, siendo B_0 y τ constantes. Encontrar **A**. Suponer que el potencial escalar es cero y encontrar **E** a partir del valor obtenido para **A**. Utilizar este valor de **E** para evaluar el miembro izquierdo de (17-8) y así demostrar directamente que es igual al miembro derecho.

17-3 Supóngase que la corriente en el circuito recto, infinitamente largo, C' de la figura 13-5 está dada por $I = I_0 e^{-\lambda t}$, siendo I_0 y λ constantes. Encontrar la fem inducida que se producirá en el circuito rectangular de la misma figura. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida?

17-4 Un cable recto, infinitamente largo, que conduce una corriente constante I coincide con el eje z. Una espira circular de radio a descansa sobre el plano xz con su centro sobre el eje x positivo a una distancia b del origen. Encontrar el flujo a través de la espira. Si ahora ésta se mueve con rapidez constante, v, en dirección paralela al eje x y alejándose de i, encontrar la fem inducida en ella. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida?

17-5 Encontrar la fem inducida en la espira de la figura 17-4 cuando está rotando de manera tal que $\varphi = \omega t + \varphi_0$, mientras que, en forma simultánea, **B** está oscilando a la misma frecuencia, es decir, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} B_0 \cos(\omega t + \sigma)$. ¿Es posible escoger las constantes φ_0 y σ de modo que la fem inducida sea siempre igual a cero?

17-6 Un circuito cerrado dado tiene una resistencia total **R**. Si el flujo total a través de él cambia de ϕ_i a ϕ_f, demostrar que la magnitud de la carga total que fluirá por el circuito está dada por $Q = (\phi_f - \phi_i)/R$. Nótese que èste resultado es independiente del tiempo total requerido o de la manera particular en que ϕ varíe en el tiempo.

17-7 Una inducción uniforme **B** es paralela al eje de un cilindro no magnético de radio a y constante dieléctrica k_e. Si el cilindro gira alrededor de su eje a velocidad angular constante, ω, paralela a **B**, encontrar la polarización producida dentro del cilindro y la carga superficial en una longitud l del mismo.

17-8 Un cascarón esférico de radio a rota alrededor del eje z a velocidad angular constante, ω. Se encuentra dentro de una inducción uniforme que está sobre el plano xz a un ángulo α con el eje de rotación. Encontrar el campo eléctrico inducido en cada punto de la esfera.

17-9 Encontrar el valor de $\mathcal{E}_m$ producido por un generador homopolar de 1 metro de diámetro, girando con una velocidad angular de 3600 revoluciones/minuto en una inducción de 0.1 tesla.

17-10 Una barra metálica de longitud l gira alrededor de un eje que pasa a través de uno de sus extremos, a velocidad angular constante ω. Si el círculo barrido por la barra es perpendicular a una **B** uniforme, encontrar la fem inducida entre los extremos de la barra cuando se haya alcanzado el estado estacionario.

17-11 Un líquido conductor fluye con una velocidad v en un canal horizontal de profundidad w y ancho l, en una región donde la componente vertical de la inducción debida a la tierra es de B_d. Dos electrodos metálicos se colocan opuestos el uno al otro en las paredes verticales del canal. Los electrodos son rectangulares, de dimensiones a y b, y encuentran

a la misma distancia d del fondo del canal, con sus lados largos horizontales. Encontrar (a) la resistencia de la columna de líquido contenida en el paralelepípedo rectángulo entre los electrodos, (b) la fem inducida entre los electrodos, (b) la fem inducida entre los electrodos, (c) la corriente que resulta si se conectan los electrodos externamente por medio de un alambre de resistencia despreciable, y (d) los valores numéricos de (a), (b) y (c) para el caso en que el líquido sea agua de mar (σ = 4/ohm-metro) si B_d=5.5 X 10^{-5} tesla, w = 2 metros, l = 5 metros, $a = b$ = 0.5 metros, v = 3 metros/segundo y d = 9.25 metros.

17-12 Supóngase que la espira circular del ejercicio 17-4 se hace girar ahora de manera tal que su centro traza un círculo de radio b con centro en el origen, mientras que el plano de la espira permanece paralelo al eje z. En otras palabras, la espira tiene una velocidad angular $\omega = \omega\hat{\mathbf{z}}$. Encontrar $\mathbf{E}'$ en la espira móvil. Encontrar $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}$ alrededor de alguien que esté en un sistema de laboratorio fino.

17-13 Dos pequeñas partículas de polvo, dieléctricas y no magnéticas, en forma de aguja se mueven a velocidad **v** en ángulo recto con una **B** uniforme. El volumen de cada una de las partículas es V y la distancia R entre ambas es mucho mayor que sus dimensiones lineales. Las partículas se orientan con sus ejes sobre la misma línea que es perpendicular tanto a **v** como a **B**. Encontrar la fuerza que cada partícula ejercerá sobre la otra, además de la gravitacional. ¿Resulta ser de atracción o de repulsión?

17-14 Un freno electromagnético de "corriente parásita" consiste en un disco de conductividad σ y grosor d que gira alrededor de un eje que pasa por su centro y es normal a la superficie del disco. Se aplica una **B** uniforme perpendicular al plano del disco sobre una pequeña superficie a^2 localizada a una distancia ρ del eje. Demostrar que el momento de torsión que tiende a disminuir la velocidad del disco en el instante en que ésta es ω está dado, aproximadamente, por $\sigma\,\omega\,\mathbf{B}^2\,\rho^2\,a^2\,d$.

17-15 Un disco conductor muy delgado de radio a y conductividad σ descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Una inducción espacialmente uniforme se encuentra presente y está dada por $\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t + a)\hat{\mathbf{z}}$. Encontrar la densidad de corriente inducida, $\mathbf{J}_f$, producida en el disco.

17-16 Los dos ejercicios anteriores implicaron corrientes producidas en conductores como resultado de la ley de Faraday, y que reciben el nombre de "corrientes parásitas". Si resultan de una inducción variante en el tiempo, es posible obtener una ecuación diferencial que describa sus propiedades. Comenzar combinando (17-10) y (12-25) y después aplicar (1-122) para demostrar que, para el caso de corrientes constantes, las corrientes parásitas satisfacen la ecuación $\Delta^2\,\mathbf{J}_f = a\mu_0\,(\delta\,\mathbf{J}_f/\delta t)$.

17-17 El henry es una unidad bastante grande para la inductancia. Para lograr una idea de su magnitud, aplicar (17-61) a un solenoide de 1 metro de largo y 2 centímetros de diámetro que tiene un total de 600 vueltas.

17-18 Utilizar (17-46) para encontrar la inductancia mutua de los circuitos que se muestran en la figura 13-5. ¿Es consistente esta respuesta con el resultado del ejercicio 17-3? (Clave: supóngase que la porción recta va de $-L$ a L, siendo L muy grande, y pásese al límite $L \to \infty$ lo más tarde que se pueda en el cálculo.)

17-19 Las dos corrientes antiparalelas infinitamente largas y el rectángulo de la figura 17-17 están en el mismo plano. Los lados de longitud B son paralelos a la dirección de las corrientes. Encontrar la inductancia mutua entre el circuito de las corrientes opuestas y el rectángulo. Verificar que en el límite apropiado el resultado se reduce al de los ejercicios previos.

17-20 Una bobina toroidal de N vueltas tiene un radio central del toroide igual a b y el radio de su sección circular es a. Demostrar que su autoinductancia es $\mu_0 N^2[b - (b^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}]$.

17-21 Una bobina toroidal de N vueltas tiene un radio central b y una sección cuadrada de lado a. Encontrar su autoinductancia.

17-22 Demostrar que, como sería de esperar, cuando las dimensiones de la sección de un toroide son pequeñas en comparación con el radio central, los resultados de los dos ejercicios anteriores dan aproximadamente la misma autoinductancia cuando se expresan en función de la superficie de sección S.

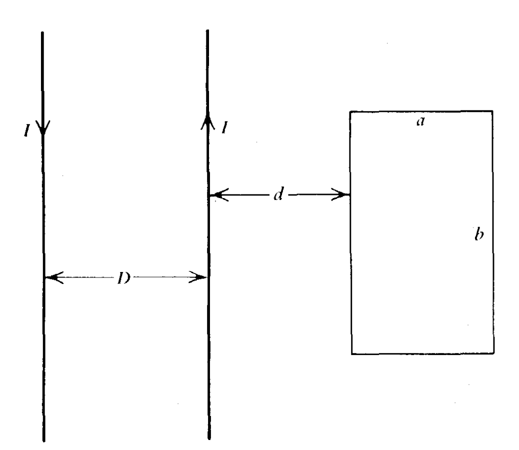


Figura 17-17 Las corrientes y el rectángulo del ejercicio 17-19

17-23 Dos conductores cilíndricos huecos, infinitamente largos, son paralelos entre sí. El radio de cada uno de ellos es A y sus ejes se encuentran separados una distancia D, de modo que, en corte, son como se muestran en la figura 11-10. Conducen corrientes I iguales y opuestas. Utilizar los resultados del ejercicio 16-17 y lo que sigue de (16-40) pra demostrar que la autoinductancia de una sección de longitud l de este sistema se relaciona de manera simple con la capacitancia de la misma sección, y aplicar entonces este resultado para encontrar L.

17-24 Dos cascarones cilíndricos conductores, coaxiales e infinitamente largos, conducen corrientes de igual magnitud pero en direcciones opuestas. Si el radio del cascarón interior es a y el del exterior es b, encontrar la autoinductancia de sección de longitud l de este sistema.

17-25 En la figura 17-14, suponer que $c \gg a$ y $c \gg b$ y demostrar que (17-53) resulta aproximadamente igual a $\pi\mu_0 a^2 b^2/2c^3$.

17-26 Considérese una situación en la que se pueda suponer que todo el flujo que pasa a través de una bobina 1 pasa también a través de una bobina 2, y viceversa. Por ejemplo, se podría tener un solenoide muy largo de n_1 vueltas por unidad de longitud y área de sección igual a S_1, sobre el que se ha enrollado otro solenoide muy largo de n_2 vuetas por unidad de longitud y área seccional S_2, de tal forma que $S_2 \simeq S_1$, como sería el caso para alambres muy delgados. De manera similar, se podrían tener dos devanados toroidales enrollados apretadamente uno sobre el otro y ambos sobre el mismo toroide. Demostrar que, en estas circunstancias, la inductancia mutua M_{12} está relacionada con las autoinductancias individuales L_1 y L_2 *por medio de* $|M_{12}| = \sqrt{L_1 L_2}$. Esta relación proporciona un límite superior para la inductancia mutua de las dos bobinas. Sin embargo, en un caso real no todo el flujo producido en una de las bobinas pasará a través de la otra, como de seguro ocurre para las espiras circulares de la figura 17-14. En ese caso la inductancia mutua será menor que el valor dado arriba. Es costumbre en estos casos escribir la relación como $|M_{12}| = k\sqrt{L_1 L_2}$, siendo k algún número menor a la unidad que recibe el nombre de *coeficiente de acoplamiento.*

Capítulo 18
Energía magnética

En el capítulo 7 se evaluó la energía electrostática de un sistema en función del trabajo reversible necesario para establecer una configuración dada de cargas. También se requiere trabajo para producir un conjunto determinado de corrientes en los circuitos, siendo aquí la meta encontrarla y poder así asociar una energía magnética al sistema. Sin embargo, en el caso magnético no se cuenta con un análogo de la carga puntual de la electrostática, por lo que se hace necesario proceder de una manera diferente. Después de que se haya obtenido un resultado en función de los parámetros globales del sistema, se verá que es posible expresar la energía en función de la inducción magnética e interpretarla como distribuida en todo el espacio.

18-1 Energía de un sistema de corrientes libres

Para comenzar, se considera un sistema de corrientes en un grupo de circuitos, de manera tal que lo que realmente se estará evaluando será la energía de *corrientes libres,* y más específicamente de corrientes de conducción. Se desea calcular el trabajo reversible que se requiere para comenzar con una situación inicial en la que todas las corrientes son cero y terminar con una situación en la que la corriente del circuito j tenga el valor final I_j, siendo $j = 1,2,\ldots, N$, y N el número total de circuitos. Por lo que ya se aprendió en el capítulo 13, existirán fuerzas de atracción y repulsión entre estos circuitos, que aquí se supondrá que son todos rígidos y fijos en el espacio, de manera que no se haga necesario considerar la energía mecánica de posibles deformaciones o de movimiento de los circuitos. Debido a (12-35), también se sabe que la existencia misma de las corrientes implica la existencia de conversión de energía eléctrica en calor. Aunque esta energía debe ser suministrada por fuentes externas, tales como baterías, no forma en realidad parte del trabajo *reversible* que se requiere para establecer las corrientes y, por lo tanto, se le puede excluir de la consideración presente.

Supóngase una etapa intermedia del proceso, en la que la corriente de cada C_j está dada por sus i_j, de modo que las corrientes no hayan alcanzado sus valores finales I_j. Cualquier cambio en una de las corrientes en un lapso dt provocará un cambio $d\,\phi_j$ en el flujo a través de C_j, así como una fem inducida en él, de acuerdo con (17-3). La fuente externa debe suministrar una fem igual a este valor, pero en sentido opuesto, a fin de mantener el

el sistema. Durante este tiempo pasará por él una carga $dq_i = i_j dt$, de tal forma que el trabajo realizado por la fuente externa sera $dW_{ext,\, j} = \mathcal{E}_{ext} dq_j = -\mathcal{E}_{j,\, ind} i_j dt = i_j d\Phi_j$. Así, en una expresión *general*, se tiene que

$$dW_{ext,j} = i_j \, d\Phi_j \tag{18-1}$$

es el trabajo reversible realizado por la fuente externa y, por lo tanto, es la energía magnética. Al sumar las contribuciones de todas las corrientes se encuentra que el trabajo total será

$$dW_{ext} = dU_m = \sum_{j=1}^{N} i_j \, d\Phi_j \tag{18-2}$$

que ya se puede escribir como el incremento, dU_m, de la energía magnética.

Dado que los circuitos rígidos son constantes en forma y configuración relativa, de (17-46) se desprende que las inductancias serán constantes por lo que, de acuerdo con (17-58), la única manera de que los flujos puedan cambiar es que haya cambios en las corrientes, así que

$$d\Phi_j = \sum_{k=1}^{N} M_{jk} \, di_k \tag{18-3}$$

Al combinar (18-2) con (18-3) se obtiene

$$dU_m = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} M_{jk} i_j \, di_k \tag{18-4}$$

que debe ahora sumarse a medida que las corrientes aumentan desde sus valores iniciales cero hasta sus valores finales I_j. Hay varias formas de visualizar la realización de un *proceso* como éste. Por ejemplo, se podría hacer que las corrientes llegaran a su valor final una por una, se podrían aumentar todas en forma pareja y simultánea, se podrían aumentar unas cuantas primero y otras después, y así sucesivamente. En cualquiera de los casos, el resultado final para la energía debe depender tan sólo del *estado final y ser independiente del proceso* mediante el cual se alcanza, como se comprende fácilmente después de haber estudiado las funciones de estado en la termodinámica. De acuerdo con esto, se utilizará aquí un esquema muy sencillo para aumentar todas las corrientes simultáneamente y se dejará para los ejercicios demostrar que se obtiene el mismo resultado si se aumentan las corrientes de una en una.

Supóngase que en un instante dado, t, cada una de las corrientes se encuentra a la misma *fracción* f de su valor final, de tal forma que $i_j(t) = f(t) I_j$, donde $f(t)$ es independiente de j y varía desde el valor inicial cero a su valor final unidad. Entonces $di_k = I_k df$, por lo que (18-4) queda como

$$dU_m = \sum_j \sum_k M_{jk} I_j I_k f \, df \tag{18-5}$$

Al sumar estos cambios desde el valor inicial hasta el final, y habiendo escogido como cero de energía el punto donde $U_m = 0$, para el estado inicial en el que no hay corrientes, se encuentra que la energía magnética está dada por

$$U_m = \sum_j \sum_k M_{jk} I_j I_k \int_0^1 f\,df = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} M_{jk} I_j I_k \qquad (18\text{-}6)$$

Se puede observar que (18-6) es independiente de la manera precisa en que cambia f durante el tiempo del proceso y, en ese sentido, es independiente del proceso mismo; desde luego que todo esto queda condicionado a que los cambios sean lentos, de manera que se pueda considerar el proceso reversible.

Se puede escribir (18-6) en función de las corrientes y flujos, utilizando nuevamente (17-58), para tener

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_j I_j \Phi_j \qquad (18\text{-}7)$$

siendo ϕ_j el flujo total a través de C_j proveniente de todas las fuentes, inclusive ella misma.

Ejemplo

Dos circuitos. Cuando $N = 2$, se puede escribir (18-6) por medio de (17-66 y (17-49) como

$$U_m = \tfrac{1}{2}(M_{11}I_1^2 + M_{12}I_1I_2 + M_{21}I_2I_1 + M_{22}I_2^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}L_1I_1^2 + M_{12}I_1I_2 + \tfrac{1}{2}L_2I_2^2 \qquad (18\text{-}8)$$

El primer término únicamente depende del circuito 1 y representa el trabajo necesario para establecer la corriente I_1 en contra de su propia autoinductancia, por lo que se le puede dar el apropiado nombre de "autoenergía" de L_1; en lo que toca al tercer término se pueden hacer observaciones similares. De esta manera, para una sola inductancia aislada, L, con una corriente I, se puede expresar la energía como

$$U_m = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad (18\text{-}9)$$

El término central de (18-8) abarca ambas corrientes y surge del hecho de que un flujo cambiante en un circuito produce una fem inducida en el otro; se puede pensar que este término representa la "energía de interacción" de los dos circuitos. [Resulta interesante comparar (18-6), (18-7) y (18-8) con los resultados (7-16), (7-17) y (7-18) que se lograron para el caso de conductores en un campo electrostático].

Los resultados obtenidos hasta aquí son apropiados para corrientes filamentales, y ahora se procederá a expresarlos de manera tal que se pueden aplicar al caso importante de corrientes distribuidas. Si se escribe nuevamente ϕ usando (16-23) en (18-7), se obtiene

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_j \oint_{C_j} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \cdot I_j\, d\mathbf{s}_j \qquad (18\text{-}10)$$

donde $\mathbf{A}(\mathbf{r}_j)$ es el potencial vectorial total en la posición $\mathbf{r}_j$ del elemento de corriente $I_j d\mathbf{s}_j$ de C_j. Así, la integral sobre C_j da la contribución a U_m de todos los elementos de corriente de C_j, y entonces la suma sobre j da la suma de las contribuciones de todos los elementos de corriente de todo el sistema bajo consideración. Por lo tanto, si se utiliza la primera de las equivalencias de (12-10), se debe recordar que se están manejando corrientes

libres y en consecuencia se debe integrar con respecto a todas las regiones que contienen corrientes. (18-10) se puede volver a escribir como

$$U_m = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{J}_f(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\,d\tau \qquad (18\text{-}11)$$

En realidad, se puede extender la región de integración para cubrir todo el espacio, ya en las regiones en las que no hay corrientes , $\mathbf{J}f = 0$ por lo que su contribución a (18-11) será nula; por lo tanto, se puede expresar la energía magnética final en la forma

$$U_m = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{J}_f(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\,d\tau \qquad (18\text{-}12)$$

Si se compara este resultado con (7-10), se puede observar que el potencial vectorial tiene una función muy similar en la determinación de la energía de un sistema de corrientes a la del potencial escalar para un sistema de cargas. El resultado (18-12), así como el (18-7), tiene una forma acorde con la actitud adoptada aquí de que la energía está estrechamente relacionada con las corrientes y que está "localizada" en sus posiciones.

Si existen corrientes superficiales se puede utilizar el otro equivalente de (12-10) para expresar sus contribuciones a la energía, resultando

$$U_m = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{K}_f(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\,da \qquad (18\text{-}13)$$

Ejemplo

Solenoide ideal infinitamente largo. En (15-22) se encontró que este sistema puede describirse en función de una corriente superficial $K = nI$ que circula por su superficie exterior, de manera que, de acuerdo con la figura 16-5, se puede escribir $\mathbf{K}_f = nI\,\varphi$. De manera similar, en (16-46) y después de (16-50) se encontró que el potencial vectorial en la superficie (donde $\mathbf{K}_f \neq 0$) es $\mathbf{A} = {}^1\!/_2\, \mu_0 n I_t a\hat{\varphi}$, donde se ha escrito el radio como a. Si se introducen estos resultados en (18-13) para obtener la energía de un trozo de longitud l del solenoide, de manera que la superficie de integración es $2\,\pi\, a$, se encuentra que el integrando es constante, por lo que

$$U_m = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \bar{a}\right)da = \frac{1}{2}\mu_0 n^2(\pi\bar{a}^2)lI^2 \qquad (18\text{-}14)$$

Al comparar esto con (18-9) se puede observar que el área de la sección es $S = \pi a^{-2}$, y que entonces la inductancia viene a ser $L = \mu_0 n^2 Sl$, que es exactamente lo que se encontró en (17-61) calculando el flujo.

18-2 Energía en función de la inducción magnética

Como se hizo notar brevemente después de (18-12), la forma de esta ecuación resulta apropiada para interpretar la energía como asociada con las corrientes y localizada en ellas. Este punto de vista es consistente con la propiedad de acción a distancia de la ley de Ampere y su énfasis en los elementos de corrientes y sus orientaciones relativas. Sin embargo, el principal interés en este asunto es la descripción de los fenómenos en términos de los campos, por lo que es deseable ahora expresar la energía en función de ellos.

Se puede utilizar (15-12) para expresar $\mathbf{J}_f = (\Delta\times \mathbf{B})/\mu_0$, ya que por el momento solamente se están considerando corrientes libres; en este caso (18-12) queda como

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}\,d\tau \tag{18-15}$$

Se puede ahora volver a expresar el integrando al utilizar (1-118), (16-7) y (1-17):

$$\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}^2 - \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \tag{18-16}$$

Al sustituir esto en (18-15) y utilizar el teorema de la divergencia (1-59) para expresar una de las integrales de volumen resultantes como integral de superficie, se encuentra que

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \mathbf{B}^2\,d\tau - \frac{1}{2\mu_0}\oint_S(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{a} \tag{18-17}$$

Pero la integral con que se empezó, (18-12), se debería tomar sobre todo el espacio, de tal forma que en (18-17) se debe considerar V como un volumen muy grande y S como su inmensa superficie de frontera. Así, a medida que V se hace infinito, S también se extenderá hasta el infinito. Supóngase que la distribución de corrientes está siempre contenida en un volumen finito. De esta manera, a medida que S se aleja mucho, la distribución total de corrientes parecerá estar contenida en un volumen muy pequeño a una distancia R. Si se recuerdan (16-12) y (14-7), se puede observar que, a medida que $R\to\infty$, lo peor que puede ocurrir es que

$$\mathbf{A}\sim\frac{1}{R} \qquad \mathbf{B}\sim\frac{1}{R^2} \qquad \mathbf{A}\times\mathbf{B}\sim\frac{1}{R^3} \tag{18-18}$$

de modo que la magnitud del integrando disminuye a razón de R^3. Sin embargo, como se podrá apreciar en el siguiente capítulo, esta estimación resulta demasiado pesimista pues, de hecho, a grandes distancias la distribución de corrientes parecerá una espira cerrada para la cual se encontrará que

$$\mathbf{A}\sim\frac{1}{R^2} \qquad \mathbf{B}\sim\frac{1}{R^3} \qquad \mathbf{A}\times\mathbf{B}\sim\frac{1}{R^5} \tag{18-19}$$

La supericie de integración está creciendo como R^2, por lo que, para una R muy grande,

$$\oint(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{a}\sim\frac{1}{R^5}\cdot R^2\sim\frac{1}{R^3}\underset{R\to\infty}{\to}0 \tag{18-20}$$

Así, cuando el volumen V en (18-17) se incrementa para incluir todo el espacio, la integral de superficie se anula, por (18-20), con lo que la expresión para la energía queda simplemente como

$$U_m = \int_{\text{todo el espacio}}\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\,d\tau \tag{18-21}$$

[Nótese que aun cuando (18-18) fuera aplicable, la integral de superficie también se anularía, como ocurrió en el correspondiente caso eléctrico de (7-27)].

El resultado (18-21) tiene la misma forma general que el resultado eléctrico (7-28), por lo que se le puede dar la misma clase de *interpretación*, es decir que la energía magnética se encuentra distribuida en forma continua a través del espacio con una *densidad* de energía, u_m, dada por

$$u_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \tag{18-22}$$

de manera que la energía magnética total puede expresarse como

$$U_m = \int_{\text{todo el espacio}} u_m \, d\tau \tag{18-23}$$

Las unidades de u_m son joule (metro)^3.

Como ya se vió después de (7-30), no es necesario interpretar la expresión (18-21) de esta manera, pero tal interpretación resulta natural y llega a ser de gran utilidad, además de ser consistente con todo lo que se hará más adelante.

Recuérdese también que (7-28) podía ser muy útilmente aplicada para el cálculo de la capacitancia. De manera similar, se puede usar (18-21) para el cálculo de la inductancia al combinarla con (18-9). Así, si se ha evaluado **B** por otros medios, se le puede utilizar para calcular la energía; se sabe también que U_m es proporcional a I^2, de manera que se puede encontrar L como $L = 2U_m/I^2$. Como siempre, este método queda mejor ilustrado con ejemplos.

Ejemplo;

Solenoide ideal infinitamente largo. Ya se utilizó este caso para ilustrar (18-13). Si se utilizan (15-26) y (15-25) en (18-22), se encuentra que la densidad de energía es $u_m = {}^1/_2\, \mu_0 n^2 I^2$ = const. en el interior del solenoide y $u_m = 0$ en su exterior. Si se considera una longitud l del solenoide, con sección S, el volumen será Sl, con lo que (18-23) queda como

$$U_m = \int \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \, d\tau = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 Sl$$

en completa concordancia con (18-14); así se obtiene la misma autoinductancia $L = \mu_0 n^2 Sl$ que ya se ha encontrado dos veces antes.

Ejemplo

Cable coaxial. La figura 18-1 muestra el mismo sistema que se ilustró en la figura 6-12, es decir, dos conductores cilíndricos coaxiales; el conductor interior tiene un radio a, mientras que el exterior tiene un radio interno b y uno externo c. Supóngase que los conductores tienen corrientes totales iguales y en direcciones opuestas, de magnitud I que están distribuidas uniformemente en sus secciones, y que existe vacío entre los dos conductores. Se toma el eje z en la dirección de la corriente del cilindro interior. Los valores de **B** requeridos pueden ser encontrados por medio de la forma integral de la ley de Ampere (15-1). Debido a la simetría de la situación, se puede reconocer que **B** deberá tener la forma $\mathbf{B} = B\varphi\,(\rho)\hat{\varphi}$, de tal forma que resulta apropiado tomar como trayectoria de integración un círculo de radio ρ. En estas circunstancias, la evaluación de (15-1) resulta ser exactamente igual que la de (15-17), de modo que para cualquier valor de ρ se puede utilizar (15-18) y escribir

$$B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi\rho} \tag{18-24}$$

quedando tan sólo pendiente la evaluación de I_{enc} para una trayectoria dada. Resulta conveniente considerar separadamente cada una de las regiones marcadas en la figura como 1, 2, 3 y 4; ellas corresponden, respectivamente, al conductor interior, al espacio entre los conductores, al conductor exterior y a todo el espacio exterior al sistema. De esta manera se tendrá una mejor idea de cómo contribuye cada una de las regiones a la autoinductancia total del sistema.

1. $(0 \leqslant \rho \leqslant a)$ Aquí, $I_{enc}/I = (\pi\rho^2 / \pi a^2) = \rho^2/a^2$, y (18-24) conduce a

$$B_{\varphi 1} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \tag{18-25}$$

como en (15-20). Dado que $\mathbf{B}^2 = B_\varphi^2$ para este caso, la densidad de energía correspondiente que se encuentra por (18-22), es

$$u_{m1} = \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \tag{18-26}$$

El elemento de volumen es $d\tau = \rho d\rho d\varphi\, dz$, de acuerdo con (1-83), y al integrar sobre una longitud l del sistema se encuentra que la energía con esta parte es

$$U_{m1} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 \rho^2}{8\pi^2 a^4} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi} \tag{18-27}$$

Nótese que este resultado es finito porque el valor de B_φ se aproxima a cero a medida que $\rho \to 0$, en lugar de volverse infinito ahí.

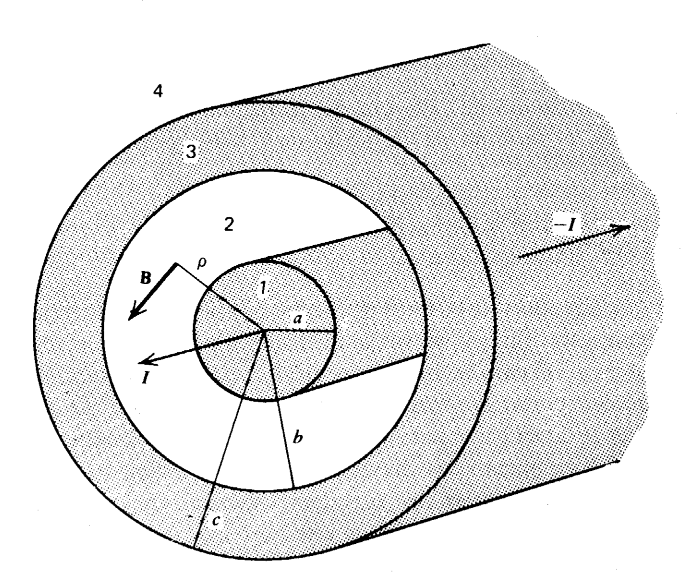


Figura 18-1 Un cable coaxial conduciendo corrientes iguales en direcciones opuestas.

2. ($a \leqslant \rho \leqslant b$) Aquí $I_{enc} = I$, por lo que, procediendo de la misma manera que arriba, se obtiene

$$B_{\varphi 2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \tag{18-28}$$

$$u_{m2} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2\rho^2} \tag{18-29}$$

$$U_{m2} = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{18-30}$$

3. ($b \leqslant \rho \leqslant c$) Aquí $I_{enc} = I - I[\pi(\rho^2 - b^2)/\pi(c^2 - b^2)] = I(c^2 - \rho^2)/(c^2 - b^2)$, y por lo tanto

$$B_{\varphi 3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(c^2 - b^2)}\left(\frac{c^2}{\rho} - \rho\right) \tag{18-31}$$

$$u_{m3} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2(c^2 - b^2)^2}\left(\frac{c^4}{\rho^2} - 2c^2 + \rho^2\right) \tag{18-32}$$

$$U_{m3} = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2}\left[c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)\right] \tag{18-33}$$

4. ($c < \rho$) Aquí, $I_{enc} = I - I = 0$. Por lo tanto, $B_{\varphi 4}$, u_{m4} y U_{m4} son todas iguales a cero.

Se puede así obtener la energía total sumando (18-27), (18-30) y (18-33), y cuando se combina esto con (18-9) se puede encontrar la autoinductancia total de una longitud l de este sistema, que resulta ser

$$L = \mu_0 l \left\{ \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2\pi(c^2 - b^2)^2}\left[c^4 \ln\left(\frac{c}{b}\right) - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)\right]\right\} \tag{18-34}$$

cuya forma claramente indica la contribución de cada una de las regiones al total. En la mayoría de las situaciones prácticas, el término de en medio de (18-34) es la principal fuente de la inductancia.

18-3 Fuerzas magnéticas sobre circuitos

Como ya se sabe, dos circuitos que conducen corrientes ejercerán, por lo general, fuerzas el uno sobre el otro y, en principio, estas fuerzas se pueden calcular a partir de la ley de Ampere. Sin embargo, como ocurrió en el caso de las fuerzas electrostáticas en la sección 7-4, a menudo resulta conveniente expresar las fuerzas en función de los cambios de energía. Esto es precisamente lo que se desea hacer para el caso de las fuerzas magnéticas.

Para simplificar, se considerarán solamente dos circuitos, ya que será suficiente para ilustrar todas las características generales necesarias. Así, la situación general será justamente la que se muestra en la figura 13-1, con la cual se inició en este libro el estudio del magnetismo. Como ya se vió en (13-9), para poder tener a este sistema en equilibrio, la fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ sobre C debe estar balanceada por otra fuerza mecánica igual y opuesta

$\mathbf{F}_{mec.}$ causada por un agente externo, que podría estar constituido por resortes, soportes o cosas parecidas.

Imagínese que el vector de posición $\mathbf{r}$ de cada punto de C cambia lentamente en la *misma* cantidad $d\mathbf{r}$; así, el circuito complejo se trasladará esta misma cantidad, pero no habrá girado. El otro circuito C', se mantiene fijo, así como las baterías encargadas de mantener las corrientes. (En consecuencia, nunca será posible tratar a estos circuitos como sistemas completamente aislados). En estas circunstancias, el trabajo realizado por la fuerza mecánica será trabajo reversible e igual al cambio, dU_t, de la energía total del sistema completo, es decir, $dU_t = \mathbf{F}_{mec} \cdot d\mathbf{r}$. Pero si la aceleración es cero, o casi, el circuito C permanecerá en equilibrio, o se apartará de él en una fracción infinitesimal, por lo cual sigue siendo cierto que $\mathbf{F}_m = -\mathbf{F}_{mec}$, por lo que se puede expresar que

$$dU_t = -\mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} \tag{18-35}$$

Al comparar esto con (1-38), se puede observar que

$$\mathbf{F}_m = -\nabla U_t \tag{18-36}$$

que viene a ser un resultado análogo al resultado unidimensional de (7-36). Aunque estos resultados son fundamentales, será deseable, de ser posible que la fuerza magnética estuviera relacionada únicamente con los cambios de la energía magnética. Si se observa que el cambio total de energía es la suma del cambio de la energía magnética, dU_m, y el de las baterías, dU_B, se tiene que

$$dU_t = dU_m + dU_B \tag{18-37}$$

Resulta útil tratar de visualizar dos posibles condiciones bajo las que se puede llevar a cabo este desplazamiento.

1. Corrientes constantes. Cuando uno de los circuitos se mueve con respecto al otro, por lo general se registrará un cambio en los flujos a través de ellos; esto provocará la existencia de fem inducidas y, para que las corrientes se mantengan constantes, las baterías, deberán realizar trabajo en contra de estas fem o de lo contrario se realizará trabajo sobre ellas, dependiendo del signo del cambio en los flujos. Se puede utilizar (18-7) para expresar la energía de las corrientes I e I' como $U_m = \frac{1}{2}(I\phi + I'\phi')$. Así, si I e I' son constantes, se tiene que $dU_m = \frac{1}{2}(Id\phi + I'd\phi')$. Ya se encontró anteriormente, en (18-2), el trabajo que deben proporcionar las fuentes externas (baterías); sin embargo, se debe recordar que en este caso las corrientes ya se encuentran en sus estados finales, de manera que la dU_m de (18-2) no es la misma dU_m que se está estudiando aquí. Dado que cualquier trabajo realizado por las baterías representa una disminución de su energía, se obtiene

$$dU_B = -dW_{ext} = -(Id\Phi + I'd\Phi') = -2dU_m \tag{18-38}$$

que es de signo contrario a la de los circuitos y con el doble de magnitud. Al sustituir esto en (18-37) se obtiene $dU_t = -dU_m$ para este caso, de manera que (18-36) queda como

$$\mathbf{F}_m = (\nabla U_m)_I \qquad \text{(corrientes constantes)} \tag{18-39}$$

donde el subíndice I en el gradiente indica que todas las corrientes se mantiene constantes mientras se calculan las derivadas.

Dado que la fuerza descrita en (18-39) se encuentra en la misma dirección del gradiente de U_m, su tendencia deberá ser a *aumentar* la energía magnética del sistema. Así, el estado de equilibrio para el caso de corrientes constantes ($\mathbf{F}_m = 0$) corresponderá a un valor máximo de la energía magnética. En ese sentido, se puede considerar que la energía magnética tiene más parecido con la energía cinética que con la potencial. De (18-7) se puede inferir que los circuitos de corrientes constantes tenderán a ajustarse a sí mismos por medio de traslación, a fin de abarcar la mayor cantidad de flujo posible. En el siguiente capítulo se llega a una conclusión muy similar en lo que toca a posibles rotaciones.

En términos de la notación que se está utilizando aquí, la expresión (18-8) para la energía puede escribirse $U_m = \frac{1}{2} LI^2 + MII' + \frac{1}{2} L'I'^2$, siendo M la inductancia mutua. Como solamente se están tomando en cuenta desplazamientos que son traslaciones rígidas, la forma de los circuitos no cambia, de tal forma que las autoinductancias respectivas permanecen constantes, de acuerdo con (17-56); por lo tanto, M es la única cantidad afectada por el desplazamiento y (18-39) da

$$\mathbf{F}_m = II'\nabla M \tag{18-40}$$

Por ejemplo, la componente x de la fuerza sería

$$F_{mx} = II'\frac{\partial M}{\partial x} \tag{18-41}$$

Antes de estudiar esto en mayor detalle, se considerará aquí la otra posibilidad.

2. Flujo constante. Como ya se mencionó antes, a menos que se haga algo para evitarlo los flujos cambiarán cuando se muevan los circuitos. Sin embargo, si se ajustan las corrientes en forma adecuada durante el proceso, éste puede llevarse a cabo manteniendo a ϕ y a ϕ' constantes. Así, de (18-7) se obtiene la correspondiente magnitud del cambio en la energía:

$$dU_m = \tfrac{1}{2}(\Phi\, dI + \Phi' dI') \tag{18-42}$$

Se puede también observar en (18-1) que esto no requerirá de un cambio de energía en las baterías, de manera que $dU_B = 0$; sin embargo, la energía de las baterías sí disminuirá debido a la constante conversión irreversible de energía en calor, descrita en (12-35), pero eso no interesa por ahora. Así, en este casi (18-37) queda $dU_t = dU_m$, de modo que (18-36) toma la forma

$$\mathbf{F}_m = -(\nabla U_m)_\Phi \qquad \text{(flujos constantes)} \tag{18-43}$$

[Recuérdense las resultados similares (7-45) y (7-37) que se obtuvieron antes].

Se debe ahora poder llegar a la misma expresión (18-41) a partir de (18-43), ya que la situación física en general es la misma, cambiando tan sólo los esquemas de cálculo. Desafortunadamente (18-8) está expresada en función de las corrientes, siendo que para poder utilizar (18-43) en forma efectiva se necesita una expresión de U_m en función de los flujos. Si se aplican (17-58) y (17-60) a este caso se obtiene $\phi = LI + MI'$ y $\phi' = MI + L'I'$. Al despejar las corrientes de éstas se encuentra que

$$I = \frac{L'\Phi - M\Phi'}{LL' - M^2} \qquad I' = \frac{-M\Phi + L\Phi'}{LL' - M^2} \tag{18-44}$$

Sustituyendo estos valores en $U_m = \frac{1}{2}(I\phi + I'\phi')$ según (18-7), queda

$$U_m = \frac{1}{LL' - M^2}\left(\frac{1}{2}L'\Phi^2 - M\Phi\Phi' + \frac{1}{2}L\Phi'^2\right) \tag{18-45}$$

Si ahora, de acuerdo con (18-43), se deriva esta expresión recordando que todo excepto M es constante, se encontrará que

$$\left(\frac{\partial U_m}{\partial x}\right)_\Phi = \frac{1}{(LL' - M^2)^2}\left[ML'\Phi^2 - (LL' + M^2)\Phi\Phi' + ML\Phi'^2\right]\frac{\partial M}{\partial x}$$

$$= -II'\frac{\partial M}{\partial x}$$

donde se ha usado (18-44). Por lo tanto, la componente x de (18-43) es

$$F_{mx} = -\left(\frac{\partial U_m}{\partial x}\right)_\Phi = II'\frac{\partial M}{\partial x}$$

que es exactamente lo mismo que se encontró en (18-41) como una aplicación de (18-39); dado que existen expresiones similares para las componentes y y z, se llegará de nuevo a (18-40) como el resultado general de la fuerza sobre el circuito C.

Ejemplo

Ley de Ampere. Aunque la apariencia de (18-40) es diferente, debe expresar lo mismo que la ley de Ampere. Es fácil observar que tal es el caso. Si se sustituye la forma apropiada de (17-48) para este caso en (18-40), se obtiene

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0 II'}{4\pi}\nabla\oint_C\oint_{C'}\frac{d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}'}{R} \tag{18-46}$$

La traslación rígida de C que se está suponiendo aquí, no afectará los elementos de línea ds y ds' ni los límites de la doble integral; de hecho en lo que respecta al operador Δ, la única variable viene a ser R. Por ello, es posible intercambiar la derivación y la integración y utilizar (1-43) para obtener

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0 II'}{4\pi}\oint_C\oint_{C'}(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}')\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mu_0 II'}{4\pi}\oint_C\oint_{C'}\frac{(d\mathbf{s}\cdot d\mathbf{s}')\hat{\mathbf{R}}}{R^2}$$

que viene a ser exactamente la versión de la ley de Ampere expresada en (13-6) la cual, como ya se sabe, es equivalente a (13-1) para el cálculo de la fuerza total sobre C.

Ejemplo

Dos solenoides largos entremetidos. Supóngase que se tienen dos solenoides ideales largos uno de los cuales se introduce dentro del otro una distancia x, como se ilustra en la figura 18-2. Supóngase que el enrollado de ambos es lo suficientemente delgado para que se puedan tomar sus secciones como iguales y de valor S. En este caso los solenoides no son infinitamente largos, por lo que no es válido suponer que los valores de $\mathbf{B}$ producidos por ellos en la región de traslape sean los mismos que se calcularon para el interior de un sole-

noide en un punto lejano a los extremos. De hecho, como se verá más adelante, las líneas de **B** tienden a sufrir una divergencia brusca en los extremos, alejándose del eje como se muestra en la figura 18-3, por lo que no todas pasarán por las vueltas alejadas del otro solenoide. Sin embargo, se pueden despreciar estos "efectos de borde" si x es lo suficientemente grande, y encontrar la inductancia mutua considerando únicamente el flujo contenido en la región de traslape; es por ello posible utilizar un resultado previo que se basa en la figura 17-15. Supóngase que el solenoide interior tiene n vueltas por unidad de longitud y conduce una corriente I; los valores para el solenoide exterior son n' e I'. La inductancia mutua puede obtenerse a partir de (17-54) resultando $M = \mu_0 nn'Sx$. Si se usa esto en (18-41) se encuentra que la fuerza es

$$F_{mx} = \mu_0 nn'SII' = \frac{SBB'}{\mu_0} \tag{18-47}$$

La última forma se obtuvo por medio de (15-24) y expresa la fuerza en función de las inducciones producidas por cada solenoide. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? Si tanto I como I' circulan en sus respectivos solenoides en el mismo sentido, el flujo producido por uno de ellos en el otro será positivo y, según (17-45), M también será positiva. Entonces $\partial M/\partial x$ será positiva y F_{mx} será positiva, por lo que el solenoide interior será atraido por el exterior. Esto es consistente con lo expresado a continuación de (13-14) en el sentido de que corrientes paralelas se atraen entre sí. Si I e I' circulan en sentidos opuestos, el flujo producido por uno de ellos en el otro será negativo, según la convención de signos utilizada, haciendo que M sea negativa, por lo que $\partial M/\partial x$ y F_{mx} serán también

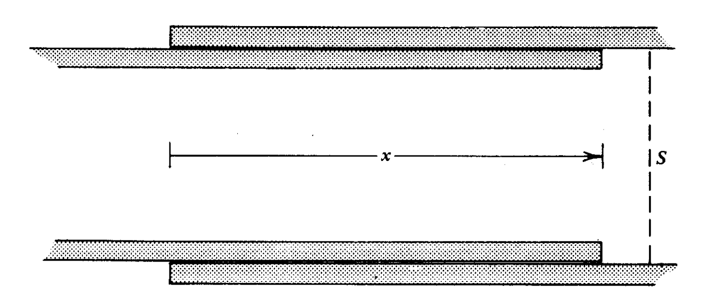


Figura 18-2 Dos solenoides largos entremetidos.

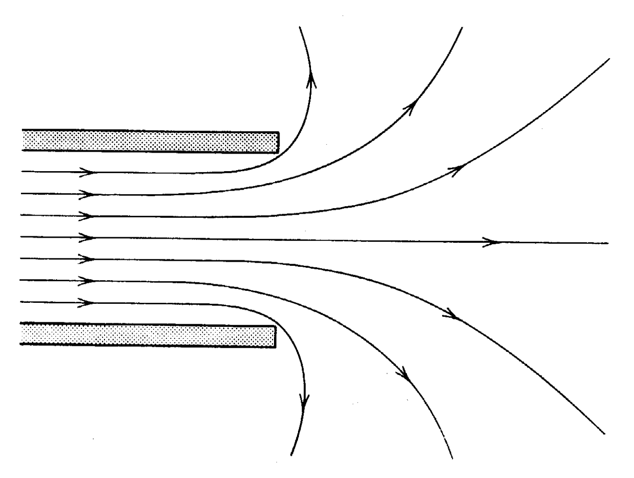


Figura 18-3 Apariencia general de las líneas de B cerca del extremo de un solenoide.

negativas. Por lo tanto, el solenoide interior será repelido por el exterior, de nuevo en consistencia con la aseveración cualitativa de que corrientes "opuestas" se repelen entre sí. Pero todo esto se halla contenido en (18-47) si se les asignan a las corrientes signos relativos de acuerdo con su sentido de circulación. Así, si van en el mismo sentido, II' será positivo, por lo que F_{mx} también, mientras que si circulan en sentidos opuestos $II' < 0$, por lo que $F_{mx} < 0$, de acuerdo con todo lo anterior. Se puede expresar este mismo resultado de una manera muy agradable en función de las inducciones, escribiendo (18-47) como

$$F_{mx} = \frac{S}{\mu_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}' \tag{18-48}$$

que automáticamente da el signo correcto de F_{mx}.

Ya antes, al considerar la fuerza sobre una de las placas de un capacitor de placas paralelas cargado, se encontró en (7-50) que existía una fuerza por unidad de área sobre el conductor, que era hacia afuera de la superficie (una tensión) y numéricamente igual a la densidad de energía en la superficie. Se puede obtener un resultado similar aquí si se analiza el ejemplo específico de lo que constituye quizá la analogía más cercana a las placas de carga opuesta de un capacitor de placas paralelas.

Ejemplo

Dos planos con corrientes dirigidas en sentidos contrarios. La figura 18-4 muestra una vista de perfil de dos planos paralelos largos que conducen corrientes de densidad constante K pero en sentidos opuestos, uno dirigido hacia afuera de la página y otro hacia adentro de la misma. El ancho de los planos es w y la distancia entre ellos es x, medida en el sentido que se indica. Si los planos son muy largos y si $w \gg x$, se pueden despreciar los efectos de borde y tomar los planos como si fueran infinitos. En este caso, se sabe por (14-26) que la $\mathbf{B}$ producida por cada uno de los planos tendrá por magnitud $\frac{1}{2}\mu_0 K$, será perpendicular a la dirección de K, y por lo tanto, estará en el plano de la página, teniendo direcciones opuestas en cada lado del plano. La figura muestra estas inducciones con flechas puntea-

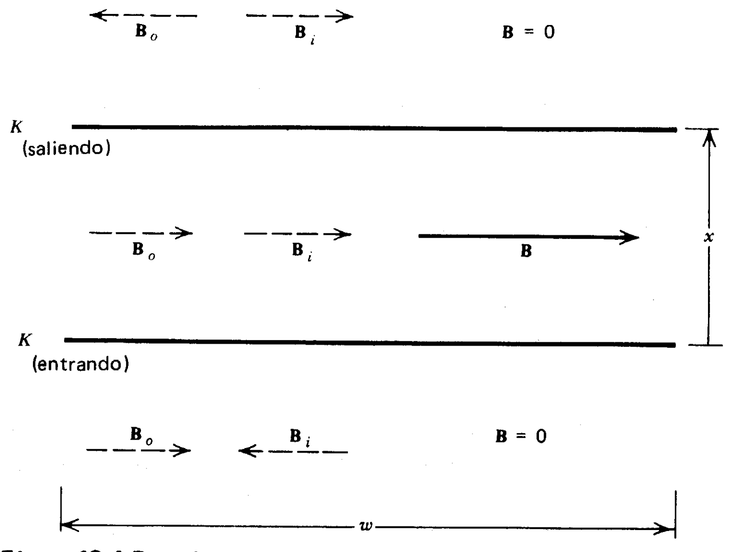


Figura 18-4 Dos planos con corrientes en direcciones opuestas.

das, y están marcadas según su corriente fuente ("hacia afuera" o "hacia adentro"). La inducción resultante $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i$ se muestra como una flecha sólida, y se puede observar que $\mathbf{B} \neq 0$ únicamente en la región entre las placas, donde su magnitud es constante e igual a $\mu_0 K$. Al sustituir esto en (18-20) se encuenra que la densidad de energía es $u_m = ½ \mu 0$ K^2 = const. entre las placas, mientras que es igual a cero en todo sitio distinto. Por lo tanto, la energía magnética de una longitud l de este sistema y del volumen correspondiente wlx es, de acuerdo con (18-23),

$$U_m = \int \tfrac{1}{2}\mu_0 K^2 \, d\tau = \tfrac{1}{2}\mu_0 K^2 wlx \tag{18-49}$$

De (18-39) se obtiene la fuerza magnética sobre el plano superior, que corresponde a un aumento de x, y es

$$\mathbf{F}_m = \frac{\partial U_m}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\mu_0 K^2 (wl)\hat{\mathbf{x}} \tag{18-50}$$

Nótese que esta fuerza se encuentra en la dirección postiva de $\hat{\mathbf{x}}$, por lo que es de repulsión, como era de esperarse ya que se trata de corrientes contrarias. Nótese también que $\mathbf{F}_m$ es proporcional a wl, es decir, el área del plano, por lo cual si se introduce una fuerza por unidad de área, f_m, ésta será

$$f_m = \frac{|\mathbf{F}_m|}{wl} = \frac{1}{2}\mu_0 K^2 = u_m \tag{18-51}$$

pudiéndose observar que su magnitud es exactamente igual a la de la densidad de energía magnética. En este caso $\hat{\mathbf{x}}$ es la normal a la superficie, dirigida *desde* la región de $\mathbf{B} \neq 0$ *hacia* la región de $\mathbf{B} = 0$, lo que permite escribir la fuerza por unidad de superficie en forma vectorial como

$$\mathbf{f}_m = f_m \hat{\mathbf{x}} = u_m \hat{\mathbf{x}} \tag{18-52}$$

La dirección de la fuerza es tal que tiende a mover el plano hacia la región de $\mathbf{B} = 0$, por lo que se le puede describir adecuadamente como una *presión*. De nuevo aquí, este efecto suele asociarse más a menudo con la energía cinética que con la potencial.

Al combinar todas las posibles relaciones, se puede expresar f_m de diversas maneras, por ejemplo

$$f_m = u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 K^2 = \frac{1}{2}KB \tag{18-53}$$

donde K y B se evalúan en la posición donde se desea conocer f_m. Todos estos resultados son muy similares a los obtenidos para el caso electrostático y expresados por (7-49), (7-50) y (7-52).

En todo lo anterior se ha supuesto que los circuitos son completamente rígidos. Si las fuerzas internas de sus mateiiales no son lo suficientemente fuertes para balancear estas fuerzas magnéticas, los conductores que encierran los circuitos se deformarán. Esta deformación, por lo general, continuará hasta que las nuevas fuerzas elásticas que se produzcan sean lo suficientemente grandes como para producir una nueva configuración de equilibrio en el sistema.

Ejercicios

18-1 La fuerza magnética sobre un elemento de corriente $id\mathbf{s}$ es $d\mathbf{F} = id\mathbf{s} \times \mathbf{B}$, según (14-5). Supóngase que a cada elemento $d\mathbf{s}$ se le da el mismo desplazamiento $d\mathbf{r}$ mientras se mantiene a i constante. Encontrar el trabajo realizado por el agente externo y así demostrar directamente que es igual a $id\,\phi$, siendo $d\phi$ el cambio del flujo.

18-2 Considérese una sola autoinductancia, L, en una etapa intermedia en la que su corriente es i, siendo $0 < i < I$. Encontrar el trabajo que se requiere para aumentar la corriente una cantidad di. Sumar entonces todos estos incrementos de trabajo desde el estado inicial de cero corriente hasta el estado final de corriente I, y así obtener otra vez (18-9).

18-3 En lugar del método que se usó para sumar (18-4), evaluar U_m de la siguiente manera. Empezando con todas la corrientes iguales a cero, aumentar i_1 desde 0 a I_1 mientras todas las demás permanecen en cero. Después, estando I_1 en su valor final, aumentar i_2 desde 0 a I_2 y así sucesivamente, tomando una de las corrientes cada vez. De esta manera demostrar que se vuelve a obtener (18-6).

18-4 Utilizar el hecho de que la energía de dos circuitos, dada en (18-8), debe ser positiva, para demostrar que $|M_{12}| \leqslant \sqrt{L_1 L_2}$ como ya se vio desde otro punto de vista en el ejercicio 17-16.

18-5 Una autoinductancia L, una resistencia R y una batería de fem $\mathcal{E}_b$ están conectadas en serie. Utilizar consideraciones de energía para demostrar que la corriente i satisface la ecuación diferencial $L(di/dt) + Ri = \mathcal{E}_b$. Suponer después que $i \neq 0$ y que se retira la batería del circuito. Resolver la ecuación resultante y encontrar el tiempo de relajación de este sistema.

18-6 Considérese una situación al vacío en la que **E** y **B** tienen el mismo valor numérico en sus unidades apropiadas. En otras palabras, $E = x$ volt/metro y $B = x$ tesla. Encontrar la relación u_m/u_m de sus densidades de energía respectivas y evaluar su valor numérico.

18-7 Un conductor cilíndrico largo, no magnético, de radio b tiene un conducto coaxial de radio a perforado en su centro, es decir, que es como el de la figura 18-1 con el conductor en la región 2 y todo lo demás al vacío. Conduce una corriente I distribuida uniformemente en su sección. Encontrar la energía magnética asociada con la inducción en un trozo de longitud l del conductor.

18-8 Una bobina toroidal enrollada apretadamente con N vueltas tiene un radio central b y el radio de su sección circular igual a a. Encontrar su energía magnética cuando conduce una corriente I por sus vueltas, y demostrar que esto lleva a la misma autoinductancia que se encontró en el ejercicio 17-20. Si $a \leqslant b$, demostrar que L se vuelve aproximadamente la misma que para el caso de un solenoide ideal muy largo de longitud $2\pi b$. ¿Resulta esto razonable?

18-9 ¿Bajo qué condiciones, si las hay, será la contribución a la inductancia del cable coaxial de la figura 18-1 que proviene de la región 1 mayor que la de la región 2?

18-10 Un método muy común para fabricar cables coaxiales es utilizar un conductor exterior muy delgado, es decir, que los radios c y b de la figura 18-1 son casi iguales. Demostrar que en estas cincunstancias la contribución del conductor exterior a la autoinductancia es de aproximadamente $(\mu_0 l/8\pi b)(c - b)$, y así demostrar que (18-34) es consistente con el resultado encontrado en el ejercicio 17-24.

18-11 Generalizar (18-39 y (18-40) para el caso de más de dos circuitos en un sistema.

18-12 Utilizar (18-41) para encontrar la fuerza sobre C de la figura 13-5, y verificar que el resultado es el mismo que se obtuvo en el ejercicio 13-4.

18-13 La espira circular del ejercicio 17-4 tiene ahora una corriente I' en el sentido necesario para hacer que M sea positiva. Encontrar la fuerza sobre la espira.

18-14 Encontrar la fuerza sobre el círculo de radio b que se muestra en la figura 17-14. Dejar la respuesta en forma de integral pero verificar que se reduce al resultado del ejercicio 13-8 bajo las condiciones apropiadas.

18-15 Utilizar el resultado del ejercicio 17-25 para encontrar la fuerza sobre el círculo de radio b de la figura 17-14 cuando los dos círculos se encuentran muy lejos el uno del otro.

18-16 Un resorte largo y flexible de longitud l cuelga verticalmente con su extremo superior firmemente sujeto. Tiene n vueltas por unidad de longitud y el radio de su sección circular es a. Se cuelga una masa m del extremo inferior del resorte. Se hace pasar una corriente I por el resorte para ayudarle a resistir el peso sin que se estire o se encoja. Si se desprecia la masa del propio resorte, demostrar que $I = (1/na)(2mg/\pi\mu_0)^{1/2}$. Hacer todo esto de dos maneras, usando (18-39) y (18-43).

18-17 Una bobina delgada y larga de longitud l, sección S y n vueltas por unidad de longitud, conduce una corriente I. Se le coloca a lo largo del eje de un anillo circular de radio a que conduce una corriente I'. Si δ es el desplazamiento del centro de la bobina centro del anillo, medido a lo largo del eje de la bobina, encontrar la fuerza sobre la bobina en función de δ.

18-18 Una espira circular de alambre cuya autoinductancia es L y cuyo radio es r conduce una corriente I. Demostrar que la fuerza que tiende a aumentar su radio es $\frac{1}{2} I^2 (\partial L/\partial r)$. Si T es la tensión de ruptura de alambre. demostrar que éste se romperá a menos que T sea mayor que $(I^2/4\pi)(\delta L/\delta r)$.

18-19 ¿Qué valor de la inducción en el vacío corresponde a una presión magnética de una atmósfera?

18-20 Un cascarón cilíndrico delgado y largo de radio a conduce una corriente I en la dirección de su eje. Encontrar la fuerza por unidad de superficie sobre él ¿Tiende esta fuerza a hacer que el cascarón explote o que se aplaste? ¿Cuál es la fuerza total sobre un segmento de longitud l del cascarón?

Capítulo

19
Multipolos magnéticos

En el capítulo 8 se estudió cómo el potencial escalar en un punto fuera de una distribución finita de cargas podía ser descrito por los diversos multipolares del sistema. Cada momento multipolar dependía de un aspecto particular del detalle de la distribución de las cargas. En este capítulo se hará algo muy similar para una distribución arbitraria de corrientes.

19-1 Desarrollo multipolar del potencial vectorial

La situación general es aquélla que está ilustrada en la figura 19-1; compárese con la figura 8-1. Se tiene una distribución de corrientes, $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, contenida en algún volumen V'. Se fija un origen O de alguna manera arbitraria, pero haciendo que quede cerca o dentro de V'. Se desea encontrar el potencial vectorial $\mathbf{A}$ en el punto de campo P cuyo vector de posición es $\mathbf{r}$, es decir, en la dirección $\hat{\mathbf{r}}$ y a una distancia r de O. Este potencial está dado por (16-12) como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\tau'}{R} \tag{19-1}$$

donde

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{1/2} \tag{19-2}$$

resulta de la ley de los cosenos aplicada a la figura.

Como se hizo antes, se toma P lo suficientemente lejos de V' de manera que $r > r'$ para cualquier porción de V'. Se puede entonces utilizar el desarrollo dado en (8-12) para expresar (19-1) en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') r'^l P_l(\cos\theta')d\tau' \tag{19-3}$$

que viene a ser el *desarrollo multipolar del potencial vectorial.* Si se escriben los primeros términos con la ayuda de (8-10) y (8-14), se obtiene

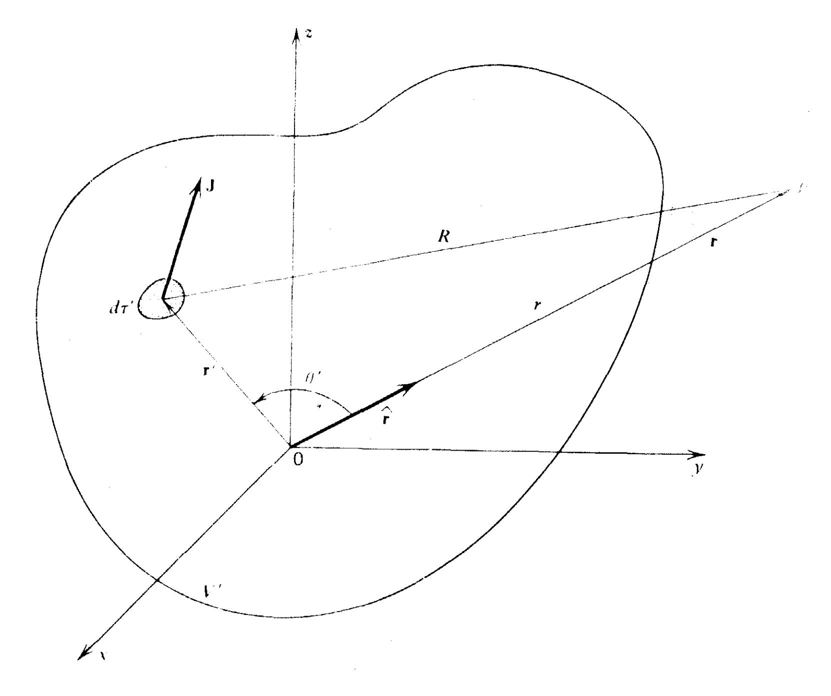


Figura 19-1 Geometría para el cálculo de potencial vectorial en *P*.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}_M(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_D(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}) + \ldots \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')d\tau' \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_{V'} \frac{1}{2}\mathbf{J}(\mathbf{r}')\left[3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')^2 - r'^2\right]d\tau' + \ldots \end{aligned} \qquad (19\text{-}4)$$

donde los términos de la suma son, respectivamente, el término monopolar, el término dipolar y el término cuadripolar. Como en el caso electrostático, su dependencia con la distancia al punto de campo r es, respectivamente, $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$, etc., de manera que a medida que se aleja P de la distribución de corrientes, los términos de orden mayor del desarrollo se vuelven cada vez menos importantes. Estos términos todavía involucran al punto de campo P como a los puntos fuente debido al término $\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}' \sim \cos\theta'$, y se desea expresarlos como el producto de algo que depende exclusivamente de la localización del punto de campo, por algo que depende exclusivamente de la distribución de corriente y sus detalles. Resultará conveniente comentar sobre cada término por separado.

1. El término monopolar

En el caso electrostático, el término monopolar resultó ser proporcional al momento monopolar de la distribución de carga, es decir, a su carga neta. Sin embargo, en el caso magnético no existen cargas magnéticas, como ya se comentó después de ver (16-4), por lo que se podría sospechar que el término monopolar realmente fuera igual a cero. En una distribución de corrientes constantes, éstas siguen trayectorias cerradas, pudiéndose pensar que las cargas se mueven en tubos filamentales de corriente de manera parecida a lo que se

muestra en la figura 12-6*a*. En este caso, en lo que concierne a la espira j de corriente I_j, del equivalente de (12-10) se observa que su contribución a la primera integral de (19-4) es la suma de todos sus elementos de corriente $I_j d\mathbf{s}_j$, es decir, $\oint I_j d\mathbf{s}_j$. Al sumar sobre todas estas corrientes, se obtiene

$$\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')d\tau' = \sum_j I_j \oint_{C_j} d\mathbf{s}_j = 0 \tag{19-5}$$

ya que la integral con respecto a $d\mathbf{s}_j$ es simplemente la suma de los desplazamientos sucesivos de un punto y, por lo tanto, su desplazamiento neto; cuando a un punto se le lleva alrededor de una trayectoria cerrada, su desplazamiento neto es igual a cero, de manera que $\oint d\mathbf{s}_j = 0$; esto quedó demostrado de una manera más formal en el ejercicio 1-25. Por lo tanto, la integral de (19-5) será siempre igual a cero, de manera que

$$\mathbf{A}_M(\mathbf{r}) = 0 \tag{19-6}$$

ratificando así la suposición hecha y demostrando que el primer término en el desarrollo del potencial vectorial será *siempre* el término dipolar. [Esto también justifica el uso de (18-20) en lugar de (18-18).]

II. El término dipolar

Por conveniencia, asígnese el símbolo $\mathfrak{M}$ a la integral del término dipolar:

$$\mathfrak{M} = \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')d\tau' \tag{19-7}$$

El proceso para expresar esto como un producto en el que de alguna manera se separa el punto de campo es bastante laborioso, siendo mucho más facil trabajar con una cantidad escalar. Si se hace que $\mathbf{C}$ sea un vector *constante arbitrario,* es posible formar el producto escalar $\mathbf{C}\cdot\mathfrak{M}$. Despues de esto, se divide el integrando en dos partes iguales, se suma y se resta la cantidad $\frac{1}{2}$ $(\mathbf{J}\cdot\mathbf{r})$ $(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')$ bajo la integral y se encuentra que se puede expresar el resultado como la suma de dos integrales:

$$\mathbf{C}\cdot\mathfrak{M} = \int_{V'} (\mathbf{C}\cdot\mathbf{J})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')d\tau' = (\mathbf{C}\cdot\mathfrak{M})_+ + (\mathbf{C}\cdot\mathfrak{M})_- \tag{19-8}$$

donde

$$(\mathbf{C}\cdot\mathfrak{M})_+ = \tfrac{1}{2}\int_{V'} [(\mathbf{C}\cdot\mathbf{J})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}') + (\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{r}})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')]d\tau' \tag{19-9}$$

$$(\mathbf{C}\cdot\mathfrak{M})_- = \tfrac{1}{2}\int_{V'} [(\mathbf{C}\cdot\mathbf{J})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}') - (\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{r}})(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')]d\tau' \tag{19-10}$$

que se consideran por separado.

C es constante por definición y $\hat{\mathbf{r}}$ es constante con respecto a las derivadas relativas a los puntos fuente, es decir, con respecto a Δ'. Por lo tanto, $\Delta'(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}') = \Delta'(C_x x' + C_y y' + X_y\hat{\mathbf{y}} + C_z\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{C}$, o sea,

$$\nabla'(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')=\mathbf{C} \qquad \text{y} \qquad \nabla'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')=\hat{\mathbf{r}} \tag{19-11}$$

donde la segunda se obtuvo de la misma manera. Si se utilizan estos últimos resultados junto con (1-114), se encuentra que la parte entre corchetes del integrando de (19-9) puede expresarse como

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\cdot[\mathbf{C}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')+\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')]&=\mathbf{J}\cdot[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\nabla'(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')+(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')\nabla'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')]\\&=\mathbf{J}\cdot\nabla'[(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')]\end{aligned} \tag{19-12}$$

Pero ahora el último término tiene la forma $\mathbf{J}\cdot\Delta'\mathfrak{S}$, donde $\mathfrak{S}$ es el escalar $(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}_,)(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_,)$; así, por medio de (1-117) y (12-15) para corrientes estables, se puede expresar (19-12) como

$$\mathbf{J}\cdot\nabla'\mathfrak{S}=\nabla'\cdot(\mathfrak{S}\mathbf{J})+\mathfrak{S}(\nabla'\cdot\mathbf{J})=\nabla'\cdot[(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}] \tag{19-13}$$

que es la forma final para el integrando de (19-9). Si ahora se sustituye (19-13) en (19-9), y se utiliza (1-59), se obtiene por fin

$$(\mathbf{C}\cdot\mathfrak{D})_+=\tfrac{1}{2}\oint_{S'}(\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}')(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')(\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}') \tag{19-14}$$

donde S' es la superficie limitante de V'. Sin embargo, V' encierra *todas* las corrientes de manera que $\mathbf{J}=0$ en todos los elementos de superficies $d\mathbf{a}'$ de S' y, por lo tanto,

$$(\mathbf{C}\cdot\mathfrak{D})_+=0 \tag{19-15}$$

Los términos entre corchetes (19-10) puede escribirse como

$$\mathbf{C}\cdot[\mathbf{J}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')-\mathbf{r}'(\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{r}})]=\mathbf{C}\cdot[\hat{\mathbf{r}}\times(\mathbf{J}\times\mathbf{r}')] \tag{19-16}$$

por medio de (1-30) y (1-16). Si se sustituye esto en (19-10) y se utiliza (19-15), se encuentra que (19-8) queda

$$\mathbf{C}\cdot\mathfrak{D}=\tfrac{1}{2}\int_{V'}\mathbf{C}\cdot[\hat{\mathbf{r}}\times(\mathbf{J}\times\mathbf{r}')]\,d\tau'=\mathbf{C}\cdot\left\{\tfrac{1}{2}\int_{V'}[\hat{\mathbf{r}}\times(\mathbf{J}\times\mathbf{r}')]\,d\tau'\right\} \tag{19-17}$$

Dado que $\mathbf{C}$ es un vector completamente arbitrario, es válida siempre que $\mathfrak{D}$ sea igual a la cantidad entre llaves. Es más, $\hat{\mathbf{r}}$ es constante por lo que toca a la integración con respecto a las variables primas, por lo que puede quitarse de la integral. Al hacerlo, y aplicando (1-23) dos veces seguidas, se encuentra que

$$\mathfrak{D}=\hat{\mathbf{r}}\times\tfrac{1}{2}\int_{V'}\mathbf{J}\times\mathbf{r}'\,d\tau'=\left(\tfrac{1}{2}\int_{V'}\mathbf{r}'\times\mathbf{J}\,d\tau'\right)\times\hat{\mathbf{r}} \tag{19-18}$$

Por último, si se combinan (19-18), (19-7) y (19-4), se encuentra que el término dipolar puede expresarse como

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left[\tfrac{1}{2}\int_{V'}\mathbf{r}'\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,d\tau'\right]\times\hat{\mathbf{r}} \tag{19-19}$$

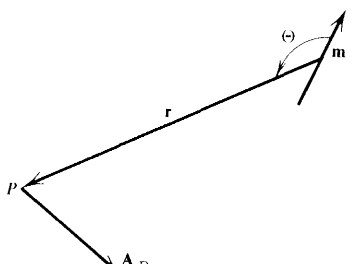


Figura 19-2 Relación entre un dipolo magnético y el potencial vectorial que produce.

que posee la forma deseada de un producto de una cantidad relacionada solamente con la posición del punto de campo por algo que sólo depende de las propiedades de la distribución de corrientes.

A la cantidad entre corchetes se le suele asignar el símbolo

$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')\, d\tau' \tag{19-20}$$

y recibe el nombre de *momento dipolar magnético* de la distribución de corrientes. [En algunos textos $\mathbf{m}$ se define como μ_0 veces el miembro derecho de (19-20); hoy en día esto es comparativamente raro, pero es algo digno de considerarse.] Esta definición permite expresar el término dipolar como

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} \tag{19-21}$$

Como se puede apreciar en la figura 19-2, A_D es perpendicular al plano formado por $\mathbf{m}$ y $\mathbf{r}$ y su magnitud será $A_D = \mu_0 m \operatorname{sen} \Theta/4\pi r^2$, de acuerdo con (1-22). La aparición de sen Θ puede ser un poco sorprendente ya que, por analogía con el caso electrostático en (8-48), se habría esperado encontrar un cos Θ en un potencial que se denomina potencial "dipolar". Sin embargo, cuando se calcule la inducción en la siguiente sección se encontrará que la analogía es bastante exacta en cuanto a comparar *campos*.

Por fortuna, es suficiente aquí considerar únicamente el término dipolar, de modo que no se estudiará el término cuadripolar de (19-4).

III. Efectos de la elección del origen

El momento magnético $\mathbf{m}$ que se define del valor absoluto de $\mathbf{r}'$, por lo que el elegir un sistema coordenado diferente es seguro que $\mathbf{r}'$ cambiará, existiendo la posibilidad de que $\mathbf{m}$ cambie también. Si se recuerda el caso electrostático, en (8-43) se encontró que el momento dipolar eléctrico era independiente de la elección del origen y por esta razón era una propiedad singular de la distribución de carga siempre que el momento monopolar eléctrico desapareciera. En (19-6) se vio que en el caso magnético el término monopolar es siempre a cero, por lo que cabe sospechar que aquí también $\mathbf{m}$ debe ser independiente de la elección del origen. Supóngase que en la figura 19-1 el origen no está en O sino en O_n, lo que se obtiene al trasladar los ejes sin rotación mediante el desplazamiento $\mathbf{a}$ que se ilustra en la figura 19-3. Se puede entonces observar en la figura que los vectores de posición nuevo y viejo de $\mathbf{J}$ están relacionados entre sí por $\mathbf{a} + \mathbf{r}'_n = \mathbf{r}'$ o $\mathbf{r}'_n = \mathbf{r}' - \mathbf{a}$. Si se sustituye esto en (19-20) para encontrar el valor del momento dipolar magnético referente a los nuevos ejes, se obtiene

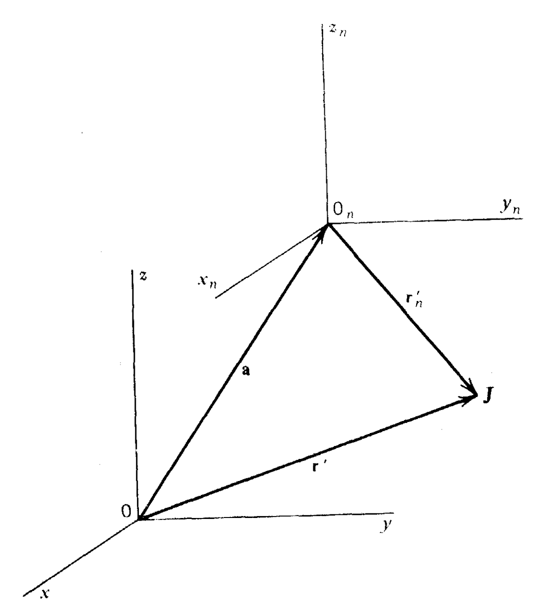


Figura 19-3 El nuevo origen tiene un desplazamiento **a** respecto del anterior.

$$\mathbf{m}_n = \tfrac{1}{2}\int_{V'} (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times \mathbf{J}\,d\tau' = \tfrac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}\,d\tau' - \tfrac{1}{2}\mathbf{a} \times \int_{V'} \mathbf{J}\,d\tau' = \mathbf{m}$$

ya que, por (19-5), la integral que multiplica a **a** es igual a cero. Asi, $\mathbf{m}_n = \mathbf{m}$, por lo que el momento dipolar magnético es siempre una propiedad singular característica de la distribución de corrientes y es posible utilizar cualquier elección conveniente de coordenadas para calcularlo.

19-2 El campo dipolar magnético

La expresión de $\mathbf{A}_D$ dada en (19-21) es el término predominante del potencial vectorial cuando el punto de campo se encuentra lo suficientemente alejado de la distribución de corrientes. Para estudiar sus propiedades, resulta conveniente suponer, como también lo fue en la sección 8-2, que (19-21) es verdadera para *todo* el espacio. De esta manera se le puede llamar el *campo dipolar magnético* y pensar que está producido por un *dipolo puntual ficticio,* **m**, situado en el origen. Más adelante se considerarán distribuciones de corrientes específicas que puedan adecuarse a este modelo, pero por ahora lo importante es encontrar la inducción **B** producida en este caso. Se utilizan coordenadas esféricas para localizar el punto de campo P y se toma el eje z en la dirección de **m**; esto viene a configurar la situación ilustrada en la figura 19-4. Así, $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ y (19-21) queda como

$$\mathbf{A}_D(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 m \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{19-22}$$

de manera que la única componente de $\mathbf{A}_D$ que no es igual a cero es $A_{D\varphi}$. Las curvas de valores constantes de $A_{D\varphi}$ están dadas por

$$r^2 = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi A_{D\varphi}}\right) \operatorname{sen}\theta = C_D \operatorname{sen}\theta \tag{19-23}$$

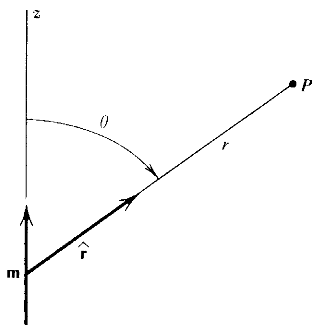


Figura 19-4 Cálculo del campo producido por un dipolo magnético.

donde la constante C_D que caracteriza cada curva depende del valor de $A_{D\varphi}$. Estas curvas se muestran como las líneas sólidas de la figura 19-5; sin embargo, la *dirección* de $\mathbf{A}_D$ es hacia adentro de la página en la mitad derecha de la figura y hacia afuera de la página en su mitad izquierda.

La inducción se puede obtener a partir de $\mathbf{B} = \Delta \times A_D$. Si se usan (19-22) y (1-104), se encuentra que las componentes de $\mathbf{B}$ son

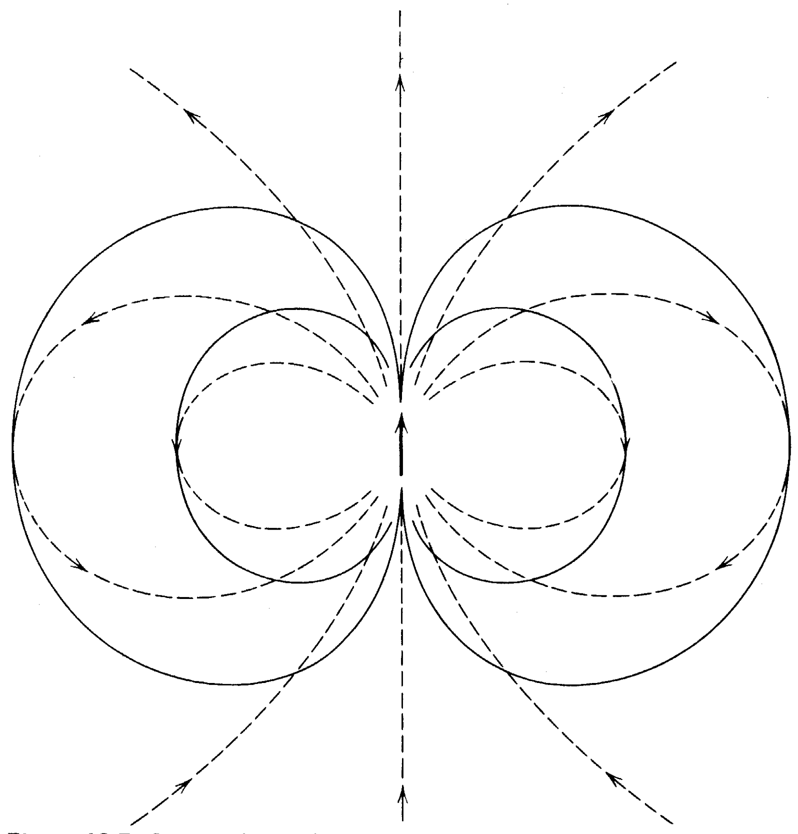


Figura 19.5. Campo de un dipolo magnético. Las líneas de **B** se muestran punteadas. Las líneas sólidas son aquellas de magnitud constante del potencial vectorial, el cual está dirigido hacia adentro de la página en la mitad derecha de la figura y hacia afuera de la página en la mitad izquierda.

$$B_r = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta A_{D\varphi}) = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi} \right) \frac{2 \cos \theta}{r^3}$$
$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{D\varphi}) = \left(\frac{\mu_0 m}{4\pi} \right) \frac{\operatorname{sen} \theta}{r^3} \tag{19-24}$$

mientras que $B_\varphi = 0$. Por lo tanto, **B** descansa sobre el mismo plano que **m** y el punto de campo, mientras que A_D es perpendicular a este plano.

Al comparar (19-24) con los resultados correspondientes (8-50) para el campo dipolar eléctrico, se puede observar que unos y otros son proporcionales a la magnitud de sus respectivos momentos dipolares y que tienen la *misma* dependencia con respecto al ángulo y a la distancia. De hecho, es fácil ver que están relacionados entre sí de una manera muy simple por $\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 (m/p)\mathbf{E}$. En consecuencia, las líneas de **B**, que se muestran con líneas punteadas en la figura 19-5, estarán dadas por una ecuación de exactamente la misma forma de (8-52), y serán justamente como las líneas punteadas de **E** que se muestran en la figura 8-7.

19-3 Corrientes filamentales

Hasta ahora se han estudiado sólo las corrientes distribuidas. Resulta sencillo adaptar los resultados ya obtenidos para aplicarlos a las corrientes filamentales, usando (12-10) para remplazar $\mathbf{J} d\tau'$ por $I d\mathbf{s}'$. Así, de (19-20) se puede observar que el momento dipolar magnético de un solo circuito filamental C' está dado por

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_{C'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{s}' \tag{19-25}$$

y se puede utilizar cualquier elección conveniente de coordenadas para evaluar la integral.

Ejemplo

Corriente filamental plana. Si el circuito descansa sobre un plano, se puede dar a la integral una interpretación muy sencilla y útil. Tomando el origen de este mismo plano, se obtiene la situación que se ilustra en la figura 19-6. Pero $\mathbf{r}' \times d\mathbf{s}'$ es perpendicular al plano de la espira y la magnitud $|\mathbf{r}' \times d\mathbf{s}'|$ es igual al área del paralelogramo con lados $\mathbf{r}'$ y $d\mathbf{s}'$ como se vio en la figura 1-15. Al comparar estas dos figuras se puede observar que el área triangular sombreada de la figura 19-6 formada por líneas desde el origen hacia los extremos de $d\mathbf{s}'$ es justamente la mitad del área del paralelogramo, es decir, que si $d\mathbf{a}'$ es el área de la región sombreada, entonces $\frac{1}{2}\, \mathbf{r}' \times d\mathbf{s}' = d\mathbf{a}'$, por lo que la integral de (19-25) queda

$$\frac{1}{2} \oint_{C'} \mathbf{r}' \times d\mathbf{s}' = \int d\mathbf{a}' = \mathbf{S} = S\hat{\mathbf{n}} \tag{19-26}$$

donde **S** es el vector de área total cerrada por la corriente y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal a esa superficie, dada por la convención usual que se definió en la figura 1-24. Por lo tanto, (19-25) se simplifica para quedar

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = IS\hat{\mathbf{n}} \tag{19-27}$$

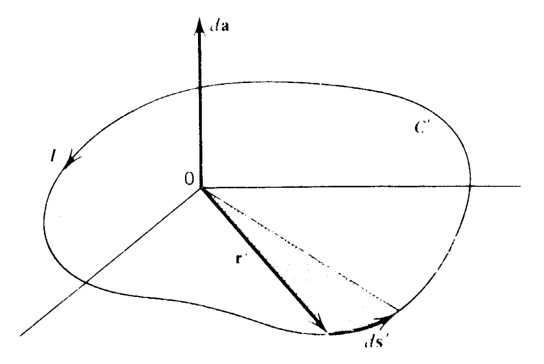


Figura 19-6 Corriente filamental plana.

de modo que la magnitud del momento dipolar de una corriente filamental plana es justamente el producto de la corriente circulante por la superficie que ésta encierra. Nótese que el resultado es independiente de la forma del circuito.

Ejemplo

Anillo circular plano. Si el anillo es un círculo de radio a, entonces $m = I\pi a^2$. A distancias muy grandes, la inducción axial B_z puede calcularse de (19-24) con $\theta = 0$ y $r = z$. El resultado es $B_z = \mu_0 I a^2/2z^3$, exactamente lo que se encontró en (14-20).

Los circuitos planos como éstos a menudo reciben el nombre de *espiras* o *espirales de corriente,* y producen el potencial vectorial dipolar y la inducción dipolar cuando existe una distancia grande entre ellos. [Mientras más cerca estén los detalles de la distribución más importantes se vuelven éstos, por lo que se hace necesario regresar a la expresión exacta (19-1).] Así, como prototipo del dipolo magnético puntual se puede tomar una espira de corriente muy pequeña, cuyo momento magnético es perpendicular a su superficie, como se ilustra en la figura 19-7.

Si el sistema consiste en un determinado número de estas corrientes filamentales, es posible encontrar el momento dipolar $\mathbf{M}_j$ del circuito j por medio de (19-25), y para calcular el momento dipolar de todo el sistema se realiza la suma vectorial de todos estos términos:

$$\mathbf{m} = \sum_j \mathbf{m}_j = \sum_j \tfrac{1}{2} I_j \oint_{C_j} \mathbf{r}_j \times d\mathbf{s}_j \tag{19-28}$$

En particular, si todos ellos son circuitos planos, cada uno de los $\mathbf{m}_j$ tendrá la forma (19-27) y el total será

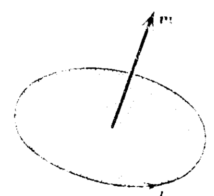


Figura 19-7 El momento dipolar magnético de una espira de corriente perpendicular a su área.

$$\mathbf{m} = \sum_j \mathbf{m}_j = \sum_j I_j \mathbf{S}_j \tag{19-29}$$

Ejemplo

Solenoide ideal. En el ejemplo de la sección 14-3 se vio que un solenoide ideal de N vueltas para el que el ángulo de enrollado no se tenga que tomar en cuenta, puede ser tratado como un conjunto de N espiras circulares de corriente paralelas, cada una de ellas conduciendo una corriente I en el mismo sentido. Así, si S es el área de su sección, el momento dipolar de cada espira será $IS\hat{\mathbf{z}}$, según (19-27) donde $\hat{\mathbf{z}}$ es la dirección del eje. En este caso todos los $\mathbf{m}_j$ de (19-29) son paralelos, por lo que el momento dipolar total del solenoide será N veces el de una de las espiras, es decir,

$$\mathbf{m} = NSI\hat{\mathbf{z}} = nlSI\hat{\mathbf{z}} \tag{19-30}$$

En consecuencia, cuando se encuentra uno *muy lejos* del solenoide, la inducción que éste produce estará dada por (19-24), siendo m = NSI. (Esta es esencialmente la justificación de la figura 18-3.)

19-4 Energía de una distribución de corrientes en una inducción externa

En la sección 8-4 se hizo un estudio muy minucioso de la relaciones energéticas que involucran dos grupos distintos de cargas (las del "sistema" y las "externas") y se llegó a la conclusión de que, para muchos propósitos, solamente una parte de la energía resultaba de interés práctico, siendo ésta específicamente la energía interacción de (8-60). Aquí se considera una situación similar para el caso magnético.

Supóngase que las corrientes involucradas pueden dividirse en dos grupos fácilmente distinguibles. Una de estas distribuciones de corrientes forma una entidad física separada (el "sistema" de interés), que está sujeta a las influencias de la otra distribución de corrientes (las fuentes "externas") que producen una inducción $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ en cada uno de los puntos del sistema. Sin tomar en cuenta nuevamente las energías internas de los grupos, lo que en realidad interesa es aquella parte de la energía que pudiera denominarse la *energía de interacción* magnética, U_{m0}. El problema inmediato consiste en encontrar la expresión apropiada para U_{m0}. En el caso de los dos circuitos se vio que la energía de interacción estaba dada por el término central de (18-8) y que era igual a $M_{12}I_1I_2 = I_1\Phi_{2\to1}$ donde, de acuerdo con (17-45), $\Phi_{2\to1}$ es el flujo que 2 provoca en 1. Por lo tanto, si se adapta esto al caso presente haciendo que I sea la corriente del sistema y Φ_0 el flujo producido por las fuentes externas, se puede expresar la energía de interacción como

$$U_{m0} = I\Phi_0 \tag{19-31}$$

Esto puede expresarse también en función de la inducción externa, $\mathbf{B}_0$, por medio de (16-6):

$$U_{m0} = I\int_S \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{a} \tag{19-32}$$

donde S es el área encerrada por la corriente del sistema.

Ya teniendo (19-31) y (19-32), resulta sencillo generalizarlas. Si se hace que I_j sea la corriente del circuito j del sistema de interés y que Φ_{0j} sea el flujo a través de él producido por las fuentes externas, la energía de interacción de esta parte será $I_j\,\Phi_{0j}$, de manera que la energía de interacción total es

$$U_{m0} = \sum_j I_j \Phi_{0j} = \sum_j I_j \int_{S_j} \mathbf{B}_0(\mathbf{r}_j)\cdot d\mathbf{a}_j \qquad (19\text{-}33)$$

Aunque no se use de inmediato, es útil transformar U_{m0} en una expresión apropiada para corrientes distribuidas. Para lograrlo, se deben introducir elementos de corriente usando (16-23) para escribir los flujos como funciones del potencial vectorial $\mathbf{A}_0$ producido externamente; así se encuentra que

$$U_{m0} = \sum_j \oint_{C_j} \mathbf{A}_0(\mathbf{r}_j)\cdot I_j d\mathbf{s}_j \qquad (19\text{-}34)$$

Puede así pasarse de una descripción basada en corrientes filamentales a otra en función de corrientes distribuidas, de la misma manera como se pasó de (18-10) a (18-11). Así, se obtiene una expresión muy común para la energía de interacción magnética:

$$U_{m0} = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r})\cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{r})d\tau \qquad (19\text{-}35)$$

donde la integral se toma sobre todo el volumen que contiene a las corrientes **J** del sistema de interés.

Al igual que en la sección 8-4, ahora se limitará al muy importante caso en que las fuentes externas se encuentran muy alejadas y el sistema es tan pequeño en extensión espacial que $\mathbf{B}_0$ casi no varía en toda la distribución de corrientes del mismo. Así, como primera aproximación, se puede tomar a $\mathbf{B}_0$ como constante y sacarla de la integral. Por tanto, si cada $\mathbf{r}_j$ de (19-33) es igual al mismo valor **r**, que es "el" vector de posición del sistema, (19-33) queda como

$$U_{m0D} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\cdot\left(\sum_j I_j \int_{S_j} d\mathbf{a}_j\right) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})\cdot\left(\sum_j I_j \mathbf{S}_j\right) = \mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_0 \qquad (19\text{-}36)$$

donde **m** es el momento dipolar magnético de todo el sistema, según (19-29). Así, esta energía de interacción dipolar tiene la forma del producto del momento característico del sistema por la inducción externa.

Aunque no se expondrá aquí debido a su complejidad, resulta evidente que se pueden obtener más aproximaciones de U_{m0} desarrollando las componentes de $\mathbf{B}_0$ en series de potencias, muy a la manera como se hizo en el potencial escalar en (8-61). Por analogía con (8-70), es de esperarse que el siguiente término del desarrollo de la energía de interacción involucre productos de las derivadas espaciales de la inducción externa con componentes aproximadamente definidas del momento cuadripolar magnético.

Si $\mathbf{B}_0$ depende de la posición, resulta entonces posible que un dipolo **m** cambie su energía al moverse a otro lugar; en otras palabras, puede existir una fuerza traslacional, $\mathbf{F}_D$, diferente de cero sobre el dipolo. Dado que se está considerando al sistema como una entidad física definida, se puede suponer que está caracterizada por una distribución constante de corrientes. La expresión apropiada en este caso para encontrar la fuerza es la de corrientes constantes de (18-39), y cuando se sustituye en ella (19-36) se obtiene

$$\mathbf{F}_D = \nabla U_{m0D} = \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_0) \qquad (19\text{-}37)$$

donde las derivadas están tomadas con respecto a las componentes de **r**, el vector de posición del dipolo. El hecho de que **m** sea constante permite expresar esto de una manera útil. Si se utiliza (1-115), se puede expresar (19-37) como

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{m}) + \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0) + (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{m} + (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 \tag{19-38}$$

El primero y tercer términos desaparecen debido a que **m** es constante. Por la suposición original, todas las fuentes externas están situadas en otro lugar, de manera que no existe corrientes fuentes $\mathbf{J}_0$ en la posición **m**. Entonces, según (15-12), $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ con lo que (19-38) se reduce a

$$\mathbf{F}_D = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}_0 \tag{19-39}$$

demostrando, como era de sospecharse, que la fuerza traslacional depende de que la inducción externa sea una función de la posición. Nótese que (19-37) y (19-39) son completamente análogas a los correspondientes resultados (8-77) y (8-79) que se encontraron para el dipolo eléctrico; además, (19-39) es consistente con el resultado del ejercicio 14-16, donde se demostró que no existe fuerza neta sobre un circuito filamental en una inducción externa uniforme.

Sin embargo, existe algo de la analogía entre los casos eléctrico y magnético que parece romperse y ese algo es la diferencia de signos de las energías de interacción dadas en (19-36) y (8-73) como $\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_0$ y $-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_0$ respectivamente. En efecto es muy común encontrar una cantidad denominada *la* energía de un dipolo magnético en un campo externo y que está dada por

$$U'_D = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_0 = -mB_0 \cos\Theta \tag{19-40}$$

donde Θ es el ángulo formado por **m** y $\mathbf{B}_0$. ¿A qué se debe esto? En esencia, la utilización de (19-40) representa el resultado de un cambio completo de punto de vista. Lo que se está tratando de hacer *en este caso* es escribir una expresión para la fuerza en completa *analogía* con aquélla usada en mecánica, es decir, como el gradiente negativo de una *energía potencial.* En otras palabras, el objetivo es escribir (19-37) en la forma

$$\mathbf{F}_D = -\nabla U'_D \tag{19-41}$$

y después *interpretar* U'_D como una energía potencial común y corriente. Se puede ver fácilmente que la elección hecha en (19-40) es correcta porque (19-41) se vuelve $\mathbf{F}_D = -\Delta(-\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_0) = \Delta(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}_0)$, que da la expresión correcta para la fuerza. Por lo tanto, es apropiado interpretar U'_D como la energía del dipolo de este sentido; a U'_D se le suele llamar a menudo la *energía de orientación* para enfatizar su función de energía potencial. De manera similar, se pueden cambiar los signos desde (19-31) a (19-35) para reinterpretarlos de esta manera. Así, por ejemplo, la tendencia de un circuito a reajustarse para encerrar el mayor flujo posible, que se encontró después de (18-39), puede verse por el negativo (19-31), $-I\Phi_0$, lo que corresponde a la tendencia general de los sistemas para tratar de lograr el equilibrio minimizando su energía potencial. La figura 19-8 muestra U'_D dada por (19-40) en función de Θ. El rango de variación de la energía es finito, con su mínimo en $\Theta = 0$, que corresponde al estado de equilibrio estable en el que **m** y $\mathbf{B}_0$ son paralelos, y su máximo en $\Theta = \pi$, que describe el equilibrio inestable y para el cual **m** y $\mathbf{B}_0$ están dirigidos en sentidos opuestos.

Una energía potencial como U'_D, que depende del ángulo, implica la existencia de un momento de torsión τ sobre el sistema. Debido a la similitud de (19-40) y (8-73), se pueden simplemente cambiar los símbolos de (8-75) para obtener una expresión muy importante para el momento de torsión sobre un dipolo magnético en una induccción externa.

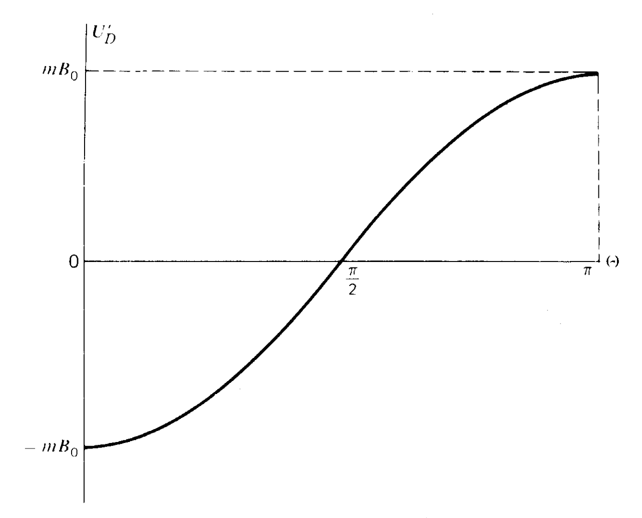


Figura 19-8 Energía de orientación de un dipolo en una inducción externa como función del ángulo formado por sus direcciones.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0 \tag{19-42}$$

Este momento de torsión está presente aún en una inducción uniforme $\mathbf{B}_0$, en contraste con $\mathbf{F}_D$; esto es también consistente en el resultado del ejerccio 14-16. Nótese que, como antes, para tener equilibrio a un ángulo Θ intermedio el momento de torsión magnético debe estar balanceado por un momento de torsión mecánico igual y opuesto, τ_{mec}, de manera que

$$\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{mec} = 0 \tag{19-43}$$

Ya todos los resultados de esta sección han sido obtenidos de una manera completamente general y por ello son aplicables al momento dipolar de cualquier tipo de distribución de corrientes que sea de interés. Sin embargo, resulta de gran valor observar cómo dichos resultados se pueden obtener directamente considerando las fuerzas sobre el prototipo del dipolo magnético puntual, es decir, una pequeña espira de corriente.

Ejemplo

Pequeña espira de corriente en una inducción externa. Se considera una corriente filamental I en un círculo de radio a que descansa sobre el plano xy, con su centro en el origen, como se muestra en la figura 19-9. Su momento dipolar se obtiene en (19-27) y es

$$\mathbf{m} = I\pi a^2 \hat{\mathbf{z}} \tag{19-44}$$

La fuerza sobre la espira en la inducción externa $\mathbf{B}_0$ está dada por (14-3) como

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{s} \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \tag{19-45}$$

Es conveniente trabajar con coordenadas rectangulares porque en ellas son constantes los vectores unitarios, sin embargo, se expresarán las componentes en función del ángulo azimutal φ para facilitar la integración sobre C. Entonces se tiene $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} = a \cos\varphi\, \hat{\mathbf{x}} + a \operatorname{sen}\varphi\, \hat{\mathbf{y}}$, de manera que $d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = a\, d\varphi\, (-\operatorname{sen}\varphi\, \hat{\mathbf{x}} + \cos\varphi\, \hat{\mathbf{y}})$ y

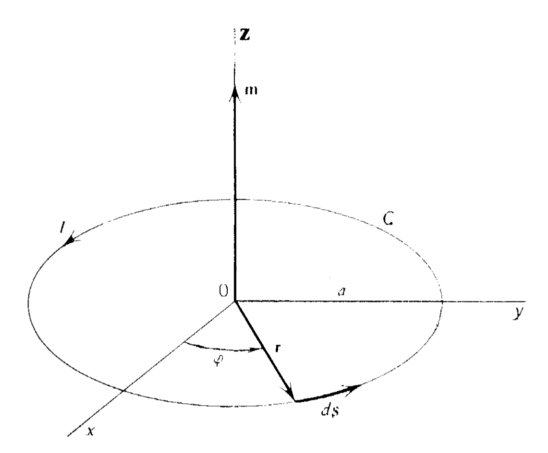


Figura 19-9 Espira de corriente filamental circular.

$$d\mathbf{s}\times\mathbf{B}_0 = a\,d\varphi\left[\,\hat{\mathbf{x}}B_{0z}\cos\varphi + \hat{\mathbf{y}}B_{0z}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \hat{\mathbf{z}}(B_{0x}\cos\varphi + B_{0y}\,\mathrm{sen}\varphi)\,\right] \tag{19-46}$$

si se utiliza (1-28). Dado que la espira es muy pequeña y que $\mathbf{B}_0$ varía lentamente en ella, es apropiado desarrollar las componentes de $\mathbf{B}_0$ en una serie de potencias con respecto al origen, y quedarse sólo con los términos que dan una primera aproximación no nula. Así, es posible escribir

$$B_{0z}(\mathbf{r}) = B_{0z}(0) + x\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}\right) = B_{0z}(0) + a\left[\cos\varphi\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right) + \mathrm{sen}\,\varphi\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}\right)\right] \tag{19-47}$$

donde se recuerda que las derivadas se evalúan en el origen – la localización del dipolo – y por lo tanto son constantes, como lo es B_{0z} (0). No existe término $z(\partial B_{0z}/\partial z)$ en (19-47) porque $z = 0$, ya que la espira descansa sobre el plano xy. Al sustituir (19-47) en (19-46) se encuentra que la componente x es

$$(d\mathbf{s}\times\mathbf{B}_0)_x = a\,d\varphi\left\{B_{0z}(0)\cos\varphi + a\left[\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}\right)\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\right]\right\} \tag{19-48}$$

La integración alrededor de todo el circuito C que se requiere en (19-45) se logra al integrar con respecto a φ desde 0 a 2 π. Si se sustituye (19-48) en (19-45) y se utilizan las integrales apropiadas del conjunto

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi\,d\varphi = 0$$
$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\varphi\,d\varphi = \pi \tag{19-49}$$

se puede encontrar la componente x de la fuerza como

$$F_x = I\oint_C (d\mathbf{s}\times\mathbf{B}_0)_x = I\pi a^2\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right) = m_z\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial x}\right) \tag{19-50}$$

donde también se ha hecho uso de (19-44). Procediendo de exactamente la misma manera, se encuentran las otras dos componentes de la fuerza:

$$F_y = m_z\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial y}\right) \tag{19-51}$$

$$F_z = -m_z\left[\left(\frac{\partial B_{0x}}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial y}\right)\right] \tag{19-52}$$

Todavía no se ve que éstas se parezcan a las componentes de (19-39), pero aún no se ha utilizado toda la información disponible. Dado que las corrientes fuente externas se encuentran a cierta distancia de la espira, $\mathbf{J}_0 = 0$ en ella, y $\Delta \times \mathbf{B}_0 = 0$ según (15-12); de (1-43) se encuentra que $(\partial \mathbf{B}_{0z}/\partial x) = (\partial \mathbf{B}_{0x}/\partial z)$ y que $(\partial \mathbf{B}_{0z}/\partial y) = (\partial \mathbf{B}_{0y}/\partial z)$. Además, $\Delta\ \mathbf{B}_0 = 0$ según (16-3), de manera que, de acuerdo con (1-42), $(\partial \mathbf{B}_{0x}/\partial x) + (\partial \mathbf{B}_{0y}/\partial y) = -(\partial B_{0z}/\partial z)$. Al sustituir estas relaciones en (19-50)-(19-52) y recordando que $\mathbf{m}$ solamente tiene componente z según (19-44), se encuentra que las componentes de la fuerza pueden expresarse de la siguiente manera:

$$F_x = m_z\left(\frac{\partial B_{0x}}{\partial z}\right) = (\mathbf{m}\cdot\nabla)B_{0x}$$

$$F_y = m_z\left(\frac{\partial B_{0y}}{\partial z}\right) = (\mathbf{m}\cdot\nabla)B_{0y}$$

$$F_z = m_z\left(\frac{\partial B_{0z}}{\partial z}\right) = (\mathbf{m}\cdot\nabla)B_{0z}$$

por medio de (1-41) y (1-20). Pero estas expresiones son justamente las componentes rectangulares de $\mathbf{F} = (\mathbf{m}\cdot \Delta)\mathbf{B}_0$, que es exactamente (19-39).

Una evaluación directa del momento de torsión puede realizarse de manera similar. La fuerza sobre un elemento de corriente está dada por (14-5) como $d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}_0$, de modo que el momento de torsión sobre él será $d\,\tau = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}_0)$. Al sumar todo esto sobre el circuito se obtiene

$$\tau = \int d\tau = I\oint_C [\mathbf{r}\times(d\mathbf{s}\times\mathbf{B}_0)] \tag{19-53}$$

Usando (1-30) se puede escribir el término entre corchetes como $d\mathbf{s}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_0) - \mathbf{B}_0(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{s})$. Dado que $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}$, se tiene que $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{s} = d(\frac{1}{2}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = d\frac{1}{2}\,\mathbf{r}^2)$; si se utiliza la aproximación de primer orden de que $\mathbf{B}_0$ es constante, la contribución del segundo término a (19-53) resulta ser $-I\oint \mathbf{B}_0 d(\frac{1}{2}\,\mathbf{r}^2) = -I\mathbf{B}_0\oint d(\frac{1}{2}\,\mathbf{r}^2) = 0$, debido a que la integral de la diferencia de un escalar sobre una trayectoria cerrada se anula, como se vio, por ejemplo, después de (13-4). Si se sustituye el resto del término entre corchetes en (19-53) y se utiliza (1-26), se obtiene

$$\tau = I\oint_C (\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_0)d\mathbf{s} = I\int_S d\mathbf{a}\times\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_0) \tag{19-54}$$

Dado que se está tomando a $\mathbf{B}_0$ como constante, resulta ser como $\mathbf{C}$ en la primera parte de (19-11), de manera que $\Delta\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B}_0) = \mathbf{B}_0$. Al sustituir esto en (19-54), sacar $\mathbf{B}_0$ de la integral y utilizar (19-27), se obtiene

$$\tau = \left(I\int_S d\mathbf{a}\right)\times\mathbf{B}_0 = I\mathbf{S}\times\mathbf{B}_0 = \mathbf{m}\times\mathbf{B}_0$$

que es exactamente lo mismo que se encontró en (19-42) a partir de consideraciones muy generales.

Ejercicios

19-1 Una corriente constante I sigue una trayectoria cerrada enrollada alrededor de un cilindro de radio a. En coordenadas cilíndricas, el vector de posición de un punto de este circuito está dado por $\mathbf{r} = a\rho + b \operatorname{sen} n\varphi\hat{\mathbf{z}}$, donde b es una constante y n es un entero positivo $\geqslant 2$. Encontrar el momento dipolar magnético $\mathbf{m}$ de esta distribución de corriente.

19-2 Un circuito plano que conduce una corriente I se construye sobre el plano xy como sigue. Se utilizan coordenadas cilíndricas. Empezando en el origen para $\varphi = 0$, se tiene que $\rho = \rho_0\varphi^n$ donde ρ_0 es una constante y $n > 1$. Se forma así una espiral. Se continúa el proceso hasta lograr un valor φ_0 para el ángulo. En este momento se hace que la corriente siga una línea recta de regreso al origen. Encontrar el momento dipolar magnético de esta distribución de corriente.

19-3 Un cilindro circular de radio a y longitud l contiene una carga total Q distribuida uniformemente en todo su volumen. Se le hace girar en torno a su eje angular constante, ω. Suponer que la distribución de carga no se afecta con la rotación y encontrar el momento dipolar magnético de este sistema.

19-4 Una esfera dieléctrica de radio a posee una densidad superficial de carga σ = const. en toda su superficie. Se le hace girar en torno a uno de sus diámetros a velocidad angular, ω. Suponer que la distribución de carga no se altera por la rotación y encontrar el momento dipolar magnético de este sistema.

19-5 Un dipolo puntual $\mathbf{m}$ se encuentra situado en el origen, pero no tiene ninguna orientación especial con respecto a los ejes coordenados. (Por ejemplo, $\mathbf{m}$ no es paralelo a ninguno de los ejes.) Expresar su potencial $\mathbf{A}$, en un punto $\mathbf{r}$, en coordenadas rectangulares y encontrar las componentes rectangulares de $\mathbf{B}$. Demostrar que $\mathbf{B}$ puede expresarse en la forma

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}[3(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}] \tag{19-55}$$

y compararla con (8-84).

19-6 Supóngase que los círculos coaxiales de la figura 17-14 se encuentran tan separados que pueden considerarse dipolos. Encontrar su inductancia y comparar el resultado con el del ejercicio 17-25.

19-7 Dos espiras circulares de radios a y b descansan sobre el mismo plano. Suponer que la distancia c entre sus centros es tan grande que resulta apropiado utilizar la aproximación dipolar; encontrar su inductancia mutua.

19-8 *a*) Una pequeña espira rectangular de lados a y b que conduce una corriente I descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Encontrar $\mathbf{A}$ en un punto $\mathbf{r}$ donde $r \gg a$ y $r \gg b$. *b*) Utilizar el resultado de *a*) para encontrar $\mathbf{B}$ en ese mismo punto. *c*) Un dipolo puntual $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{x}}$ se encuentra sobre el eje y positivo a una distancia c del origen, siendo $c \gg a$ y $c \gg b$. Encontrar la fuerza y el momento de torsión sobre $\mathbf{M}$ producidos por la espira. Expresar todas las respuestas en coordenadas rectangulares.

19-9 Por medio de (19-35) demostrar que no existe contribución monopolar a la energía de interacción, análoga a la encontrada en (8-62).

19-10 Un dipolo puntual $\mathbf{m}_1$ se encuentra situado en $\mathbf{r}_1$ y otro dipolo puntual $\mathbf{m}_2$ está en $\mathbf{r}_2$. Ya sea por cálculo directo o por transcripción de los resultados correspondientes del caso eléctrico, demostrar que la energía de $\mathbf{m}_2$ en la inducción de $\mathbf{m}_1$ está dada por la *energía de interacción dipolo-dipolo*

$$U'_{DD} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3}[(\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2) - 3(\mathbf{m}_1\cdot\hat{\mathbf{R}})(\mathbf{m}_2\cdot\hat{\mathbf{R}})] \tag{19-56}$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. De manera similar, encontrar la fuerza $\mathbf{F}_2$ sobre $\mathbf{m}_2$.

19-11 Dos dipolos, $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$, se encuentran sobre el mismo plano. La dirección de $\mathbf{m}_1$ se mantiene fija, mientras que $\mathbf{m}_2$ está en libertad de rotar sobre el plano. Si $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{m}_2$ forman ángulos respectivos de α_1 y α_2 con $\mathbf{R}$, encontrar la relación que deben satisfacer los ángulos cuando se logra el estado de equilibrio.

19-12 Un anillo circular de radio a descansa sobre el plano xy con su centro en el origen. Conduce una corriente I en el sentido de las manecillas del reloj visto desde un punto sobre el eje z positivo. Un dipolo puntual $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$ se encuentra situado sobre el eje z. Encontrar la componente z de la fuerza sobre $\mathbf{m}$.

19-13 Considérese la espira rectangular plana que se muestra en la figura 17-4. Suponer que la $\mathbf{B}$ externa que se muestra es uniforme y que circula una corriente constante I en la espira en el sentido positivo según lo determina la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$. Encontrar el momento de torsión que debería ejercer un agente externo para evitar que la espira gire.

19-14 Encontrar cuánto trabajo debería realizar un agente externo sobre la espira del ejercicio anterior para hacer que la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ se invierta, es decir, para aumentar φ en $180°$. Evaluar esto de dos maneras diferentes.

Capítulo 20
Magnetismo en presencia de materia

Hasta ahora, al considerar las fuerzas magnéticas entre corrientes se ha supuesto que las regiones en que se producían se encontraban al vacío u ocupadas por materiales conductores "no magnéticos." Se desea aquí generalizar los resultados obtenidos para incluir materia de cualquier tipo. Como sucedió en el capítulo 10, resulta de gran utilidad considerar a la materia, desde el punto de vista microscópico, como una colección de átomos y moléculas, es decir, de partículas cargadas, para poder tener una mejor idea de cómo proceder.

20-1 Magnetización

Ya antes se había supuesto que los átomos y las moléculas están formados por partículas cargadas positiva y negativamente y que, en conjunto, son eléctricamente neutros. Ahora se va un paso adelante al suponer que por lo menos algunas de estas cargas no se encuentran en reposo, sino en movimiento continuo. Se supone también que estos movimientos se efectúan en trayectorias cerradas cuya naturaleza queda determinada por la estructura resultante de los sistemas atómico y molecular. Vistas desde una gran distancia, estas cargas en movimiento aparecerán como circuitos de corriente o dipolos magnéticos. A tales corrientes que circulan permanentemente se les da el nombre de *corrientes de Ampere,* ya que fue precisamente Ampere quien postuló su existencia para explicar las propiedades magnéticas de la materia. Se deben considerar varias posibilidades.

Si $\mathbf{B} = 0$, es posible que las cargas estén circulando de manera tal que la circulación *neta* de corriente sea igual a cero, es decir, que los momentos dipolares de las cargas individuales se combinen para dar cero cuando se les suma vectorialmente según (19-28). Supóngase ahora que la situación es tal que $\mathbf{B} \neq 0$, por ejemplo, por la existencia de corrientes externas. Por (19-42) se sabe ya que de esto resultarán ciertos momentos de torsión sobre los dipolos, que tenderán a alinear éstos en la dirección de la inducción. Puede muy bien suceder que bajo la influencia de estos momentos de torsión las trayectorias de las cargas en movimiento se modifiquen lo suficiente para que en la nueva configuración resultante el momento dipolar neto sea ahora diferente de cero. Se puede entonces decir muy apropiadamente que un momento tal fue *inducido* por el campo $\mathbf{B}$ y que la materia fue *magnetizada.*

Pudiera ser que en ausencia de una inducción externa el átomo o la molécula tuviera ya una estructura tal que el momento dipolar asociado con ella fuera diferente de cero, de modo que tuviera un *momento dipolar magnético permanente.* (Aunque para las consideraciones presentes no resulta imprescindible, es de interés observar que tales dipolos permanentes *no* pueden ser explicados desde el punto de vista de la mecánica clásica y el electromagnetismo por sí solos, sino que están asociados con la cantidad de movimiento angular intrínseca, o "espín", de estos sistemas, el cual viene a ser una consecuencia de la mecánica cuántica. Sin embargo, no compete al estudio presente explicar tales dipolos permanentes, sino simplemente aceptar su existencia y descubrirlos desde un punto de vista macroscópico de modo tal que puedan ser incluidos en las ecuaciones usadas.)

Aun cuando el material contuviera dipolos permanentes, si $\mathbf{B} = 0$ es todavía posible que estuviesen orientados al azar, de modo que el momento dipolar *total* del trozo de material considerado fuera igual a cero, es decir, que el material estuviera *desmagnetizado.* Pero si $\mathbf{B} \neq 0$, existirá un momento de torsión sobre estos dipolos que tenderá a hacerlo girar hasta alinearlos con la inducción resultante. Por lo general, esta tendencia al alineamiento se verá contrarrestado por procesos desordenados asociados con la agitación térmica, como por ejemplo, las colisiones, pero sería de esperar que el efecto neto alcanzado fuera el de producir un cierto momento dipolar neto en la dirección del campo, con lo que el material quedaría magnetizado.

Aun en ausencia de un campo **B**, algunos materiales tienen la propiedad de que sus dipolos permanentes se encuentran por lo menos parcialmente alineados, por lo que se dice que el material está *permanentemente magnetizado* o que es un *imán permanente.* Tales casos resultan ser de mucho mayor importancia tecnológica que sus contrapartes del caso eléctrico.

Como ya se vio en el capítulo anterior, es lógico esperar que las moléculas, especialmente cuando se encuentran distorsionadas por la presencia de **B**, posean momentos multipolares de orden superior, cuyos efectos estarían descritos por (19-3). Sin embargo, dado que las contribuciones de estos términos de orden superior a **A** y a **B** disminuyen mucho con la distancia y dependen de los ángulos de una manera mucho más complicada de los dipolos, se supone aquí que, para el propósito de describir las propiedades *promedio* de la materia, las características de interés predominante son las asociadas con los momentos dipolares. Así, todas estas consideraciones desembocan en la siguiente.

Hipótesis

En lo que concierne a sus propiedades magnéticas, la materia neutra es equivalente a un conjunto de dipolos magnéticos.

Debe ahora ponerse esta hipótesis en términos cuantitativos. Para ello, se define la *magnetización,* **M**, como el momento dipolar magnético por unidad de volumen, de manera que el momento dipolar, $d\mathbf{m}$, de un pequeño volumen $d\tau$ en **r** será

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r})\, d\tau \tag{20-1}$$

Así, el momento dipolar total de un volumen V de material será

$$\mathbf{m}_{\text{total}} = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r})\, d\tau \tag{20-2}$$

A partir de esta definición y de (19-20) se puede observar que la unidad de **M** es el ampere/metro.

Como ya es normal, la definición (20-1) implica que $d\tau$ es lo suficientemente grande para incluir el material necesario para que **M** pueda considerarse una función que varía suavemente con respecto a la posición; al mismo tiempo, $d\tau$ debe ser pequeño a escala macroscópica. Debido a la forma en que se llegó a la introducción de **M**, es de esperarse que exista alguna relación funcional entre **M** y **B**. Más adelante se considera este punto en mayor detalle, pero por ahora se toma **M** como parte de la descripción macroscópica del material y se investigan las consecuencias de su existencia.

20-2 Densidades de corriente de magnetización

Supóngase que se tiene un objeto magnetizado y se desea encontrar el potencial vectorial producido por él en un punto de campo **r** situado en el exterior del cuerpo, como se ilustra en la figura 20-1. El momento dipolar del volumen $d\tau'$ dado por (20-1) es $d\mathbf{m}' = \mathbf{M}(\mathbf{r}')d\tau'$ y su contribución al potencial vectorial en **r** se obtiene de (19-21) como

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\mathbf{m}'\times\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\hat{\mathbf{R}}\,d\tau'}{R^2} \tag{20-3}$$

donde, como siempre, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ y corresponde a la **r** de (19-21) dado que allí **m** se tomó en el origen. El potencial total se obtiene al integrar (20-3) sobre el volumen V' del material, resultando

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\hat{\mathbf{R}}\,d\tau'}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\mathbf{M}(\mathbf{r}')\times\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)d\tau' \tag{20-4}$$

con la ayuda de (1-143). Se puede ahora utilizar (1-120) para expresar el integrando como

$$\mathbf{M}\times\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\nabla'\times\mathbf{M}}{R} - \nabla'\times\left(\frac{\mathbf{M}}{R}\right) \tag{20-5}$$

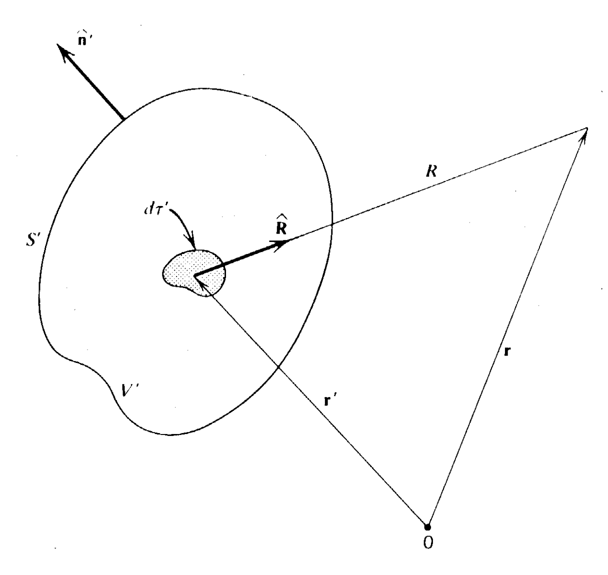


Figura 20-1. Cálculo del potencial vectorial en un punto de campo en el exterior de un objeto magnetizado.

Al sustituir esto en (20-4) y utilizar (1-25) y (1-52) se obtiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{(\nabla'\times\mathbf{M})\,d\tau'}{R}+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\left[-\nabla'\times\left(\frac{\mathbf{M}}{R}\right)\right]d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{(\nabla'\times\mathbf{M})\,d\tau'}{R}+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}'\,da'}{R} \tag{20-6}$$

donde S' es la superficie limitante del volumen V' del material, y $\hat{\mathbf{n}}'$ es la normal exterior que se muestra en la figura 20-1. Al comparar esto con (16-12) y (16-13) se puede observar que viene a ser exactamente el potencial vectorial que sería producido por una densidad volumétrica de corriente $\mathbf{J}_m$ distribuida en todo el volumen y una densidad superficial de corriente $\mathbf{K}_m$ sobre la superficie limitante, siendo

$$\mathbf{J}_m=\nabla'\times\mathbf{M} \tag{20-7}$$

$$\mathbf{K}_m=\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}' \tag{20-8}$$

pues así se tendría

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}')\,d\tau'}{R}+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}')\,da'}{R} \tag{20-9}$$

como era de esperarse.

Por lo tanto, lo que se ha obtenido es que, en lo que respecta a los efectos en su exterior, el material puede ser *remplazado* por una distribución de densidades volumétricas y superficiales de corriente que están relacionadas con la magnetización **M** por medio de (20-7) y (20-8). Los diversos pasos que condujeron al presente esquema conceptual quedan resumidos en la figura 20-2. (Compáresela con la figura 10-2.) El potencial vectorial *total* en el punto de campo estará entonces dado por (20-6) *más* el producido por cualesquiera otras corrientes que pudieran estar presentes.

Es práctica común omitir las primas en (20-7) y (20-8) y simplemente escribir

$$\mathbf{J}_m=\nabla\times\mathbf{M} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{K}_m=\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}} \tag{20-10}$$

considerando que la diferenciación es con respecto a las coordenadas del punto fuente y que $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal *exterior*. Nótese que $\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}$ *es* tangente a la superficie, pues es perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$, como debe ser para poder representar una corriente superficial; esto también demuestra que la componente tangencial de **M** es la que determina la corriente superficial. (Es esencial no olvidar que K_m queda determinada por el valor de $\mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}$ *en* la superficie.)

El índice m de estas cantidades refleja el hecho de que comúnmente se les llama *densidades de corriente de magnetización.* También se les suele llamar *densidades de corrientes*

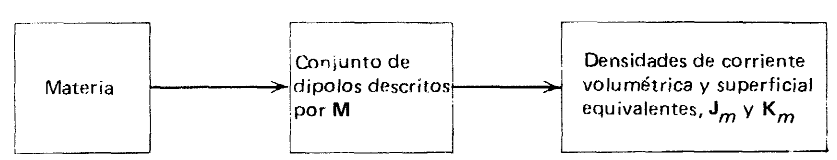


Figura 20-2 Esquema conceptual para remplazar la materia por densidades de corrientes equivalentes.

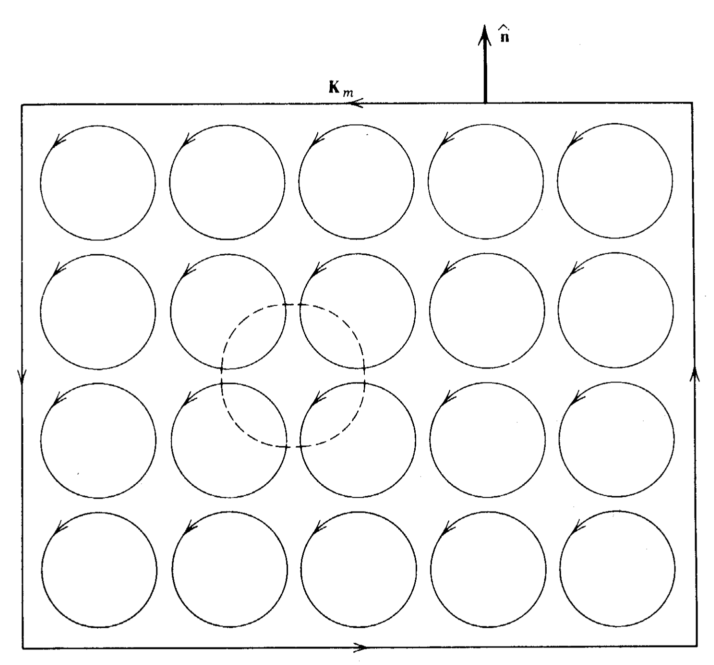


Figura 20-3 Origen de las corrientes superficiales de magnetización para el caso de una magnetización uniforme.

amperianas o *densidades de corriente confinada;* sin embargo, la última forma no se usará aquí porque ya se le asoció en (12-18) con el desplazamiento de cargas ligadas según se refleja en la densidad de corriente de polarización.

Estos resultados se han obtenido haciendo una comparación formal de la expresión (20-6) con su forma general (20-9). Es también posible calcular y entender estas corrientes de una manera "física" directa, sin embargo, esto se hará solamente en forma cualitativa. Como un ejemplo extremo, considérese un trozo de material con una magnetización uniforme producida por dipolos de la misma magnitud que se encuentran alineados, es decir, circulando en el mismo sentido, como se ilustra en una vista de frente en la figura 20-3. Si se considera la vecindad inmediata de un punto interior, como se indica por la línea punteada, se puede observar que la corriente de una de las espiras en una dirección dada se cancela por la corriente en sentido opuesto de las espiras adyacentes. Así, en el interior de un material uniformemente magnetizado la corriente de magnetización es cero, en concordancia con (20-7). Sin embargo, en la superficie no existen corrientes adyacentes que provoquen una cancelación, por lo que, dado que todas las corrientes circulan en la misma dirección, el resultado es una corriente $\mathbf{K}_m$ que circula sobre la superficie exterior como se indica con la flecha. Dado que **M** apunta hacia afuera de la página en este caso, la dirección de $\mathbf{K}_m$ dada por (20-8) viene a ser exactamente la misma que se dedujo al considerar las espiras de corriente.

Supóngase ahora que **M** no es uniforme en todo el material; por ejemplo, la corriente de cada una de las espiras podría ser diferente. En este caso, al considerar la región encerrada por la línea punteada se puede observar que en general no ocurría una cancelación completa debida a las corrientes adyacentes dirigidas en sentido contrario, por lo que existirá una corriente resultante en el interior. Este efecto es exactamente el descrito en (20-7) y, de hecho, esta imagen puede utilizarse como una manera alternativa para derivar cuantitativamente $\mathbf{J}_m = \nabla' \times \mathbf{M}$. En este caso sigue habiendo una corriente superficial $\mathbf{K}_m$, desde luego.

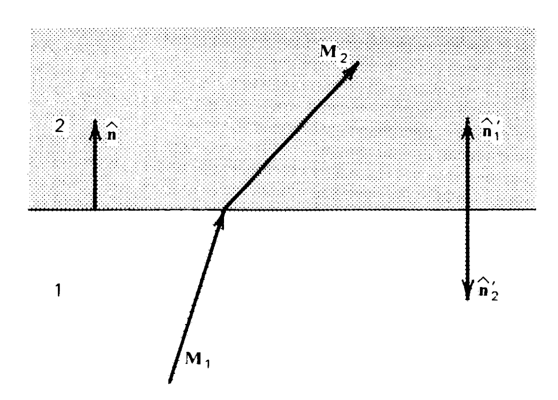


Figura 20-4 Frontera entre dos materiales magnetizados.

Supóngase que se tienen dos materiales magnetizados que se juntan en una frontera común como se muestra en la figura 20-4. Dado que cada uno de ellos poseen una componente tangencial en la superficie, la corriente superficial que se producirá en cada uno de ellos está dada por (20-8). La densidad superficial de corriente neta será la suma de estos dos términos, de manera que

$$\mathbf{K}_{m\,\text{net}} = \mathbf{K}_{m1} + \mathbf{K}_{m2} = \mathbf{M}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_1' + \mathbf{M}_2 \times \hat{\mathbf{n}}_2' \tag{20-11}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_1'$ y $\hat{\mathbf{n}}_2'$ son las normales *exteriores* de los medios respectivos. Si se introduce ahora la normal $\hat{\mathbf{n}}$ dibujada de 1 a 2 por la convención usual, se puede observar en la figura que $\hat{\mathbf{n}}_1' = \hat{\mathbf{n}}$ y que $\hat{\mathbf{n}}_2' = -\hat{\mathbf{n}}$, de modo que (20-11) queda

$$\mathbf{K}_{m\,\text{net}} = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \tag{20-12}$$

Como una ilustración de la consistencia interna de estos resultados, considérese un trozo de material magnetizado de volumen finito, y encuéntrese la rapidez total a la que se transfiere carga ligada a través de un plano que pasa por el material como se indica en la figura 20-5*a*. Sea S la superficie del plano interceptada por el material, $\hat{\mathbf{n}}$ la normal a ella

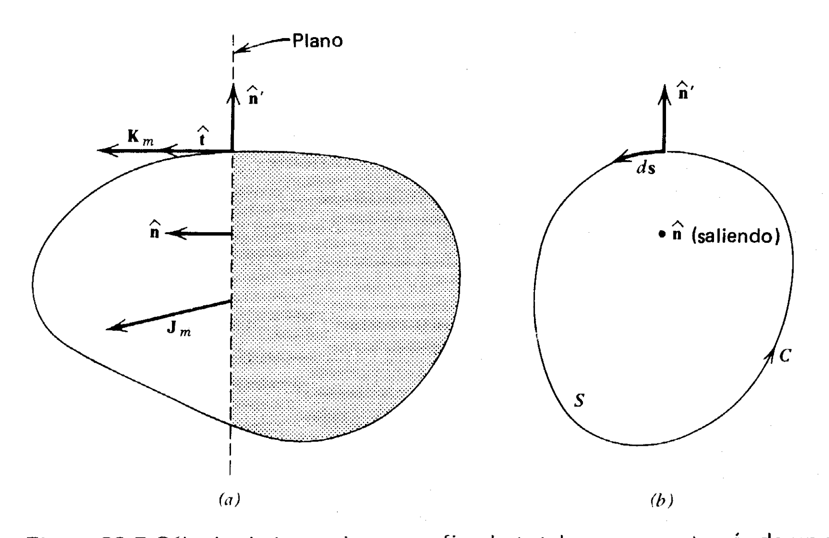


Figura 20-5 Cálculo de la corriente confinada total que pasa a través de un plano.

y C su curva limitante, como se muestra en la figura 20-5b. La rapidez total a la que se transfiere carga a través del plano, es decir, desde la región sombreada de la derecha a la región no sombreada de la izquierda, está dada por (12-6), (12-8) y la figura 12-5 como

$$\frac{dq}{dt} = \int_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{a} + \oint_C \mathbf{K}_m \cdot \hat{\mathbf{t}}\, ds \tag{20-13}$$

donde $\hat{\mathbf{t}}$ se dibuja perpendicularmente a ds, como se requiere. Al sustituir (20-10) en este resultado y utilizar (1-67) y (1-29) se encuentra que

$$\frac{dq}{dt} = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}') \cdot \hat{\mathbf{t}}\, ds = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C \mathbf{M} \cdot (\hat{\mathbf{n}}' \times \hat{\mathbf{t}})\, ds \tag{20-14}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}'$ es la normal a la superficie del material en el punto en el que se desea evaluar $\mathbf{K}_m$. A partir de la figura se puede observar que $(\hat{\mathbf{n}}' \times \hat{\mathbf{t}})ds = -d\mathbf{s}$, de manera que las dos integrales de (20-14) se cancelan y $dq/dt = 0$. Así, las corrientes de magnetización no transfieren carga neta. Pero esto no es sino lo esperado, ya que de otra manera un trozo cualquiera de material magnetizado separaría sus cargas "espontáneamente", lo cual no es compatible con la imagen conceptual discutida de la magnetización según la cual ésta se debe a una *reorientación* de las espiras de corriente ya existentes.

La inducción producida en el exterior del material puede calcularse a partir de (20-6) por medio de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. De manera alternativa, es posible utilizar las densidades de corriente concentradas en (20-7) y (20-8) junto con (14-7) y (14-11) para obtener

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_m(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}\, d\tau'}{R^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{K}_m(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{R}}\, da'}{R^2} \tag{20-15}$$

Hasta ahora todos los resultados se han obtenido considerando el potencial vectorial y su correspondiente inducción en un punto de campo situado en la región al vacío exterior al cuerpo material. No existe dificultad alguna para encontrar el valor de **B**, y es posible imaginar una medición de él midiendo la fuerza sobre una carga puntual en movimiento o el momento de torsión sobre una pequeña espira de corriente. Pero, ¿cuál es la situación *en el interior* del material? No sería fácil medir el momento de torsión sobre una espira de corriente sin antes taladrar un agujero en el material para insertar la espira, y es posible anticipar que ello podría afectar la situación, ya que en el proceso se habrán eliminado algunas corrientes volumétricas y se habrán introducido nuevas corrientes superficiales. Ya se tuvo una situación similar en el caso eléctrico y se estudió la solución en detalle en la sección 10-3. Se podrían utilizar los mismos argumentos aquí, con los cambios apropiados de términos y símbolos, para llegar exactamente a la misma conclusión: la única cosa práctica y razonable que queda por hacer es mantener la consistencia del remplazo conceptual de la materia por el conjunto de densidades de corriente de magnetización y suponer, *por definición,* que (20-9) y (20-15) pueden ser utilizadas en el cálculo de **A** y **B** en cualquier lugar.

Sin embargo, resta todavía preguntar si es posible obtener una *definición de cavidad* de **B** en el mismo sentido que se hizo con **E** en (10-26) y con **D** después de (10-45). En otras palabras, se desea poder recortar una cavidad de forma apropiada en el material, de manera que se pueda insertar, por ejemplo, una pequeña espira de corriente para encontrar el valor de **B** en el material a partir de la medición del momento de torsión producido sobre la espira en el vacío dentro de la cavidad. Como en la ocasión anterior, se puede utilizar lo que ya se conoce acerca de las condiciones de frontera que debe satisfacer **B**; la

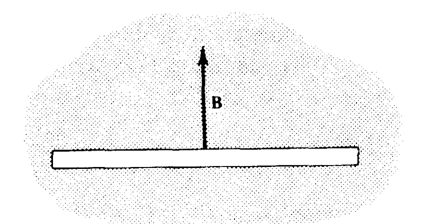


Figura 20-6 Cavidad utilizada para medir **B** en el interior del material.

más relevante es que las componentes normales de **B** son continuas, según (16-4). Y esta es precisamente la misma condición de frontera que se utilizó para obtener la definición de cavidad de **D**, de modo que es fácil ver lo que se debe hacer. Así, la cavidad apropiada es aquélla con la forma de un cilindro recto muy corto recortado en el material con su base perpendicular a la dirección de **B** en ese lugar, como se muestra en la figura 20-6. Por construcción se observa que únicamente se incluyen las componentes normales, por lo que el valor de **B** en la cavidad debe ser igual al que existe dentro del material, es decir, $\mathbf{B}_C = \mathbf{B}$.

Por último, considérese un ejemplo simple que ilustra los resultados obtenidos hasta aquí. En la siguiente sección se verá un ejemplo más complicado.

Ejemplo

Cilindro infinitamente largo y uniformemente magnetizado. Supóngase que se cuenta con un cilindro infinitamente largo de sección circular que posee una magnetización uniforme, **M**, paralela al eje del cilindro, tal como se ilustra en la figura 20-7*a*. Se pueden encontrar las corrientes de magnetización a partir de (20-10). Dado que $\mathbf{M} = \text{const}$, se encuentra que $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = 0$ y que no existen corrientes volumétricas. La figura 20-7 muestra una normal exterior, $\hat{\mathbf{n}}$, perpendicular a **M**, y puede observarse que la corriente superficial posee una magnitud constante $K_m = M$ y que circula alrededor del cilindro en la dirección indicada en la parte *b*) de la figura. Pero resulta que una corriente de este tipo no es sino el equivalente exacto de un solenoide ideal infinitamente largo, como el que se ilustró en la figura 15-11, y para el cual ya se ha calculado la inducción. La magnitud de **B** en el interior está dada por (15-24), por lo que en este caso se tiene que $B_i = \mu_0 K_m = \mu_0 M =$ const., mientras que $\mathbf{B}_0 = 0$ en el interior. Dado que la dirección de $\mathbf{B}_i$ es axial, como la de **M**, se puede escribir

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{M} \tag{20-16}$$

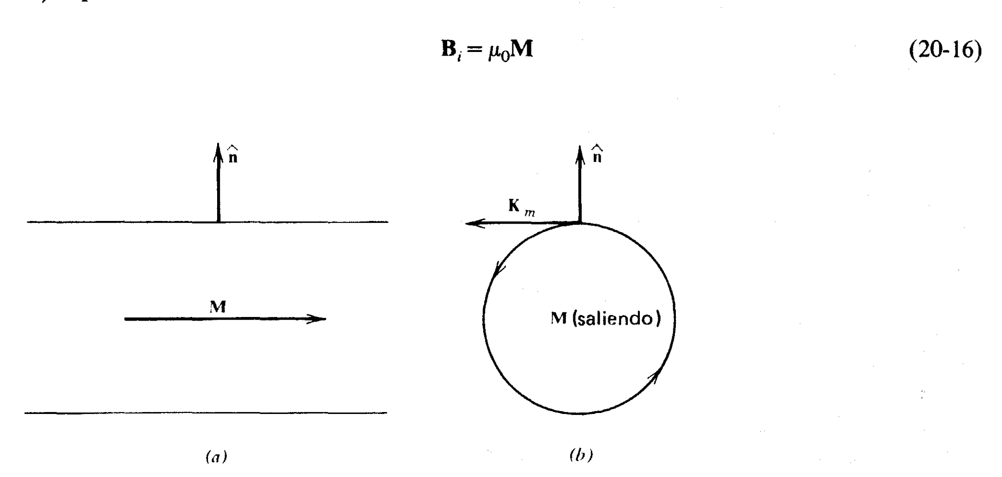


Figura 20-7 Cilindro uniformemente magnetizado. *a*) Vista de perfil. *b*) vista de frente.

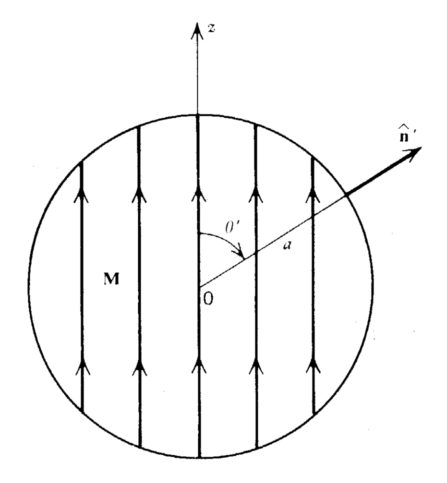


Figura 20-8 Esfera uniformemente magnetizada.

como la solución completa del problema.

20-3 Esfera uniformemente magnetizada

Considérese ahora una esfera de radio a que posee magnetización constante **M**. Tómese el eje z en la dirección de **M** y el origen en el centro de la esfera, como en la figura 20-8; resulta así que $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$. Dado que **M** es constante, $\mathbf{J}_m = 0$ debido a (20-7). En la figura se puede observar que la normal exterior es $\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{r}}'$, por lo que la densidad de corriente superficial se encuentra a partir de (20-8) como

$$\mathbf{K}_m = M\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}' = M \operatorname{sen}\theta' \hat{\boldsymbol{\varphi}}' \tag{20-17}$$

con la ayuda de (1-94) y (1-92). Por lo tanto, las corrientes superficiales se encuentran, en este caso, a lo largo de los "paralelos" de la esfera, con una magnitud que es igual a cero en los "polos" y máxima en el "ecuador", tal como se ilustra en la figura 20-9. Si se sustituye (20-17) en (20-15) y se utiliza (1-100) para escribir $da' = a^2 \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\varphi'$ mientras que $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$, se puede encontrar que en general **B** estará dada por

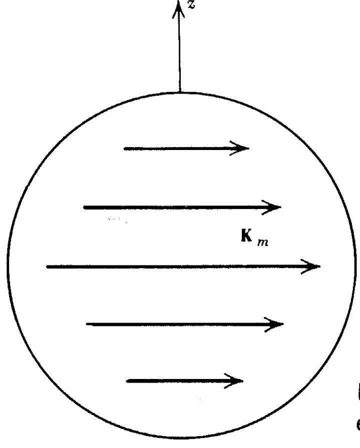


Figura 20-9 Corrientes superficiales equivalentes de una esfera uniformemente magnetizada.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 M a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\hat{\varphi}' \times \mathbf{R}) \operatorname{sen}^2 \theta' \, d\theta' \, d\varphi'}{R^3} \tag{20-18}$$

Por simplicidad en el ejemplo, se evalúa (20-18) únicamente para puntos de campo sobre el eje z positivo; más adelante se resolverá este mismo problema en forma por un método muy diferente. De la figura 20-10 se desprende que $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{r}' = a\hat{\mathbf{r}}'$, $\mathbf{R} = z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\mathbf{r}}'$, $R = (z^2 + a^2 - 2za \cos \theta')^{1/2}$ y que $\hat{\varphi}' \times \mathbf{R} = z \operatorname{sen} \theta' \hat{\mathbf{r}}' + (z \cos \theta' - a)\hat{\theta} = a \operatorname{sen} \theta' \hat{\mathbf{z}} + (z - a \cos \theta')(\hat{\mathbf{x}} \cos \varphi' + \hat{\mathbf{y}} \operatorname{sen} \varphi')$, al utilizar (1-94), (1-92) y (1-93). Si se sustituyen estas ecuaciones en (20-18) se puede observar que las componentes $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{y}}$ desaparecen al integrar con respecto a φ' debido a (19-49), de manera que $\mathbf{B}$ solamente tiene componente z, como resulta evidente de la simetría de la distribución de corrientes que se muestra en la figura 20-9. Por lo tanto, la única componente que no desaparece es

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M a^3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^3 \theta' \, d\theta' \, d\varphi'}{(z^2 + a^2 - 2za \cos \theta')^{3/2}} \tag{20-19}$$

La integración sobre φ' de un valor de 2π; al usar $\operatorname{sen}^2 \theta' = 1 - \cos^2 \theta'$ y cambiar la variable de integración por medio de (2-22) se encuentra que B_z se convierte en

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M a^3}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(1 - \mu^2) \, d\mu}{(z^2 + a^2 - 2za\mu)^{3/2}} \tag{20-20}$$

La integral se resuelve con la ayuda de tablas y resulta

$$- \frac{2(z^2 + a^2 - 2za\mu)^{1/2}}{3z^3 a^3} \left[z^2 + a^2 + za\mu + \frac{3z^2 a^2 (\mu^2 - 1)}{2(z^2 + a^2 - 2za\mu)} \right] \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3z^3 a^3} \{ (z^2 + a^2)[\,|z + a| - |z - a|\,] - za[\,|z + a| + |z - a|\,] \} \tag{20-21}$$

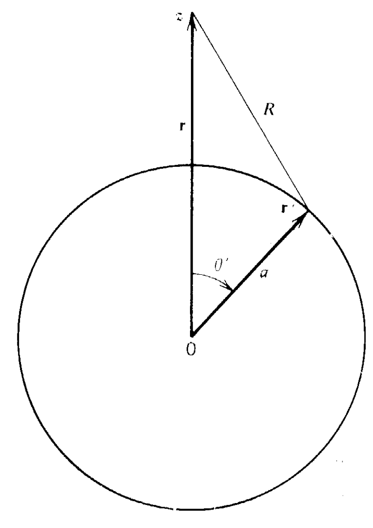


Figura 20-10 Cálculo del campo en un punto sobre el eje.

y, como es usual, existen dos casos a considerar.

1. En el exterior de la esfera. Aquí $z > a$, de modo que $|z - a| = z - a$, con lo que (20-21) se convierte en $4/3z^3$, que al sustituirse en (20-20) da la inducción en el exterior de la esfera, que es

$$B_{zo}(z) = \frac{2\mu_0 M a^3}{3z^3} \tag{20-22}$$

Puede comprenderse mejor este resultado si se le expresa en función del momento dipolar total de la esfera que, de acuerdo con (20-2), es

$$\mathbf{m} = \tfrac{4}{3}\pi a^3 \mathbf{M} \tag{20-23}$$

de modo que (20-22) puede también escribirse como

$$B_{zo}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{z^3} \tag{20-24}$$

Al comparar este resultado con (19-24) y si se recuerda que $\theta = 0$ y $\mathbf{r} = z$ para un punto de campo sobre el eje z, se puede observar que (20-24) es justamente la inducción de un dipolo puntual de momento total m.

2. En el interior de la esfera. Aquí $z < a$, de modo que $|z - a| = a - z$, con lo que (20-21) se convierte en $4/3a^3$, que al sustituirse en (20-20) da la inducción en el interior de la esfera, que es

$$B_{zi}(z) = \tfrac{2}{3}\mu_0 M \tag{20-25}$$

y es constante y paralela a la magnetización. El factor numérico $^2/_3$ es diferente a la unidad que se encontró para el cilindro de (20-16) aun cuando ambos sistemas poseen magnetización uniforme; resulta obvio que la diferencia en los factores numéricos resulta de la diferencia geométrica entre ambos.

Queda como ejercicio demostrar que estos mismos resultados son válidos también para valores negativos de z, es decir, que B_{z0} se encuentra siempre en la dirección positiva y que B_{zi} es constante y dada por (20-25), para todas las z. En la figura 20-11 se ilustran estas direcciones de **B** que se han encontrado. Recuérdese que estos resultados son similares a los encontrados para **E** de una esfera uniformemente polarizada en la sección 10-4. Esto lleva a sospechar que es muy probable que se puedan aplicar aquí algunas de las cosas encontradas en ese caso, es decir, que la inducción *en todos los puntos* del exterior es un campo dipolar que corresponde al momento dipolar total dado por (20-23), mientras que en todos los puntos del interior $\mathbf{B}_i$ es constante y está dada por $(\frac{2}{3})\mu_0\mathbf{M}$. Resulta que, como se demostrará más adelante en este capítulo por un método muy diferente, éste es justamente el caso.

En la superficie de la esfera ($z = a$) (20-22) da $B_{zo}(a) = (^2/_3)\mu_0 M = B_{zi}(a)$; este resultado es lógico, pues dado que ambas son componentes normales, deben ser iguales de acuerdo con (16-4).

20-4 El campo H

Recuérdese que cuando en la sección 14-1 se definió la inducción magnética se hizo notar que, por definición, **B** está determinada por corrientes de *todo* tipo. De esta manera, en

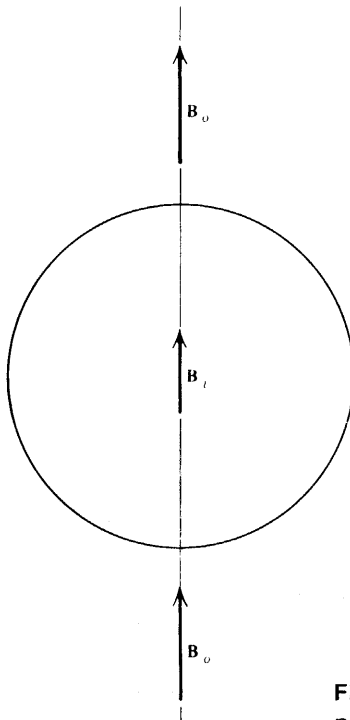


Figura 20-11 Inducción magnética sobre el eje, producida por una esfera uniformemente magnetizada.

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ dada por (15-12), $\mathbf{J}$ representa la densidad *total* de corriente. En (20-10) se encontró una densidad de corriente $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ asociada con la presencia de materia y, tal como en el caso de las cargas de la sección 10-5, resulta conveniente dividir las corrientes que resultan de las cargas en movimiento en dos grandes clases: *corrientes de magnetización* y *corrientes libres*, descritas por las densidades respectivas $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{J}_f$. Las corrientes de magnetización deben asociarse con los elementos constitutivos de la materia y sobre ellas no se tiene, por lo general, un control real. Como ya se vio casi al final de la sección 12-2, es en las corrientes libres sobre las que se puede ejercer algún tipo de control, por ejemplo, enviando corrientes por medio de conductores y empleando baterías, o bien produciendo corrientes de convección en forma de corrientes de partículas cargadas. Por lo tanto, se puede expresar que la densidad total de corriente es la suma de estos dos tipos:

$$\mathbf{J}_{\text{total}} = \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m \tag{20-26}$$

Al sustituir esto en (15-12) y utilizando (20-10) se encuentra que $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 (\mathbf{J}_f + \nabla \mathrm{M})$, o sea,

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f \tag{20-27}$$

La forma de esta ecuación, en la que únicamente aparece la densidad de corriente libre en el miembro derecho, sugiere que podría resultar de utilidad definir un nuevo campo vectorial, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, como

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M} \tag{20-28}$$

pues de esta manera (20-27) queda como

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f \tag{20-29}$$

El vector **H** recibe el nombre de *campo magnético* y a veces de *campo* **H**. La principal característica de **H**, y la razón principal para haberlo introducido, es que su rotacional depende únicamente de la densidad de corriente libre. Las dimensiones de **H** son las mismas que las de **M**, por lo que **H** se mide en ampere/metro. Se puede pensar que (20-29) viene a ser una expresión de la ley de Ampere para la fuerza entre elementos de corriente *más* los efectos magnéticos de la materia.

Una vez definido **H**, resulta sencillo determinar algunas de sus propiedades. El comportamiento de sus componentes tangenciales en una superficie de discontinuidad puede encontrarse sustituyendo la ecuación fuente (20-29) en (9-13) y (9-18) y utilizando la análoga de (15-14) para corrientes libres; el resultado es que se pueden expresar las condiciones de frontera de dos maneras equivalentes:

$$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{K}_f \tag{20-30}$$

$$\mathbf{H}_{2t}-\mathbf{H}_{1t}=\mathbf{K}_f\times\hat{\mathbf{n}} \tag{20-31}$$

donde $\mathbf{K}_f$ es la densidad superficial de corriente libre. Por lo tanto, existirá una discontinuidad de las componentes tangenciales de **H** únicamente si existe una densidad superficial (es decir, de conducción). Esto contrasta con **B** en el sentido de que las componentes tangenciales de este último serán discontinuas si existe densidad de corriente superficial de cualquier tipo, como ya se vio en (15-15) y (15-16).

La forma integral de la ley de Ampere para **H** puede encontrarse a partir de (20-29), (1-67) y (12-6), resultando que

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s}=\int_S \mathbf{J}_f\cdot d\mathbf{a}=I_{f,\text{enc}} \tag{20-32}$$

donde $I_{f,enc}$ es la corriente libre neta que pasa a través de la superficie S encerrada por la trayectoria de integración arbitraria C.

Se puede utilizar la ecuación 20-29 para desarrollar una definición de cavidad de **H**, de modo que se puede encontrar el valor de **H** en el material a partir de mediciones realizadas en el vacío de una cavidad de forma apropiada. Supóngase que no existen corrientes libres dentro del material. Entonces, $\nabla\times\mathbf{H}=0$ y sus componentes tangenciales son continuas debido a (20-31). Esta condición de frontera es exactamente del mismo tipo de la que sirvió de base para obtener la definición de cavidad de **E** en (10-26), por lo que salta a la vista lo que debe hacerse a continuación. Como se muestra en la figura 20-12, se toma una cavidad larga tipo aguja que se perfora en el material con su eje paralelo a la dirección

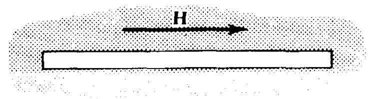


Figura 20-12 Cavidad utilizada para medir **H** en el interior del material.

de **H** en ese lugar. Así, por construcción, únicamente quedan las componentes tangenciales y, dado que son continuas, el campo magnético en la cavidad, $\mathbf{H}_c$, es igual al que existe en el material, $\mathbf{H}_c = \mathbf{H}$. Se puede medir la inducción en la cavidad, $\mathbf{B}_c$, midiendo la fuerza sobre una carga en movimiento o el momento sobre una pequeña espira de corriente. Dado que no existe meteria en la cavidad, $\mathbf{M}_c = 0$, y de (20-28) se desprende que $\mathbf{H}_c = \mathbf{B}_c/\mu_0$, por lo que el campo en el material estará dado por

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_c = \frac{\mathbf{B}_c}{\mu_0} \tag{20-33}$$

Como indica el teorema de Helmholtz de la sección 1-18, se requiere de otra ecuación diferencial fuente para el campo magnético, es decir, su divergencia. Resulta sencillo encontrarla si se combina (20-28) con (16-3), de lo que se desprende que $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 = \nabla\cdot[\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})] = \mu_0(\nabla.\mathbf{H}+\nabla\cdot\mathbf{M})$ y, por lo tanto,

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = -\nabla\cdot\mathbf{M} \tag{20-34}$$

lo que viene a demostrar que **H** *puede* tener fuentes asociadas con las corrientes de Ampere de la materia, así como con las corrientes libres. Más adelante se regresará a este punto.

Las condiciones de frontera que deben satisfacer las componentes normales de **H** se encuentran may fácilmente a partir del hecho de que las componentes de **B** son continuas, de modo que al sustituir (20-28) en (16-4) se obtiene

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) \tag{20-35}$$

o sea,

$$H_{2n} - H_{1n} = -(M_{2n} - M_{1n}) \tag{20-36}$$

A pesar de la aparente simplicidad de los resultados obtenidos, particularmente en el caso de (20-29), no resultan ser de gran utilidad en este momento, ya que antes se hace necesario poder relacionar los tres vectores **B, M** y **H** entre sí. Sin embargo, es posible revisar algunos de los ejemplos anteriores desde este nuevo punto de vista.

Ejemplo

Solenoide ideal infinitamente largo. Aquí los campos están producidos por corrientes libres. Dado que existe vacío en todos los demás puntos, $\mathbf{M} = 0$ y $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$. Así, es posible utilizar los resultados previos (15-25) y (15-26), observando que $\mathbf{K}_0 = 0$, mientras que en el interior del solenoide

$$\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{B}_i}{\mu_0} = nI\hat{\mathbf{z}} \tag{20-37}$$

donde n es el número de vueltas por metro y $\hat{\mathbf{z}}$ se encuentra a lo largo del eje del solenoide. (Este resultado es básicamente la razón por la cual a menudo se le asigna a **H** las unidades ampere-*vueltas*/metro.) Se tiene una discontinuidad en las componentes tangenciales de **H**; si se toma $\hat{\mathbf{n}}$ apuntando desde el interior 1) hacia el exterior 2) y se expresa $\mathbf{K}_f = nI\hat{\varphi}$, como en (15-22) y en la figura 15-11, resulta que (20-31) se vuelve $\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = 0 - \mathbf{H}_i = nI\hat{\varphi} \times \hat{\mathbf{n}} = -nI\hat{\mathbf{z}}$ y, por lo tanto, $\mathbf{H}_I = nI\hat{\mathbf{z}}$, en concordancia con (20-37); nótese que al utilizar las condiciones de frontera de esta manera se logra obtener un método rápido para calcular $\mathbf{H}_i$ en este caso.

Ejemplo

Cilindro infinitamente largo y uniformemente magnetizado. Aquí *no* hay corrientes libres. Ya se obtuvo poco antes **B**, resultando $\mathbf{B}_0 = 0$ mientras que $\mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{M}$. En el exterior del cilindro $\mathbf{M}_0 = 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{H}_0 = 0$. En el interior del cilindro se encuentra que, por (20-28), $\mathbf{H}_i = (\mathbf{B}_i/\mu_0) - \mathbf{M}_i = \mathbf{M} - \mathbf{M} = 0$. Por tanto, $\mathbf{H} = 0$ *en todo lugar,* a pesar de la gran semejanza que existe entre este ejemplo y el solenoide, como ya se vio antes. La diferencia real entre los dos ejemplos consiste en que el primero existen corrientes libres y en el segundo no. Dado que **M** es uniforme, $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, por lo que, según (20-34), $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$; **M** tampoco tiene componentes normales; por lo tanto, estos resultados con consistentes con (20-36). [Si el cilindro no fuera infinitamente largo existiría una discontinuidad en las componentes normales de **M** en sus extremos, en la superficie que separa la materia del vacío. En ese caso, de acuerdo con (20-36), sería de esperar que hubiera fuentes de **H** y que $\mathbf{H} \neq 0$ para un cilindro de longitud finita.]

Ejemplo

Esfera uniformemente magnetizada. Tampoco hay corrientes libres en este ejemplo. En la sección anterior se encontraron los valores de **B** a lo largo del eje, por cálculo directo a partir de las corrientes de magnetización. Se pueden utilizar estos resultados para obtener **H** por medio de (20-28). En el exterior de la esfera $\mathbf{M}_o = 0$ y, de (20-24) y (20-22) se obtiene que

$$H_{zo}(z) = \frac{B_{zo}}{\mu_0} - 0 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{2m}{z^3} = \frac{2Ma^3}{3z^3} \tag{20-38}$$

En el interior de la esfera $\mathbf{M}_i = M\hat{\mathbf{z}}$ y de (20-25) se obtiene que

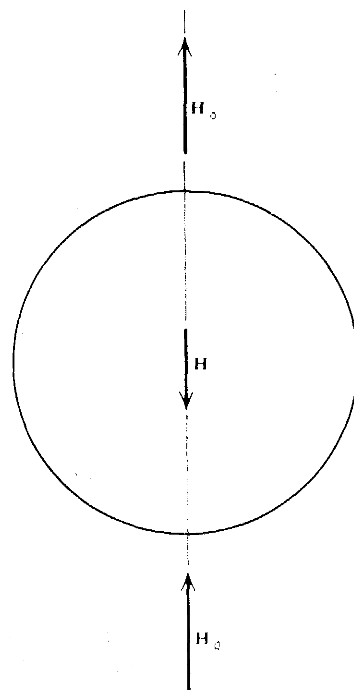


Figura 20-13 Campo magnético sobre el eje, producido por una esfera uniformemente magnetizada.

$$H_{zi}(z) = \frac{B_{zi}}{\mu_0} - M = -\frac{1}{3}M \tag{20-39}$$

Por lo tanto, en este caso $\mathbf{H} \neq 0$ tanto dentro como afuera de la esfera y, de hecho, su dirección es opuesta a la de **B** y **M** en el interior de la esfera, como se ilustra en la figura 20-13. En la superficie de la esfera ($z = a$), de (20-38) resulta que $H_{zo}\ (a) = (\frac{2}{3})M$, por lo que existe una discontinuidad en las componentes normales de **H**. Pero si para este caso se toma $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, (20-36) se convierte en $H_{2n} - H_{1n} = H_{zo}\ a) = \frac{2}{3}M - (-\frac{1}{3}M) = M$ ♀ $(0 - M) = -(M_{2n} - M_{1n})$, como era de esperarse.

Los dos últimos ejemplos se caracterizaron por la *ausencia* de corrientes libres y la *presencia* de una magnetización *uniforme;* sin embargo, $\mathbf{H} = 0$ en uno de los casos mientras que $\mathbf{H} \neq 0$ en el otro. ¿En qué consiste la diferencia real entre ambos? Aunque $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ en el interior para ambos casos, la diferencia consiste en que mientras que en el caso de la esfera es claro que existe discontinuidad en las componentes normales de **M**, en el caso del cilindro esto no ocurre así, como ya se puntualizó antes, y el hecho de que $\mathbf{M} \neq 0$ para la esfera debe estar relacionado de alguna manera con esta diferencia; es de desearse que existe una manera de escribir esto en forma más sistemática y conveniente que por medio de (20-36). Además, no se debe olvidar la semejanza entre estos ejemplos y los que se vieron para el caso electrostático en el capítulo 10, particularmente en el caso de las esferas uniformemente magnetizadas y polarizadas, por lo que se puede presentir que estos problemas se encuentran relacionados entre sí de alguna manera. En efecto, ese resulta ser el caso.

En ausencia de corrientes libres, los resultados (20-29), (20-31), (20-34) y (20-35) se convierten en

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} = 0 \qquad & \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \\ \mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = 0 \qquad & \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M}_1 \end{aligned} \tag{20-40}$$

donde, por simplicidad, se ha tomado la región 2 como el vacío, de modo que $\mathbf{M}_2 = 0$. De manera similar, *en ausencia de carga libre* los resultados electrostáticos (5-4), (9-21), (10-39), (10-10), (9-26) y (10-12) pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \nabla \times (\epsilon_0 \mathbf{E}) = 0 \qquad & \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_b \\ (\epsilon_0 \mathbf{E}_{2t}) - (\epsilon_0 \mathbf{E}_{1t}) = 0 \qquad & \hat{\mathbf{n}} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}_2 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}_1 = \sigma_b \end{aligned} \tag{20-41}$$

Recuérdese también que **P** y **M** representan respectivamente los momentos dipolares por unidad de volumen. Al comparar los dos conjuntos de ecuaciones se observa que, *por analogía* pueden definirse *análogas magnéticas* de las densidades de carga mediante

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \qquad \sigma_m = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{M} \tag{20-42}$$

de manera que dos de las ecuaciones del conjunto (20-40) quedan

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \rho_m \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \sigma_m \tag{20-43}$$

y se ve que ahora la forma de sus correspondientes de (20-41). Por tanto, es posible llamar a ρ_m la *densidad volumétrica de cargas ("polos") magnéticas* y a σ_m la *densidad superficial de cargas ("polos") magnéticas* y considerarlas como las fuentes del campo magnético **H**; ambas desempeñan la misma función que desempeñaron las cargas eléctricas en el cálculo de $\epsilon_0 \mathbf{E}$. Como se vio en la sección 16-1, en realidad no existen cargas magnéticas, de mo-

do que las densidades definidas en (20-42) representan *cargas ficticias;* sin embargo, eso no quiere decir que no resulten de gran utilidad para estudiar este tipo restringido de problemas.

Esta analogía puede extenderse aún más. Recuérdese que el hecho de que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ resultó de la posibilidad de expresar **E** en función del potencial electrostático escalar en (5-3), es decir, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. De manera similar, el hecho de que $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ aquí, hace posible, con la ayuda de (1-48), introducir un *potencial magnético escalar,* ϕ_m, de manera que

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi_m \tag{20-44}$$

Al sustituir esto en (20-43) y usar (1-45), se encuentra que ϕ_m satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi_m = -\rho_m \tag{20-45}$$

mientras que, en regiones donde ρ_m sea cero, satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi_m = 0 \tag{20-46}$$

en forma análoga con (11-1) y (11-3) se la primera de éstas se expresa como $\nabla^2(\epsilon_0\phi) = -\rho = -\rho_b$, dado que únicamente se están considerando casos para los que $\rho_f = 0$. El teorema de unicidad de la sección 11-1 que se encontró para ϕ será también para ϕ_m, ya que el único requisito fue que la función implicada satisficiera la ecuación de Laplace.

Así, lo que se ha encontrado es que muchos de los problemas magnetostáticos pueden resolverse exactamente como se hizo con los problemas electrostáticos y, por lo tanto, muchos de los métodos que se desarrollaron en el capítulo 11 pueden también ser aplicados aquí. Más aún, si ya se ha resuelto el problema análogo electrostático, se puede simplemente tomar el resultado y hacer los remplazos $\epsilon_0\mathbf{E} \to \mathbf{H}, \epsilon_0\phi \to \phi_m, \mathbf{P} \to \mathbf{M}$, y así sucesivamente. Por ejemplo, se puede escribir la integral para obtener ϕ_m con una distribución de magnetización dada cambiando (5-7) y (5-8) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\phi_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\rho_m(\mathbf{r}')d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi}\int_{S'} \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')da'}{R} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla'\cdot\mathbf{M}\,d\tau'}{R} + \frac{1}{4\pi}\int_{S'} \frac{(\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{M})da'}{R}\end{aligned} \tag{20-47}$$

Ejemplo

Esfera uniformemente magnetizada. Considérese este ejemplo desde este nuevo punto de vista donde $\mathbf{M} = m\hat{\mathbf{z}} =$ const, $\rho_m = -\Delta.\mathbf{M} = 0$ y existe densidad volumétrica de polos. Sin embargo, dado que la $\hat{\mathbf{n}}$ de (20-42) es la $\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{r}}'$ de la figura 20-8, se observa que habrá una densidad superficial de polos, en general no nula, dada por

$$\sigma_m = M\hat{\mathbf{z}}\cdot\hat{\mathbf{r}}' = M\cos\theta' \tag{20-48}$$

la cual es de exactamente la misma forma que se encontró en (10-27) para la densidad superficial de carga ligada de la esfera uniformemente polarizada y que se ilustra en la figura

10-9. Es claro ahora que en este ejemplo las fuentes de **H** se pueden adjudicar a las discontinuidades normales de **M** en la superficie de la esfera y, al comparar las figuras 20-13 y 10-11, se entiende por qué **H***i* es de dirección opuesta a **M** en el interior. En el último ejemplo de la sección 11-5 se encontró la solución completa (11-133) para la esfera uniformemente polarizada, resultando que el campo eléctrico en todos los puntos en el exterior de ella era un campo dipolar que correspondía al momento dipolar total de la esfera, mientras que era uniforme en todos los puntos de su interior y dado por (11-134) como $\mathbf{E}_i = -(\mathbf{P}/3\epsilon_0)$. Se puede ahora decir exactamente lo mismo acerca de la esfera uniformemente magnetizada: en el exterior, el campo es dipolar y corresponde al momento de (20-23), y los vectores del campo magnético en todos los puntos del interior son constantes e iguales a

$$\mathbf{B}_i = \tfrac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} \qquad \mathbf{H}_i = -\tfrac{1}{3}\mathbf{M} \tag{20-49}$$

en acuerdo con los resultados (20-25) y (20-39) que se encontraron para puntos sobre el eje.

Tal como se vio en (11-135), muchos campos eléctricos internos o locales resultan ser proporcionales y de dirección contraria a la polarización. Es obvio que un resultado similar es válido para los problemas magnetostáticos de tipo similar y, de acuerdo con ello, es práctica común escribir

$$\mathbf{H}_{\text{loc}} = -N_m\mathbf{M} \tag{20-50}$$

donde N_m es una constante sin dimensiones denominada *factor de desmagnetización.* De (20-49) se desprende que $N_m = \frac{1}{3}$ para la esfera. En los ejercicios se podrá demostrar que $N_m = 1$ para una placa infinita de caras paralelas y que $N_m = \frac{1}{2}$ para un cilindro, exactamente como en el caso electrostático.

Esta estrategia para tratar los problemas magnetostáticos se utilizó muchísimo en otros años de modo que se utilizaron los polos en muchos de los cálculos realizados; esta es la razón por la cual **H** obtuvo tanta importancia en un principio y por la que se le asignó el nombre de *campo* magnético, que hubiera sido más lógico asignar a **B**. Sin embargo, es importante recordar que el uso de los polos funciona consistentemente *sólo* en ausencia de corrientes libres y que, desde luego, no existe evidencia experimental de la existencia de polos magnéticos. Desde el punto de vista moderno, *todos* los efectos magnéticos son debidos en última instancia a las *corrientes,* y el uso de los polos en la forma en que se ilustró antes resulta *a veces* una herramienta ficticia útil, aplicable solamente en algunos casos, por lo general relacionados con cálculos que implican imanes permanentes. En principio, cualquier problema que pueda ser solucionado por medio del uso de polos puede ser resuelto por medio de corrientes de magnetización, como ya se vio en algunos ejemplos; puede parecer más difícil, pero puede lograrse. (A pesar de lo dicho anteriormente acerca de la necesidad de la ausencia de corrientes libres, resulta posible extender el uso del potencial magnético escalar a casos que implican corrientes libres filamentales. Sin embargo, resulta que en estos casos ϕ_m depende del ángulo sólido subtendido por la corriente en el punto de campo. Dado que los ángulos sólidos pueden ser funciones de valores múltiples, esto provoca graves problemas en la utilización de ϕ_m, con lo que rápidamente pierde de la simplicidad que se implicaba arriba; por lo tanto no se continuará usando.)

Considérese ahora otro ejemplo simple que conducirá de manera natural al siguiente tema principal.

Ejemplo

Corriente constante recta infinitamente larga. Se toma la corriente libre I en coincidencia con el eje z y en la dirección positiva de z. Para empezar, supóngase que no existe materia

presente. Por lo argumentos de simetría ya familiares, **H** será de la forma $\mathbf{H} = H_\varphi(\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ y resulta posible utilizar la forma integral de Ampere (20-32), integrando con respecto a un círculo de radio ρ sobre el plano xy. Así, $\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi\rho H_\varphi = I_{f,enc} = I$, de manera que $H_\varphi = I/2\pi\rho$ y, por lo tanto,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{20-51}$$

ya que $\mathbf{M} = 0$. Ahora, como un ejemplo extremo se supone que *todo* el espacio se llena con un material obviamente magnético como el hierro. (Es necesario suponer la existencia de un material delgado, aislante, alrededor del cable porque el hierro es conductor.) ¿Qué ocurrirá en este caso? Si se mantiene la corriente libre I sin cambios y si el material es lo suficientemente homogéneo para que se mantenga la simetría axial, se puede aplicar (20-32) de exactamente la misma manera para obtener precisamente el mismo valor de **H** que en (20-51). En otras palabras, *en este caso* **H** *no se afecta* por la presencia de materia. Sin embargo, es lógico esperar que **M** ya no sea igual a cero y según (20-28) indica, el valor de **B** sí se afectará; de hecho, su alteración es considerable. Resulta evidente también que no se podra evaluar **B** exactamente hasta no conocer cómo depende la magnetización de los campos, que es precisamente lo que se estudia a continuación.

20-5 Materiales magneticos isotropicos homogéneos lineales.

Si se recuerda la forma en que se llegó a la introducción de la magnetización en la sección 20-1, se entiende que es necesario suponer la existencia de una relación funcional entre **M** y **B**, es decir, que se debe expresar **M** = **M(B)** y esperar que la forma exacta de esta relación dependa del material implicado y que se tenga que encontrar por experimentación. Aunque esto pueda parecer perfectamente lógico, no es en realidad lo que comúnmente ocurre; en lugar de ello, se empieza escribiendo una relación entre **M** y **H**, es decir, **M** = **M(H)**. Esencialmente, existen dos razones para esto. La primera es primordialmente histórica en cuanto a que se daba mayor importancia a **H** que a **B**, por lo que resultaba más lógico tomar esta actitud. Una razon mucho más práctica se ilustra en el ejemplo anterior, en el que se vio que **H** no se alteraba en presencia de materia siempre que se mantuviera constante la corriente libre y que se contara con una geometría apropiada. Dado que esta es una situación deseable para una prueba de laboratorio en la que se puede alterar la corriente libre a voluntad, resulta conveniente considerar a **M** como una función mensurable de **H**.

Queda todavía el problema de que la forma funcional de **M(H)** debe ser encontrada para cada material, ya sea por experimento o por cálculos realizados por otras ramas de la física. Afortunadamente, como ocurrió en el caso de los dieléctricos que se estudiaron en la sección 10-6, es posible clasificar la mayoría de los materiales magnéticos en grupos, de manera tal que la teoría se simplifique y pueda ser de mayor utilidad.

Si **H**= 0 y **M**(0) $\neq$ 0 el material estará magnetizado aun en ausencia de un campo externo. Se dice en este caso que tiene una *magnetización permanente* y recibe el nombre de *imán permanente.* Muchos materiales para los que **M**(0) = 0 acusan una dependencia de **M** con respecto a **H** que no es nada lineal y algunas veces ni siquiera univaluada. Muchos de esos materiales resultan ser de gran importancia práctica y, de hecho, muy a menudo los materiales que pertenecen a la primera clase también pertenecen a la segunda. En esta sección no se estudian estos casos con mayor profundidad, sino que se deja eso para la sección 20-7.

En lugar de repetir todos los pasos de la clasificación que se describieron en la sección 10-6, se procede aquí a considerar directamente el caso más simple posible, el del *material*

magnético isotrópico homogéneo lineal para el que la magnetización resulta ser proporcional y paralela al campo magnético, de modo que se puede escribir

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{20-52}$$

Donde X_m recibe el nombre de *susceptibilidad magnética* y es una constante característica de cada material. Para todos los materiales de esta categoría, $|X_m| \ll 1$ y, a diferencia del caso eléctrico, $X_m > 0$ el material recibe el nombre de *paramagnetismo,* mientras que si $X_m < 0$, se dice que es *diamagnético.* Como se ve detalladamente en el apéndice *B, todos* los materiales tienen una contribución dismagnética a su susceptibilidad, que resulta del movimiento orbital alterado de los electrones que lo forman, producido al aplicar un campo externo. Sin embargo, en los materiales paramagnéticos esta contribución es fuertemente superada por la susceptibilidad paramagnética por los momentos dipolares magnéticos permanentes.

Al combinar (20-52) con (20-28) se obtiene

$$\mathbf{B} = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \tag{20-53}$$

donde

$$\kappa_m = 1 + \chi_m = \text{permeabilidad relativa} \tag{20-54}$$

$$\mu = \kappa_m \mu_0 = \text{ permeabilidad (absoluta)} \tag{20-55}$$

Por tanto, para este caso tan común pero no universal, **B** y **H** son paralelos. La relación $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ ó $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu$ es otro ejemplo de *ecuación constitutiva* y no es una ecuación fundamental del electromagnetismo, a diferencia de (20-28), que sí lo es.

En este caso resulta sencillo relacionar **M** y **B** eliminando **H** entre (20-52) y (20-53), resultando

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\kappa_m \mu_0}\mathbf{B} = \frac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}\mathbf{B} \tag{20-56}$$

de modo que **M** es también una función lineal de **B**.

Dado que μ es constante, se puede ver que $\Delta\cdot\mathbf{B} = 0 = \Delta\cdot(\mu\mathbf{H}) = \mu\Delta\cdot\mathbf{H}$, de manera que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{20-57}$$

y, por lo tanto, por (20-52)

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \tag{20-58}$$

que, desde luego, es consistente con (20-34) y, de acuerdo con (20-42), demuestra que no puede existir una densidad volumétrica de cargas magnéticas dentro de un material magnético i.h.l.

Las densidades de corriente libre y de magnetización se encuentran también relacionadas de una manera sencilla en un material de este tipo. Si se obtiene el rotacional de (20-52) y se utilizan (20-10), (20-29) y (20-54), se encuentra que

$$\mathbf{J}_m = \chi_m \mathbf{J}_f = (\kappa_m - 1)\mathbf{J}_f \tag{20-59}$$

y la densidad total de corriente dada por (20-26) resulta

$$\mathbf{J} = (1 + \chi_m)\mathbf{J}_f = \kappa_m \mathbf{J}_f \tag{20-60}$$

Dado que X_m puede ser de cualquier signo, se observa que la corriente de magnetización puede estar opuesta a la corriente libre; sin embargo, la corriente total estará en la misma dirección que la corriente libre, ya que κ_m es positiva. Se puede observar también que cuando $\mathbf{J}_f$=0, tanto $\mathbf{J}_m$ como $\mathbf{J}$ son también iguales a cero, de modo que en cualquier punto de un material magnético i.h.l. en el que no exista corriente libre tampoco existirá corriente de magnetización. Si $\mathbf{J}_f$=0, entonces $\nabla \times \mathbf{H}=0$, lo que, junto con (20-57) demuestra que no existen fuentes de **H** *dentro* del material en ausencia de corrientes libres.

En los casos en que (20-53) es aplicable, las condiciones de frontera en una superficie de discontinuidad de las propiedades magnéticas pueden ser expresadas en función de un solo vector, ya sea **B** o **H**, a elección. Usando (16-4) y (20-30) se pueden escribir como

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \qquad \hat{\mathbf{n}}\times\left(\frac{\mathbf{B}_2}{\mu_2} - \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_1}\right) = \mathbf{K}_f \tag{20-61}$$

o, lo que es equivalente,

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mu_2\mathbf{H}_2 - \mu_1\mathbf{H}_1) = 0 \qquad \hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f \tag{20-62}$$

De estas relaciones se desprende que, aun cuando $\mathbf{K}_f = 0$, las líneas de **B** (y de **H**) tendrán, por lo general, direcciones distintas a ambos lados de la superficie limitante, es decir, que sufrirán una refracción en la superficie de frontera.

Ejemplo

Solenoide ideal infinitamente largo. Como ya es costumbre, supóngase que el solenoide posee n vueltas por unidad de longitud, una sección de área S y una corriente (libre) I en sus vueltas. Supóngase, además, que su interior se llena con un material magnético i.h.l. de permeabilidad relativa κ_m. En este caso, resulta apropiado utilizar la forma integral de la ley de Ampere para **H** dada en (20-32). Se puede proceder exactamente de la misma manera que en el ejemplo de la sección 15-2, con lo que se volverá a obtener (20-37), es decir, que el campo magnético es uniforme en toda la sección y está dado por

$$\mathbf{H} = nI\hat{\mathbf{z}} \tag{20-63}$$

mientras que es igual a cero en el exterior. Así, **H** no es afectado por la presencia de la materia. La inducción **B** está dada por (20-54) y resulta

$$\mathbf{B} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = \kappa_m \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} \tag{20-64}$$

y si se le compara con (15-26) se podrá observar que ha sufrido un aumento por un factor κ_m. Por lo tanto, el flujo por vuelta dado por BS ha sido aumentado por el mismo factor, siendo igual a $\kappa_m \mu_0 n S I$. Si se considera ahora una longitud l con su nl vueltas, el flujo total será de $\kappa_m \mu_0 n^2 S l I$, de modo que la autoinductancia $L = \Phi/I$, según (17-55) será

$$L = \kappa_m \mu_0 n^2 l S = \kappa_m L_0 \tag{20-65}$$

donde se ha utilizado (17-61) para identificar a la autoinductancia, L_0, que se tiene cuando existe vacío en el interior. De esta manera se puede observar que la presencia de materia ha dado como resultado un aumento de la autoinductancia y que la relación $L/L_0 = \kappa_m$ es justamente igual a la permeabilidad relativa del material.

Ejemplo

Autoinductancia en general. La simplicidad del resultado final $L = \kappa_m L_0$ obtenido arriba y su independencia con respecto a los detalles del sistema en particular que se consideró hacen suponer que podría tratarse de una relación general verdadera para cualquier autoinductancia. Este viene a ser el caso en realidad. Supóngase que existe una distribución dada de corrientes libres descrita por $\mathbf{J}_f$ y que hay vacío en todo lo demás. En este caso las ecuaciones fuente para $\mathbf{H}_0$ serán $\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_f$ y $\nabla \cdot \mathbf{H}_0 = 0$, según se desprende de (20-29) y (20-57), pudiéndose enseguida resolver $\mathbf{H}_0$. La inducción correspondiente resulta ser $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ y el flujo a través del circuito es $\Phi_0 = \int \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{a}$. Supóngase ahora que todo el espacio ocupado por los campos se rellena con un material magnético i.h.l. de permeabilidad relativa κ_m; este requisito es indispensable para que no existan superficies de discontinuidad en las que la componente normal de **M** fuese diferente de cero, con lo que se introducirían fuentes de **H** diferentes de las corrientes libres. Si se mantiene $\mathbf{J}_f$ *sin cambios,* las ecuaciones a resolver son exactamente las mismas que antes, por lo que **H** no se habrá afectado, es decir, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$. Pero de (20-53) se puede ver que, en estas circunstancias, **B** aumentará por el factor κ_m, de modo que $\mathbf{B} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H}_0 = \kappa_m \mathbf{B}_0$. Así, al integrar sobre la misma superficie el nuevo flujo será $\Phi = \kappa_m \Phi_0$ y la inductancia resultará $L = \Phi/I = \kappa_m \Phi_0/I$; por lo tanto,

$$L = \kappa_m L_0 \tag{20-66}$$

se obtiene de nuevo, pero esta vez como un resultado completamente general.

Ejemplo

Cable coaxial. En la figura 20-14 se supone que el conductor cilíndrico infinitamente largo de radio a (región 1) es no-magnético y que conduce una corriente total I distribuida uniformemente a través de su sección. El conductor coaxial exterior de radio b se toma por simplicidad, de grosor infinitesimal y conduciendo una corriente $-I$ distribuida uniformemente en su superficie. La región 2 entre los conductores se llena con un material magnético i.h.l. no conductor de permeabilidad $\mu = \kappa_m \mu_0$. La región 3 incluye todo el espacio (vacío) en el exterior del sistema. Se desea calcular todos los vectores de campo para este caso.

Dada la simetría cilíndrica, **H** será, como siempre, de la forma $\mathbf{H} = H_\varphi(\rho)\hat{\varphi}$, por lo que se puede usar la forma integral de la ley de Ampere (20-32) para calcularlo. Pero este sistema es justamente igual al que se muestra en la figura 18-1, con $c = b$ y la región 3 de este caso correspondiendo con la región 4 de la figura anterior. Ya se trabajó este ejemplo para el caso al vacío, por lo que es posible simplemente trasladar aquí los resultados obtenidos y dividir entre μ_0 para obtener **H**, si se prefiere, se pueden repetir los mismos cálculos efectuados en aquel caso. Por lo tanto, de (18-25), (18-28) y siguiendo a (18-33) se obtiene que

$$H_{\varphi 1} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \qquad H_{\varphi 2} = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad H_{\varphi 3} = 0 \tag{20-67}$$

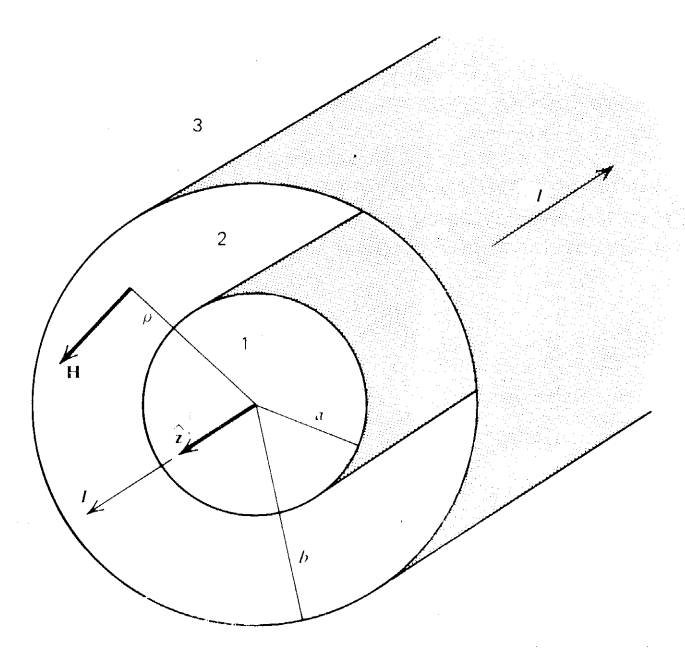


Figura 20-14 Cable coaxial que conduce corrientes iguales y opuestas.

La figura 20-15 muestra estos resultados en función de ρ. Unicamente para comprobación, a continuación se verifica si quedan satisfechas las condiciones de frontera requeridas. Dado que **H** únicamente posee componentes tangenciales en cualquiera de las superficies, la ecuación importante aquí es (20-31). De la figura se desprende que $H\varphi$ es continuo en $\rho = a$ como era lógico, ya que no existe densidad superficial de corriente libre ahí. Se puede observar también que $H\varphi$ es discontinuo en $\rho = b$ porque $\mathbf{K}_f$ no es igual a cero ahí. De las figuras 20-14 y 12-5 se desprende que

$$\mathbf{K}_f = -\frac{I}{2\pi b}\hat{\mathbf{z}} \tag{20-68}$$

Si se pasa de la región 2 a la 3, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\rho}$, con lo que (20-31) queda como $H_{3t}(b) - H_{2t}(b) = -H\varphi(b)\hat{\varphi} = -(I/2\pi)\hat{\varphi} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} = -(I/2\pi b)\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\rho} = -(I/2\pm)\hat{\varphi}$ con lo que la condición de frontera en $\rho = b$ se satisface y el origen de la discontinuidad de $H\varphi$ resulta evidente.

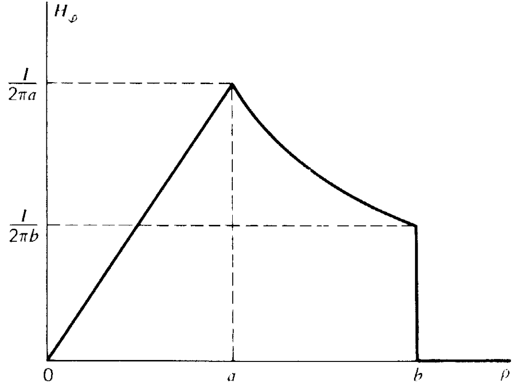


Figura 20-15 Campo magnético producido por un cable coaxial, como función de la distancia al eje.

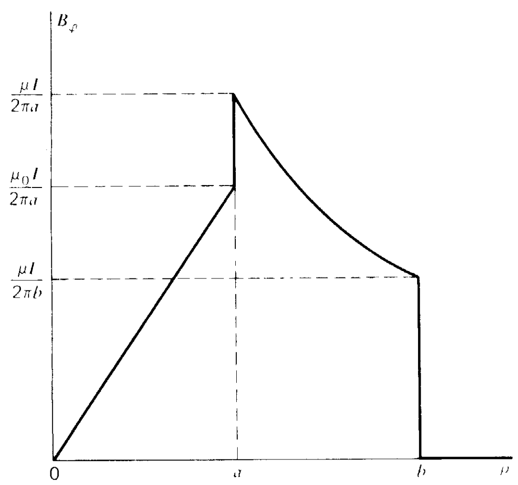


Figura 20-16 Inducción magnética producida por un cable coaxial, como función de la distancia al eje.

Se puede ya calcular **B** a partir de (20-53) y (20-67) usando $\mu_1 = \mu_3 = \mu_0$ y $\mu_2 = \mu$, con lo que se obtiene que

$$B_{\varphi 1} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \qquad B_{\varphi 2} = \frac{\mu I}{2\pi \rho} \qquad B_{\varphi 3} = 0 \tag{20-69}$$

La figura 20-16 muestra estos resultados en función de ρ. Se puede observar que $\mathbf{B}\varphi$ también presenta una discontinuidad en $\rho = b$, pero es diferente del valor $\mu_0 I/2\pi b$ que tendría si existiera un vacío en la región 2. Además, $B\varphi$ presenta una discontinuidad en $\rho = a$, mientras que $H\varphi$ no. Estas diferencias se deben necesariamente a la existencia de corrientes superficiales de magnetización, pero resulta imposible verificarlo cuantitativamente sin haber encontrado antes **M**. (En realidad, ya sabe que $B\varphi$ satisface las condiciones de frontera puesto que $H\varphi$ lo hizo, pero resulta muy ilustrativo derivar todos los detalles.)

Se puede calcular **M** a partir de (20-67) y (20-52) y usando $\chi_{m1} = \chi_{m3} = 0$ y $\chi_{m2} = \chi_m$, con lo que se obtiene

$$M_{\varphi 1} = 0 \qquad M_{\varphi 2} = \frac{\chi_m I}{2\pi \rho} \qquad M_{\varphi 3} = 0 \tag{20-70}$$

La figura 20-17 muestra estos resultados en función de ρ. Se observa que **M** es discontinuo tanto en a como en b y, por lo tanto, debe originar corrientes superficiales de magnetiza-

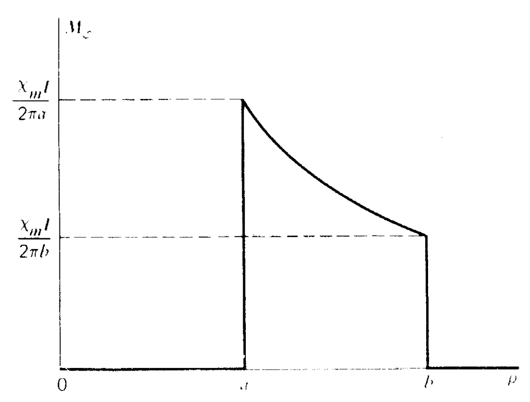


Figura 20-17 Magnetización producida por un cable coaxial, como la función de la distancia al eje.

ción $\mathbf{K}_m$ netas, de acuerdo con (20-12). Sin embargo, antes de realizar los cálculos, es posible verificar los resultados de otras maneras. A partir de (20-70) y (1-87) se encuentra que $\Delta\cdot\mathbf{M}_2 = \rho^{-1}(\partial M\varphi_2/\partial\varphi) = 0$, de acuerdo con (20-58). Dado que no hay corrientes libres en la región no conductora 2, de (20-59) se sabe que $\mathbf{J}_{m2} = \Delta \times \mathbf{M}_2$, dada por (20-10) debe ser igual a cero; se pueden utilizar (20-70) y (1-88) para comprobarlo, obteniéndose que $J_{m2\rho} = -\partial M_{\varphi 2}/\partial z = 0, J_{m2\varphi} = 0$, y $J_{m2z} = \rho^{-1}[\partial(\rho M_{2\varphi})/\partial\rho] = \rho^{-1}[\partial(\chi_m I/2\pi)/\partial\rho] = 0$.

Para calcular las corrientes superficiales, debe recordarse que la $\hat{\mathbf{n}}$ en (20-10) es la *forma exterior* a la región que contiene la materia. Por lo tanto, en $\rho = a$, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\rho}$ con lo que se obtiene

$$\mathbf{K}_{m2}(a) = M_{\varphi 2}(a)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times (-\hat{\boldsymbol{\rho}}) = \frac{\chi_m I}{2\pi a}\hat{\mathbf{z}} \tag{20-71}$$

En $\rho = b$, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\rho}$, con lo que se obtiene

$$\mathbf{K}_{m2}(b) = M_{\varphi 2}(b)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\chi_m I}{2\pi b}\hat{\mathbf{z}} \tag{20-72}$$

Por otro lado, para poder aplicar la condición de frontera al caso de $\mathbf{B}$, que está dada por (15-19) y por la análoga de (20-26) como

$$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} = \mu_0 \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} + \mu_0 \mathbf{K}_m \times \hat{\mathbf{n}} \tag{20-73}$$

debe recordarse que *en esta ecuación* $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal unitaria trazada de la región 1 a la 2, y así sucesivamente, Por lo tanto, si siempre se va de una región de número menor a una de número mayor, de la figura 20-14 se desprende que siempre se podrá utilizar $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\rho}$ en (20-73).

En $\rho = a$, $\mathbf{K}_f = 0$, encontrándose que (20-73), (20-71), (20-54) y (20-55) dan $\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \mathbf{K}_{m2}(a) \times \hat{\mathbf{n}} = (\mu_0 \chi_m I/2\pi a)\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\rho} = [\mu_0(k_m - 1)I/2\pi a]\hat{\varphi} = [(\mu - \mu_0)I/2\pi a]\hat{\varphi}$ en exacta concordancia con (20-69) y la figura 20-16. Sin embargo, en $\rho = b$, $\mathbf{K}_f$, no es igual a cero, sino que está dada por (20-68), de modo que al aplicar (20-73) aquí se vuelve $\mathbf{B}_{3t} - \mathbf{B}_{2t} = (\mu_0\, I/2\pi b)(-\hat{\mathbf{z}} - \chi_m \hat{\mathbf{z}}) \times \hat{\boldsymbol{\rho}} = -[\mu_0(1 + \chi_m)\, I/2\pi b]\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -(\mu I/2\pi b)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, que también está en concordancia exacta con los resultados dados en (20-69) y se ilustra en la figura 20-16.

En este punto se puede observar que a este ejemplo se le ha sacado todo lo posible, habiéndose visto que todas las cantidades relevantes eran calculables y que, en este caso específico, satisfacían los resultados generales obtenidos con anterioridad.

20-6 Energía

Recuérdese aquí el resultado (18-12) obtenido para la energía magnética de un sistema de corrientes libres:

$$U_m = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{A}\, d\tau \tag{20-74}$$

Para el caso eléctrico, tras un largo estudio que siguió a (10-78) se llegó a la conclusión de la definición *útil* de energía era aquella asociada con las cargas libres, ya que representaba el trabajo reversible que podía realizarse sobre el sistema (y obtenerse de él) manipulando las cargas sobre las que sí se podía tener algún control. De una manera muy similar, puede concluirse aquí que la energía de una distribución de corrientes libres, según está dada en (20-74), es la expresión apropiada para ser llamada la energía magnética del sistema, ya que representaba el trabajo reversible asociado con las corrientes que *sí se pueden*

controlar, y resulta posible utilizarla aun en presencia de materia. La derivación que culminó con (18-12) empezó en (18-1), que era una expresión del trabajo reversible por el agente externo y que era proporcional al cambio de flujo $d\Phi$, en el circuito. Cuando existe materia presente, las corrientes de magnetización contribuyen a este flujo debido a que producen cierta inducción, como quedó descrito, por ejemplo, en (20-15). Por lo tanto, en (20-74) **A** recibe contribuciones de *todas* las corrientes presentes. Sin embargo, es necesario notar aquí que al pasar de (18-1) a (18-2) se supuso en (18-3) que el cambio en el flujo era directamente proporcional a los cambios en las corrientes; en otras palabras, se supuso una dependencia *lineal* entre ellos. Dado que los cambios en el flujo surgen de los cambios de **B** en los circuitos rígidos que se tomaron, y dado que los cambios de las corrientes libres de geometrías libres producen cambios proporcionales de **H**, se podrá observar que lo que se hará en adelante en esta sección queda restringido a materiales para los que exista una relación lineal entre **B** y **H**. En la siguiente sección se estudia un caso no lineal.

Como antes, aquí también se desea expresar la energía en función de los campos. Si se sustituye (20-29) en (20-74) se obtiene

$$U_m = \frac{1}{2}\int_{\text{todo el espacio}} \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{H})\,d\tau \tag{20-75}$$

Se puede expresar el integrando de otra manera al utilizar (1-118) y (16-7):

$$\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} - \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{H}) \tag{20-76}$$

Comparando (20-76) con (18-16) y recordando la manera en que se pasó de (18-15) a (18-21), se observa que es posible proceder de una manera muy similar aquí, con lo que se obtiene

$$U_m = \int_{\text{todo el espacio}} \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,d\tau \tag{20-77}$$

que puede interpretarse de la manera usual al introducir la *densidad de energía magnética*

$$u_m = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \tag{20-78}$$

de modo que se puede expresar

$$U_m = \int_{\text{todo el espacio}} u_m\,d\tau \tag{20-79}$$

[Compárese con (10-81) y (10-82).] Si se utiliza (20-53), esto también puede expresarse como

$$u_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2 \tag{20-80}$$

que, desde luego, se reduce a (18-22) para el vacío, donde $\mu = \mu_0$.

En la sección 18-2 se vio que una de las aplicaciones más útiles de esta expresión de energía era para el cálculo de la autoinductancia. Si los campos ya han sido encontrados por otros medios, se puede evaluar (20-79) y, al igualar con (18-9), se puede obtener L a partir de $L = 2U_m/I^2$.

Ejemplo

Cable coaxial. Considérese el mismo sistema que se muestra en la figura 20-14, para el que ya se han encontrado **H** y **B**. Por simplicidad, únicamente se calculará la contribución a L de la región que contiene materia (región 2). La densidad de energía en esta región según se calcula de (20-78), (20-67) y (20-69) es

$$u_{m2} = \frac{1}{2} H_{\varphi 2} B_{\varphi 2} = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 \rho^2} \tag{20-81}$$

Dado que, según (1-83), $d\tau = \rho d\, \rho d\varphi dz$, la energía total contenida en una longitud l de esta región será

$$U_{m2} = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\mu I^2}{8\pi^2 \rho^2} \rho d\rho d\varphi dz = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{20-82}$$

de manera que su contribución a la autoinductancia es

$$L_2 = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{20-83}$$

Al comparar este resultado con el término central de (18-34) se puede observar que la relación entre éste y el valor en vacío es $L_2/L_{20} = \mu/\mu_0 = K_m$, en completa concordancia con (20-66) para este caso en que las corrientes libres se han mantenido constantes.

Por lo general, la presencia de materia hará que cambien los valores de **B** y **H** en todo lugar, por lo que la energía magnética dada por (20-77) deberá cambiar también. Como ya se vio para el caso eléctrico enseguida de (10-87), por lo general este cambio dependerá del procedimiento seguido para introducir la materia en el campo, y un estudio detallado de ello puede ser verdaderamente complejo. Sin embargo, existe un caso especial en el que es posible identificar directamente el cambio de energía con la materia, y se considera a continuación a manera de ilustración del punto.

Se supone que al principio existe vacío en todo el espacio y que hay una distribución de corrientes libres que producen los campos $\mathbf{H}_0$ y $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ en todo el espacio. Supóngase ahora que *se mantienen fijas las corrientes libres fuente* tanto en valor como en localización, y que se introduce un material de volumen V en este campo existente $\mathbf{B}_0$. Si se toman **B** y **H** como los nuevos valores de los campos provocados por la presencia de la materia, el *cambio* en la energía del sistema, según (20-77) será

$$U_{mm} = U_m - U_{m0} = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{B}_0) d\tau \tag{20-84}$$

y puede ser atribuido por completo a la presencia de la materia. Como se hizo ya en el ejercicio 10-38 para la fórmula eléctrica análoga (10-89), puede demostrarse que (20-84) es expresable como una integral sobre el volumen V de material únicamente. El cálculo en sí es muy largo, por lo que simplemente se da el resultado final, que es

$$U_{mm} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 d\tau \tag{20-85}$$

Dado que esto únicamente implica el volumen del material, resulta lógico considerar que la energía se localiza *en* la materia y que representa la energía *de* la materia. Por lo tanto, es posible introducir una densidad de energía, u_{mm}, asociada con la materia y dada por

$$u_{mm} = \tfrac{1}{2}\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}_0 = \tfrac{1}{2}\chi_m\mu_0\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}_0 \tag{20-86}$$

Nótese la similitud de estos resultados con los del caso electrostático (10-90) y (10-91), a excepción de la diferencia en signo. Estas expresiones resultan apropiadas para situaciones en las que la magnetización es producida por el campo, según se implica en (20-52).

Por otro lado, se debe recordar la diferencia entre estas energías y la *energía* (potencial) *de interacción* de un dipolo permanente con una inducción externa, dada por (19-40). Si se toma un pequeño volumen, $d\tau$, su momento dipolar estará dado por (20-1) y la energía de interacción será

$$du_D' = du_{m,\text{ext}}' = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}_{\text{ext}}\,d\tau \tag{20-87}$$

si se escribe la inducción externa como $\mathbf{B}_{ext}$ en lugar de $\mathbf{B}_0$ como en (19-40). La energía de interacción puede obtenerse al integrar (20-87) sobre el volumen V del material, resultando

$$U_{m,\text{ext}}' = -\int_V \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}_{\text{ext}}\,d\tau \tag{20-88}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{B}_{ext}$ no varía a través del material, se puede sacar de la integral y utilizar (20-2) para obtener $U_{m,ext}' = -\, \mathbf{m}.\mathbf{B}_{ext}$ en concordancia con (19-40).

Cuando un material se encuentra magnetizado, por lo general existirán ciertas fuerzas sobre las corrientes de magnetización debidas a la inducción. Si el material no fuera rígido, podría llegar a deformarse bajo la influencia de estas fuerzas. A este efecto se le conoce como *magnetostricción;* por lo general viene a ser un efecto muy pequeño, por lo que no se le considerará más aquí, suponiéndose que los materiales usados son completamente rígidos.

Como ya se vio en el sección 18-3, las consideraciones sobre la energía son a menudo muy útiles para el estudio de las fuerzas magnéticas. Dado que este tema general es muy complicado, la idea se ilustrará solamente con el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Barra permeable dentro de un solenoide largo. Supóngase que se tiene un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud, con una longitud total l, sección circular de área S y corriente I, tal como se muestra en la figura 20-18. Supóngase también que se mete dentro

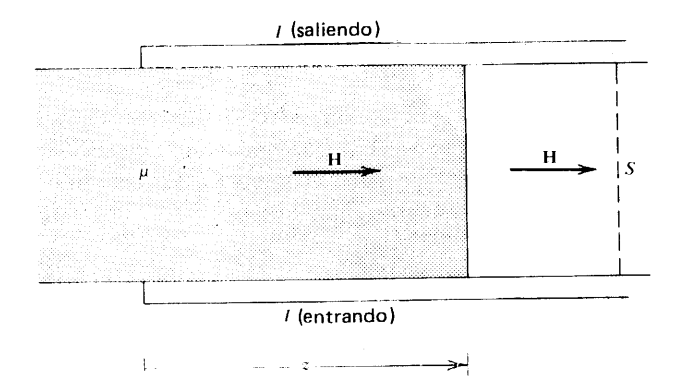


Figura 20-18 Barra permeable dentro de un solenoide largo.

del solenoide un trozo de longitud z de una barra cilíndrica de la misma sección y de permeabilidad μ. Supóngase que la corriente en el solenoide se mantiene constante en toda su longitud y que se desea obtener la fuerza ejercitada sobre la barra. Como ya se vio en relación con el ejemplo de los dos solenoides traslapados de la sección 18-3, es posible obtener una solución razonable correcta sólo si se desprecian los "efectos de borde" asociados con las líneas de campo divergentes cerca de los extremos del solenoide y de la barra, como se indicó en la figura 18-3. Dado que $|X_m| \ll 1$, el campo magnético permanecerá prácticamente sin cambio por la presencia de la barra, y en una primera aproximación se puede decir que será $\mathbf{H} = nI\hat{\mathbf{z}}$, de acuerdo con (20-63). La densidad de energía U_{m0} en el espacio no ocupado del solenoide, de longitud $l - z$ y volumen $(l - z)S$ será $u_{m0} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$, según (20-80). De manera similar, la densidad de energía u_{mM} en el volumen zS ocupado por la barra será $u_{mM} = \frac{1}{2}\mu n^2 I^2$. Al sustituir estos valores constantes en (20-79) se encuentra que la energía total de esta configuración es

$$U_m(z) = \tfrac{1}{2} n^2 I^2 S[\mu z + \mu_0(l - z)] \qquad (20\text{-}89)$$

Dado que las corrientes son constantes, se utiliza (18-39) para calcular la fuerza:

$$\mathbf{F}_m = (\nabla U_m)_I = \tfrac{1}{2}(\mu - \mu_0) n^2 I^2 S\hat{\mathbf{z}}$$

$$= \tfrac{1}{2} X_m \mu_0 n^2 I^2 S\hat{\mathbf{z}} \qquad (20\text{-}90)$$

Este resultado tiene varios aspectos muy interesantes.

Dado que todo lo demás en (20-90) es positivo, el signo de $\mathbf{F}_m$ depende del signo de X_m. Si el material es paramagnético, de modo que $X_m > 0$, la barra *es atraída* hacia adentro del solenoide, mientras que si fuera diamagnético, con susceptibilidad negativa, sería *repelida*. [Esto contrasta con el resultado análogo de la electrostática (10-97), que demostró que una placa dieléctrica sería siempre atraída hacia el interior de las placas de un capacitor; lo que esto expresa es simplemente el hecho de que todas las susceptibilidades eléctricas son positivas.] Es posible explicar el efecto de esta diferencia de signos de manera cualitativa. Si el material es paramagnético, **M** es paralela a **H**, según (20-52) y las corrientes superficiales asociadas, $\mathbf{K}_m$, estarán circulando en el mismo sentido de I, como se puede ver en la figura 20-7*b*. Por lo tanto, se tienen dos conjuntos de corrientes paralelas, produciéndose una atracción entre ellas, como se hizo notar después de (13-14), y de acuerdo con el signo obtenido de (20-90). Por otro lado, en el caso de un material diamagnético **M** tendrá una dirección opuesta a **H**, por lo que las corrientes superficiales correspondientes circularán en sentido contrario al de I, produciéndose una repulsión entre estas corrientes "opuestas".

Mientras que la fuerza $\mathbf{F}_m$ es independiente tanto de I como de z, es proporcional a la superficie de la sección S; por lo tanto, se puede introducir una fuerza por unidad de superficie, $\mathbf{f}_m$, como

$$\mathbf{f}_m = \frac{\mathbf{F}_m}{S} = \frac{1}{2}(\mu - \mu_0) n^2 I^2 \hat{\mathbf{z}} \qquad (20\text{-}91)$$

Se puede lograr una forma más sencilla de interpretar si se le expresa en función de las densidades de energía de las dos regiones, obteniéndose

$$\mathbf{f}_m = (u_{mM} - u_{m0})\hat{\mathbf{z}} \qquad (20\text{-}92)$$

En otras palabras, la magnitud de la fuerza por unidad de superficie es justamente igual a la diferencia entre las densidades de energía de las dos regiones, y su dirección es tal que tiende a mover el material de modo que *aumente* la energía total del sistema. Esto viene a

ser constante con todos los demás resultados obtenidos previamente, relacionados con la tendencia general de los sistemas a "tratar" de aumentar su energía magnética.

Más aún, (20-92) concuerda también con la idea que se expresó enseguida de (18-52) (ya que se encontró a partir de un ejemplo de tipo diferente) en el sentido de que las fuerzas por unidad de superficie pueden expresarse muy apropiadamente como presiones. En efecto, en (18-52) se encontró que es posible expresar una fuerza por unidad de superficie en la superficie de una región dada, como el producto de la densidad de energía *dentro* de esa región y la *normal anterior* de la región. En este caso, se podría así expresar un término de presión en la interfase para la región al vacío como $\mathbf{f}_{m0} = u_{m0}(-\hat{\mathbf{z}})$, mientras que el correspondiente al material sería $\mathbf{f}_{mM} = u_{mM}(+\hat{\mathbf{z}})$. Por lo tanto, la fuerza por unidad de superficie resultante en la superficie de separación entre los dos sería $\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_{m0} + \mathbf{f}_{mM} = (u_{mM} - u_{m0})\hat{\mathbf{z}}$, que no es sino (20-92) de nuevo.

20-7 Materiales ferromagnéticos

Hasta ahora sólo se han considerado en detalle materiales i.h.l , para los que es posible escribir $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, siendo μ una constante característica del material. Aunque esta relación puede describir una gran cantidad de materiales, ocurre que unos cuantos materiales de gran importancia tecnológica acusan un comportamiento marcadamente diferente; en esta sección se estudian brevemente algunas de sus principales características.

A estos materiales generalmente se les denomina *materiales ferromagnéticos* porque sus prototipos son los metales fierro, cobalto y níquel. Sin embargo, existen también muchas aleaciones y materiales no metálicos que caen en esta categoría. Aunque las propiedades específicas varían de un material a otro y deben ser valuadas experimentalmente, las características generales de ellos son muy similares, por lo que aquí sólo se estudiará esta parte. Esencialmente no existe una relación simple entre **B** y **H** para estos casos.

Otra característica encontrada con mucha frecuencia es que las propiedades magnéticas dependen de la historia previa de la muestra específica de material de que se trate. Sin embargo, siempre es posible hacer que esa muestra en particular llegue a un estado de cierta regularidad de comportamiento. Por lo general, esto puede lograrse por la inversión consecutiva y repetida de campos aplicados con magnitudes decrecientes; se supone aquí que este procedimiento ha sido llevado a cabo. (La razón para esta prescripción particular resultará evidente más adelante.)

Lo que generalmente se desea hacer es aplicar un campo **H** externo, producido por corrientes libres externas, y después medir **B** en función de **H**. Para lograrlo, resulta evidente que la muestra de material debe ser de una forma tal que permita la medición de **B** y **H**, o que permita que éstos puedan ser calculados de manera conveniente pero libre de ambigüedades. En particular, es conveniente que se pueda conocer **H** *únicamente* a partir de las corrientes externas aplicadas. Si, por ejemplo, la muestra fuera un solenoide largo con núcleo de hierro, existirían discontinuidades en los extremos, por lo que habría que preocuparse del efecto producido por la componentes normales de **M**, es decir, de la densidad de superficie de "polos." Pero como ya se vio en (20-42), éstos dependen del valor de **M**, que está conectado con la relación entre **B** y **H** por medio de $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Dado que esto complicaría enormemente el problema, sería de desearse entonces contar con una muestra sin extremos, lo que hace pensar de inmediato en un anillo o toroide. Si el toroide se ha apretado muchc al embobinarse sobre el material, puede suponerse, con buen grado de aproximación, que **H** queda confinada completamente al interior, como se vio en el último ejemplo de la sección 15-2, pudiéndose calcular a partir de la corriente libre I en las N vueltas del tiroide. A este artefacto se le denomina *anillo de Rowland.*

H puede encontrarse por medio de la forma integral de la ley de Ampere dada en (20-32). En esencia, el cálculo viene a ser idéntico al que llevó a (15-28) y que se ilustró en la figura 15-12. Para una trayectoria de radio ρ, $d\mathbf{s} = \rho d\varphi\hat{\varphi}$ y (20-32) queda

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = \int H_\varphi(\rho)\rho\, d\varphi = 2\pi\rho H_\varphi(\rho) = I_{f,\text{enc}} = NI \tag{20-93}$$

de manera que

$$H_\varphi(\rho) = \frac{NI}{2\pi\rho} \tag{20-94}$$

Sea a el radio de la sección circular del anillo y b el radio central del tiroide, supóngase que $b \gg a$. En este caso, $H\varphi(\rho)$ será aproximadamente constante e igual a

$$H = \frac{NI}{2\pi b} \tag{20-95}$$

Así, tanto M como B serán también aproximadamente constantes en toda la sección de áreas $S = \pi a^2$, por lo que el flujo a través de S será

$$\Phi = SB \tag{20-96}$$

La medición puede hacerse de la siguiente manera: la cantidad externa sujeta a control, I, se modifica por una cantidad muy pequeña y, según (20-95), el campo magnético variará en $\Delta H = N\,\Delta I/2\pi b$, pudiendo calculársele a partir de las propiedades conocidas del toroide. Existirán cambios correspondientes en la inducción, ΔB, y en el flujo, $\Delta\Phi = S\Delta B$. La última cantidad puede medirse enrollando otra bobina sobre el toroide y midiendo la carga total, ΔQ_c, que pasa a través de ella como resultado de la corriente inducida. Si R_c es la resistencia de este circuito, de (12-2) y (17-3) se obtiene la magnitud de ΔQ_c como

$$\Delta Q_c = \int i_{c\,\text{inadecuada}}\, dt = \int \frac{|\mathcal{E}_{\text{ind}}|dt}{R_c} = \frac{1}{R_c}\int \frac{d\Phi}{dt}\,dt = \frac{\Delta\Phi}{R_c}$$

que concuerda con el resultado del ejercicio 17-6 y conduce a $\Delta B = R_c\Delta Q_c/S$, haciendo así posible calcular ΔB. De esta manera, se puede ya obtener la curva que se describe la inducción B en función de H como resultado de una serie de pequeñas variaciones.

Cuando se lleva a cabo el procedimiento de esta índole con un H monotónicamente creciente, el resultado viene a ser una curva de B contra H de apariencia parecida a la que se muestra en la figura 20-19. A una curva como ésta se le denomina *curva de magnetización;* el nombre se suele dar también a una curva de M contra H, que contiene sustancialmente las misma información. Se puede observar que la relación mostrada no tiene *nada de lineal.* De hecho, a medida que $H \to \infty$, M alcanzará un valor constante M_s denominado *magnetización de saturación,* ya que los dipolos se habrán alineado completamente. Para ese caso se tiene la relación $B = \mu_0(H + M) \to \mu_0 H + \mu_0 M_s = \mu_0 H +$ const. y la curva B-H se vuelve lineal con una pendiente constante μ_0. Para muchos materiales los valores de H que se requieren para llegar a este punto son imprácticamente grandes.

Aunque cuando (20-53) se definió $\mu = B/H$ se estaban considerando únicamente sistemas lineales, se puede estirar la aplicabilidad de la definición a este caso si se continúa

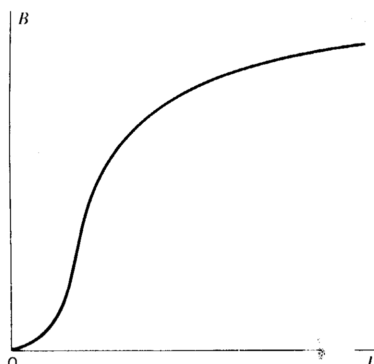


Figura 20-19 Curva B contra H para un material ferromagnético.

utilizando esta misma ecuación. Cuando se evalúa μ a partir de una curva como la de la figura 20-19, el resultado viene a ser como el mostrado en la figura 20-20. El máximo suele ser de magnitud igual a varios miles, aunque puede variar fuertemente de un material a otro; la relación μ/μ_0 se aproxima también al valor límite de la unidad a medida que H se vuelve muy grande. Por lo tanto, si se define μ de esta manera, resulta estar muy lejos de ser constante pero aún así es muy útil y conveniente para describir un material dado. (Puede notarse aquí que muchos de los materiales ferromagnéticos son cristalinos, y se encuentra que las curvas de magnetización son, por lo general, diferentes según las diversas direcciones en que se aplique H.)

Supóngase ahora que, en lugar de hacer que H aumente indefinidamente como se hizo en el caso de la figura 20-19, se llega únicamente hasta el valor máximo H_1 (y su correspondiente B_1) que se muestra en la figura 20-21, y después se hace disminuir. Lo que normalmente se encuentra es que, como se indica por la dirección de la flechas, la curva *no* recorre el mismo camino en reversa, y que B no decrece tan rápidamente como aumentó a la ida. A este comportamiento general se le denomina *histéresis* (del griego "llegar tarde" o "quedar corto"). Por lo tanto, puede observarse que la relación entre B y H no solamente no es lineal, sino que *tampoco es univaluada.* Si se sigue disminuyendo H hasta que $H = 0$, se encuentra que $B \neq 0$, como se indica. A este valor B_r que queda se le llama *inducción remanente, remanencia* o *retentividad.* De hecho, para poder reducir B a cero se hace necesario aplicar el campo H en dirección contraria, de modo que $B = 0$ cuando $H = -H_c$. A este valor H_c se le suele llamar *fuerza coercitiva* o *coercitividad.* Si se continúa este procedimiento decreciente de H hasta el punto $-H_1$ y después se cambia la dirección del campo para hacerlo aumentar de nuevo hasta $+H_1$, la curva B contra H resulta ser una curva cerrada conocida como *la curva o ciclo de histéresis.*

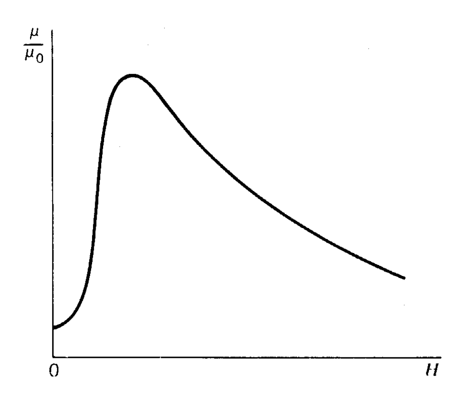


Figura 20-20 Permeabilidad relativa contra H para un material ferromagnético.

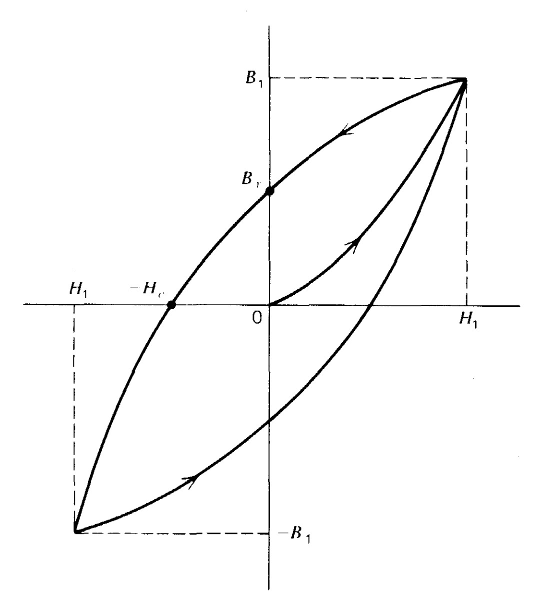


Figura 20-21 Curva de histéresis.

Si se hubiera seguido hasta el valor $H_2 > H_1$ antes de comenzar a disminuirlo, se hubiera obtenido una curva de histéresis diferente, como se muestra en la figura 20-22, con inducción remanente y fuerza coercitiva diferente; algo similar ocurriría para un valor máximo H_3. En otras palabras, todo el espacio *B-H* puede llenarse con curvas de histéresis y un valor numérico dado de μ no tendrá sentido a menos que se especifiquen más las condiciones correspondientes. Puede observarse que las puntas de estas curvas de histéresis trazan la curva de magnetización monotónica de la figura 20-19; se puede ver también por qué era necesario prescribir campos alternos de magnitud gradualmente decreciente para hacer que la muestra llegara a un estado inicial para el cual $B = 0$ cuando $H = 0$. Por último, se puede también observar que si estando a un valor dado como H_4 se realiza un *pequeño* ciclo en H iniciándolo ahí, se podrá trazar una pequeña curva de histéresis como la que se ilustra en la figura.

En sistemas en los que existe histéresis hay también una conversión irresistible de energía en calor cuando el sistema es llevado a lo largo de un ciclo completo. En este caso, debe corresponder a una conversión de energía magnética en calor; este calor es adicional al calor producido por la existencia de una conductividad, según se describió en (12-35). Como se hizo notar al principio de la sección anterior, todos los resultados obtenidos hasta aquí en relación con la energía están basados en la suposición de que se trataba de sistemas lineales; dado que es obvio que ése no es el caso aquí, es necesario volver a comenzar para poder demostrar este efecto. La ecuación (18-1) que da el trabajo requerido de una fuente externa para producir un pequeño cambio en el flujo sigue siendo correcta, ya que se basó únicamente en una aplicación general de la ley de Faraday. Si se expresan los cambios en la energía magnética y en el flujo como δU_m y $\delta\Phi$, por conveniencia, de (18-2) y (16-23) se obtiene que

$$\delta U_m = \sum_j i_j \delta \Phi_j = \sum_j i_j \oint_{C_j} \delta \mathbf{A}_j \cdot d\mathbf{s}_j \tag{20-97}$$

siendo $\delta \mathbf{A}_j$ el cambio correspondiente del potencial vectorial en la parte j del sistema. Se puede ahora volver a expresar la suma en función de la densidad de corriente siguiendo

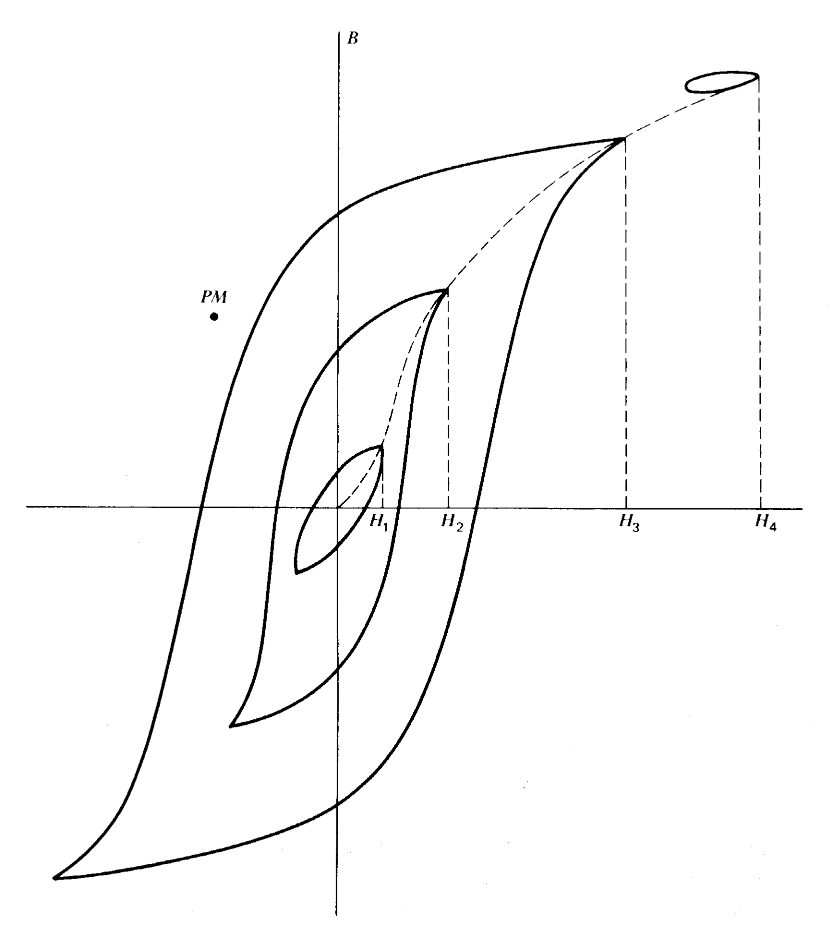


Figura 20-22 Diversas curvas de histéresis posibles. *PM* indica el estado general de un imán permanente.

exactamente el mismo procedimiento que se utilizó para ir de (18-10) a (18-11), obteniéndose

$$\delta U_m = \int_V \mathbf{J}_f \cdot \delta \mathbf{A}\, d\tau = \int_V (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \delta \mathbf{A}\, d\tau \tag{20-98}$$

por medio de (20-29). Pero $\Delta \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, según (16-7), de modo que $\Delta \times (\mathbf{A} + \delta\, \mathbf{A}) = \mathbf{B} + \delta\, \mathbf{B}$ y, por lo tanto, según (1-119), $\nabla \mathrm{X} \delta \mathbf{A} = \delta \mathbf{B}$. Si se transforma ahora el integrando de (20-98) por medio de (20-76) y de este último resultado, y se procede después de la misma manera en que se hizo para ir de (20-75) a (20-77), se obtiene

$$\delta U_m = \int_V \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}\, d\tau \tag{20-99}$$

como un resultado completamente *general* para el incremento de la energía en función de los vectores de campo. Puede observarse que para un sistema lineal, en el que $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, siendo μ constante, se tiene $\delta\, \mathbf{B} = \mu \delta \mathbf{H}$, de modo que el integrando viene a ser $\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H} = \delta(\frac{1}{2}\mu \mathbf{H}^2) = \delta(\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})$. Esto es equivalente a (20-80) y resultará (20-77) cuando se suman

todos los incrementos δU_m para obtener la energía total. Sin embargo, en el caso más general no puede realizarse esta suma hasta conocer la relación entre **B** y **H**. Si no resulta posible escribir esta relación en una forma matemática relativamente simple, pero se logra obtener gráficamente por medio de una curva de magnetización, quizá únicamente se puedan sumar estos δU_m por medio de métodos numéricos.

Si δw_m es la energía requerida de una fuente externa *por unidad de volumen* de material, se puede expresar el integrando de (20-99) como $\delta w_m d\tau$, con lo que se tiene que

$$\delta w_m = \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B} \tag{20-100}$$

Esto viene a ser igual al área sombreada de la figura 20-23, ya que únicamente se están manejando materiales isotrópicos, en los que **B** y **H** son paralelos. Si ahora se imagina un ciclo completo del sistema a lo largo de la curva de histéresis, el trabajo realizado por unidad de volumen será la suma de términos como (20-100):

$$w_m = \oint_{\text{ciclo}} \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B} = \oint_{\text{ciclo}} H\delta B \tag{20-101}$$

Esto es numéricamente igual al *área encerrada* por la curva de histéresis, de manera que w_m es positiva y diferente de cero. Dado que los estados inicial y final del sistema son los mismos, la energía magnética, que es función únicamente del estado, no habrá cambiado y, por lo tanto, el trabajo por unidad de volumen dado en (20-101) debe representar una conversión irreversible de trabajo en calor. Este resultado puede también escribirse de una forma tal que únicamente incluya el material. Dado que según (20-28) **B** siempre es igual a $\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})$, se tiene que

$$\delta w_m = \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B} = \mu_0\delta\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{H}^2\right) + \mu_0\mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{M} \tag{20-102}$$

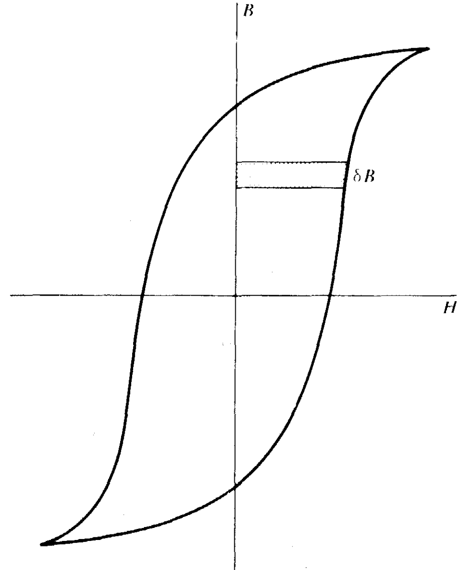


Figura 20-23 Interpretación de $H\delta B$ como una superficie.

Cuando se sustituye esto en (20-101), el primer término dará cero, como ya se vio, por ejemplo, después de (13-4), de modo que por último

$$w_m = \oint_{\text{ciclo}} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{M} \tag{20-103}$$

El último término de (20-102), $\mu_0 \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{M}$, representa el trabajo proporcionado a una unidad de volumen del material y es el punto de partida para la descripción de los sistemas magnéticos en la termodinámica.

20-8 Circuitos magnéticos

Si se expresan algunos resultados obtenidos en la última sección de una manera algo distinta, se obtendrá algo que es realmente útil y sugestivo. Se seguirá escribiendo $B = \mu H$ con el valor de μ que sea apropiado; así, de (20-93), (20-95) y (20-96) se obtenie

$$\Phi = \frac{\mu S N I}{2\pi b} = \frac{NI}{(l/\mu S)} = \frac{NI}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \tag{20-104}$$

siendo $l = 2\pi b$ la longitud de la trayectoria C sobre el toroide, y

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \tag{20-105}$$

Recuérdese aquí el resultado del ejercicio 12-14 en el que, por medio de consideraciones energéticas, se pudo demostrar que un circuito completo de resistencia total R que contiene una fem $\mathcal{E}$, el valor estacionario de la corriente es

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{20-106}$$

donde $R = l/\sigma A$ según (12-28), siendo A el área de la sección del conductor de conductividad σ. Al comparar estas expresiones se puede observar una semejanza y, *por analogía,* estos sistemas reciben el nombre de *circuitos magnéticos.* También por analogía se cuenta con una terminología correspondiente; se define una *fuerza magnetomotriz* o *fmm,* como

$$\mathcal{M} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = NI \tag{20-107}$$

y a $\mathcal{R}$ se le denomina *reluctancia.* Así, (20-104) puede expresarse como

$$\Phi = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}} \tag{20-108}$$

de modo que se asemeja a (20-106). Puede observarse también en (20-105) que la permeabilidad μ desempeña la misma función al determinar la reluctancia que la que desempeñaba a la conductividad σ para la resistencia.

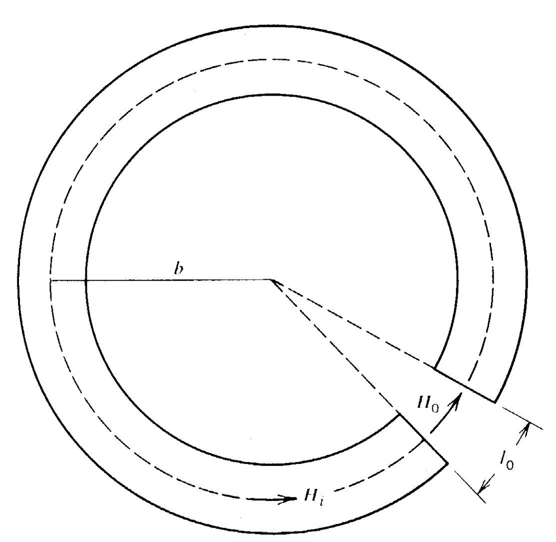


Figura 20-24 Imán toroidal con una abertura de longitud l_0.

La correspondencia entre estos dos casos no es exacta. En el circuito eléctrico, las cargas en movimiento que forman la corriente no salen del conductor, mientras que en un circuito magnético general es muy posible que las líneas de **B** puedan encontrarse en el espacio exterior al material. Esta "pérdida" de flujo puede originar grandes errores cuantitativos en la aplicación de (20-108). Aun así, resulta útil este método de estudio de los circuitos magnéticos, específicamente como una ayuda para entender las características generales de la situación.

El principal uso que se le puede dar a estas ideas es en el diseño y construcción de imanes. Estos pueden ser principalmente de dos clases generales: *electroimanes,* en los que el campo magnético es producido por medio de una corriente en la bobina, e *imanes permanentes,* en los que se utilizan materiales ferromagnéticos que pueden tener presente una inducción aun en ausencia de corrientes libres. Se estudian aquí cada uno de ellos, aunque por simplicidad sólo se consideran aquéllos de forma toroidal.

Dado que por lo general estos imanes se fabrican para producir un campo magnético con fines experimentales, se requiere de un espacio para poder colocar la muestra que se ha de estudiar. Lo más natural es cortar un pedazo del material del imán, formando una abertura de longitud l_0 como la que se muestra en la figura 20-24. Se supone que la longitud de la abertura es pequeña; esto es necesario para poder despreciar las propiedades de borde de **B** que se estudiaron en el ejercicio 15-11 y que se ilustraron para el campo eléctrico en la figura 6-10. Se puede así suponer que todas las líneas de **B** presentes en el material también se encuentran en la abertura, de modo que, según (20-96), se puede suponer que Φ es constante, por lo que no hace falta preocuparse de un posible cambio en la sección efectiva S.

Ejemplo

Electroimán. Si H_i es el campo magnético en el material de longitud $l - l_0$, donde $l = 2\pi b$ como antes, y H_0 es el valor en la abertura de longitud l_0, se encuentra que la fmm de (20-107) resulta

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = H_i(l - l_0) + H_0 l_0 = NI \tag{20-109}$$

Supóngase que las superficies que forman la abertura están cortadas de manera tal que son perpendiculares a **B**. Dado que las componentes normales de **B** son continuas, se tiene que $B_i = B_0 = \phi / S$; más aún, $H_i = B_i/\mu$, mientras que $H_0 = B_0/\mu_0$. Por lo tanto, (20-109) puede expresarse en función de Φ y de NI como

$$\Phi\left[\frac{(l-l_0)}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S}\right] = NI \qquad (20\text{-}110)$$

que otra vez tiene la forma (20-104), siendo la reluctancia total de circuito ahora

$$\mathcal{R} = \frac{(l-l_0)}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S} = \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_0 \qquad (20\text{-}111)$$

En otras palabras, estas reluctancias se pueden sumar, justo como se suman las resistencias en serie. Se puede ver también que es posible generalizar la idea de reluctancia a un circuito de propiedades variantes, de manera que se tendría

$$\mathcal{R} = \oint_C \frac{ds}{\mu S} \qquad (20\text{-}112)$$

Si la abertura es pequeña ($l_0 \ll l$), entonces (20-111) puede aproximarse a

$$\mathcal{R} \simeq \frac{l}{\mu S} + \frac{l_0}{\mu_0 S} \qquad (20\text{-}113)$$

Más aún, si el material es algo como el fierro, cuya $\mu \approx 5000\mu_0$, muy a menudo resulta posible despreciar el primer término y volver a aproximar $\mathcal{R}$ para obtener

$$\mathcal{R} \simeq \frac{l_0}{\mu_0 S} \qquad (20\text{-}114)$$

de modo que la aproximación correspondiente para (20-110) sería

$$\Phi \simeq NI \frac{S\mu_0}{l_0} \qquad (20\text{-}115)$$

Esta última aproximación no siempre es válida, ya que depende tanto del valor de μ como de los valores relativos de i y l_0; se hace realmente necesario verificar su validez antes de utilizarla en un caso específico. Sin embargo, en cualquiera de los casos (20-114) viene a demostrar que la mayor parte de la reluctancia se debe al vacío (o aire) en la abertura, es decir, que el fierro es más "permeable". También, dado que $B_i = B_0$, $H_i/H_0 = \mu_0/\mu$, de manera que $H_i \ll H_0$, es claro que (20-109) se vuelve $\mathcal{M} = NI \approx H_0 l_0$, lo que demuestra que, esencialmente, toda la fuerza magnetomotriz que produce el flujo se aplica "a través" de la abertura, aun cuando ésta sea físicamente muy pequeña.

Ejemplo

Imán permanente. En este caso $I = 0$. La expresión (20-109) sigue siendo válida, por lo que se encuentra que

$$H_i = -\frac{l_0 H_0}{(l - l_0)} \simeq -H_0 \frac{l_0}{l} \tag{20-116}$$

Lo que demuestra que los campos magnéticos en las dos regiones están en direcciones opuestas. En la abertura, $\mathbf{M} = 0$ y $H_0 = B_0/\mu_0$, de manera que ahí **H** y **B** se encuentran en la misma dirección, pero como $B_i = B_0$, Hi y B_i se encuentran en direcciones opuestas dentro del imán. Así, se puede representar a un imán permanente como un punto en el segundo cuadrante de una curva *B-H*, tal como el punto marcado como *PM* en la figura 20-22.

Además, $B_i = B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 (H_i + M_i)$, con lo que se tiene que

$$M_i = \frac{B_i l}{\mu_0 (l - l_0)} \simeq \frac{B_i}{\mu_0}\left(1 + \frac{l_0}{l}\right) \tag{20-117}$$

que está en la misma dirección que B_i, como era de esperarse. El cambio en el signo de **H**, que ocurre en la superficie que separa al material del vacío, resulta de la dicontinuidad de **M** en esa superficie, es decir, surge de la densidad superficial de "polos" descrita en (20-42) y (20-43). Dado que $\mathbf{M}_i$ y $\mathbf{H}_i$ se encuentran en direcciones opuestas dentro del material, a $\mathbf{H}_i$ a veces se le llama campo "desmagnetizador".

Ejercicios

20-1 Como se verá en el apéndice *B*, los momentos dipolares magnéticos permanentes de las moléculas son de una magnitud típica parecida a la del magnetón de Bohr, $\mu_e = eh/4\pi m_e = 9.27 \times 10^{-24}$ ampere-(metro)^2, siendo h la constante de Planck y m_e la masa del electrón. Supóngase que cada una de las moléculas de una gas ideal tuviera un momento permanente μ_e. Encontrar la magnetización máxima posible para este gas a 100°C y a una atmósfera de presión.

20-2 Una gran hoja de material, de grueso d, tiene sus caras paralelas entre sí y perpendiculares al eje z. Se le magnetiza de tal manera que $\mathbf{M} = M(1 + \alpha z)\mathbf{z}$, siendo M y α constantes positivas. Dibujar las líneas de **M**. Encontrar $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$. Repetir esto mismo para el caso en que **M** esté dada por $M(1 + \alpha x)\hat{\mathbf{z}}$.

20-3 Un cubo de lado a se encuentra situado y orientado como se indica en la figura 1-41. El material en el interior del cubo posee una magnetización dada por $\mathbf{M} = -(M/a)y\hat{\mathbf{x}} + (M/a)x\hat{\mathbf{y}}$, siendo $M =$ const. Encontrar las densidades de corriente $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$ y dibujar sus direcciones.

20-4 Un cilindro de longitud l y sección circular de radio a tiene su eje a lo largo del eje z. Se le magnetiza de manera tal que $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{x}}$, siendo $M =$ const. Encontrar $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$ y dibujar sus direcciones.

20-5 Una esfera de radio a tiene su centro en el origen. Su magnetización no es uniforme y está dada por $\mathbf{M} = (\alpha z^2 + \beta)\hat{\mathbf{z}}$, siendo α y β constantes. ¿Cuáles son las unidades de α y β? Encontrar las densidades de corriente de magnetización $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$ expresándolas en coordenadas esféricas.

20-6 Verificar que las magnitudes y direcciones dadas para B_z en (20-22) y (20-25) sean también válidas para valores negativos de z y que, por lo tanto, estén de acuerdo con la figura 20-11.

20-7 Un cilindro de longitud l y sección circular de radio a tiene su eje a lo largo de eje z y el origen en su centro. Posee una magnetización uniforme $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$. Encontrar **B** y **H**

para todos los puntos sobre el eje z. Utilizar después estos resultados y comentar el caso límite de un disco muy delgado, es decir donde $l \ll a$. Encontrar **B** en el exterior en un punto $z \gg l$. Encontrar **B** y **H** en el interior del disco.

20-8 Un cilindro infinitamente largo de radio a tiene su eje a lo largo del eje z. Su magnetización está dada en coordenadas cilíndricas por $\mathbf{M} = M_0(\rho/a)^2\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ siendo M_0 = const. Encontrar $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$. Verificar que la carga total transferida es igual a cero. Encontrar los valores de **B** y de **H** en todo el espacio, tanto en el interior como en el exterior del cilindro.

20-9 Una esfera de radio a tiene su centro en el origen. Es magnetizada de tal forma que, en coordenadas esféricas, $\mathbf{M} = M(r)\hat{\mathbf{r}}$ y $M(0)$ es finita. Encontrar $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$. Si no existen corrientes libres en ningún lugar, encontrar **B** en el interior de la esfera. Encontrar **H** en el interior de la esfera. Encontrar **H** en la superficie de la esfera y justamente fuera de ella.

20-10 Para poder utilizar (20-33), es necesario poder medir **B**. Si se desea lograrlo por medio de una carga puntual en movimiento y (14-30), no es suficiente contar con un medición de la fuerza para poder determinar **B**. Demostrar que, si se realizan dos condiciones utilizando velocidades mutuamente perpendiculares, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y se encuentra que las fuerzas son $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, respectivamente, entonces se puede calcular **B** a partir de

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2qv_1^2v_2^2}\{v_2^2\mathbf{F}_1\times\mathbf{v}_1 + v_1^2\mathbf{F}_2\times\mathbf{v}_2 + [\mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{F}_2\times\mathbf{v}_2)]\mathbf{v}_1 + [\mathbf{v}_2\cdot(\mathbf{F}_1\times\mathbf{v}_1)]\mathbf{v}_2\}$$

20-11 Dado que no existen los polos magnéticos, sería de esperarse que la intensidad polar total (carga magnética neta) de un trozo finito de material magnetizado fuese igual a cero. Demostrar que así es.

20-12 Demostrar que el momento dipolar total de un sistema, dado por (20-2) puede expresarse en función de los polos como

$$\mathbf{m} = \int_V \rho_m \mathbf{r}\, d\tau + \oint_S \sigma_m \mathbf{r}\, da$$

y comparar con (8-22), por ejemplo. [Clave: recordar (19-8) y (19-11).]

20-13 Una hoja muy grande de material, de grueso d tiene caras paralelas entre sí perpendiculares al eje z. Se encuentra uniformemente magnetizada con $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$. Encontrar la distribución de polos correspondiente, y utilizar este resultado para encontrar **H** en todo el espacio. ¿Cuál es el factor desmagnetizador en este caso? ¿Es compatible este resultado con los que corresponden a la última oración del ejercicio 20-7?

20-14 Encontrar la distribución de polos para el cilindro del ejercicio 20-4. Encontrar ϕ_m en todo el espacio. Demostrar que el factor desmagnetizador es $\frac{1}{2}$ en este caso.

20-15 Un cascarón de radios a y b se encuentra uniformemente magnetizado, de modo que $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ para $a \leq r \leq b$. Si el origen está en el centro de la esfera, encontrar ϕ_m en todos los puntos sobre el eje z positivo. Encontrar H_z para los valores positivos de z y dibujar su comportamiento como una función de z. Verificar que H_z satisface las condiciones de frontera apropiadas.

20-16 Considérese un cilindro de longitud l y sección circular de radio a, con una magnetización permanente **M**. También se encuentra presente una inducción externa uniforme, **B**. Suponer que **M** no se afecta por la presencia de **B** y encontrar el momento total sobre el cilindro. Utilizar el resultado del ejercicio 20-12 para expresar el momento en función de la distribución de polos, y demostrar que se puede interpretar el resultado diciendo que

existe una fuerza sobre un "polo puntual" q_m dada por $q_m \mathbf{B}$. Si existe vacío en todas las demás partes, demostrar que la **B** debida a otro polo puntual q_m' estará dada por $\mathbf{B} = \mu_0 q_m' \hat{\mathbf{R}}/4\pi R^2$ y deducir así la ley de Coulomb para los polos en la forma $\mathbf{F}q_m' \rightarrow q_m = \mu_0 q_m q_m, \mathbf{R}/4\pi R^2$.

20-17 Cuando se buscan las susceptibilidades en algunas tablas, por lo general no se encuentran valores numéricos para χ_m. En vez de eso, normalmente se encuentra la *susceptibilidad de masa* χm, *masa* o la *susceptibilidad molar* $\chi m.molar$. Estas se definen de modo tal que $\chi_{m,masa} H$ y $\chi_{m,molar} H$ sean el momento magnético por unidad de masa y por mol, respectivamente. Encontrar cómo está relacionada χ_m con cada una de ellas; será necesario utilizar también los símbolos para la densidad de masa, d, para el peso molecular, A.

20-18 Supóngase que se tiene una situación estática que incluye un material i.h.l. de conductividad σ Demostrar que entonces cada una de las componentes de **H** satisfacen la ecuación de Laplace, por ejemplo, $\nabla^2 H_x = 0$.

20-19 Las líneas de **B** pueden "refractarse" en una superficie de discontinuidad. Supóngase que no hay corrientes superficiales libres sobre la frontera y que los ángulos que dan las direcciones de **B** se miden a partir de la normal, como en el caso análogo eléctrico que se muestra en la figura 10-14. *a*) Demostrar que la ley de la refracción es $K_{m1} \cot\theta' = K_{m2} \cot \theta_2$. *b*) Si $|\chi_m| \ll 1$ para ambos medios, entonces $M_1 \simeq M_2 \simeq M_0$ y el ángulo de desviación $\delta = \theta_2 - \theta'$ será muy pequeño. Encontrar una expresión aproximada de δ. Evaluar este resultado para $\theta_1 = 45^\circ$, estando la región 1 al vacío y la región 2 ocupada por un material paramagnético de $\chi_{m2} = 2.2 \times 10$ (es decir, aluminio). *c*) Si $|\chi_m|$ no es muy pequeño, el resultado de *a*) debe utilizarse. Como ejemplos extremos, evaluar δ para $\theta_1 = 45^\circ$, estando la región 1 al vacío y: (i) $\chi_{m2} = -0.95$, es decir, un material casi "idealmente diamagnético" (Nota: si $\chi_m = -1$, entonces $\mathbf{B} = 0$); (ii) $\chi_{m2} = 500$, es decir, un material moderadamente ferromagnético.

20-20 Encontrar las expresiones análogas a (20-59) y (20-60) cuando el material es homogéneo, y así demostrar que puede existir una densidad de corriente de magnetización aun en ausencia de una densidad de corriente libre. De manera similar, encontrar una expresión para la densidad volumétrica de polos magnéticos en esta situación.

20-21 Una esfera de radio a y permeabilidad relativa km se coloca en un campo magnético previamente uniforme, $\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{\mathbf{z}}$. Encontrar **H** en todo el espacio.

20-22 Un cascarón esférico de radios a y b posee una permeabilidad relativa Km para $a \leqslant r \leqslant b$. Existe vacío en todo el resto del espacio. Se le coloca en un campo magnético previamente uniforme, $\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{\mathbf{z}}$. Demostrar que el "factor de blindaje", es decir, la relación H_i/H_0, donde H_i es el campo magnético en la cavidad, está dado por

$$9\kappa_m[(\kappa_m+2)(2\kappa_m+1)-2(\kappa_m-1)^2(a/b)^3]^{-1}.$$

20-23 Una corriente recta muy larga, I, es paralela a la superficie plana de un material i.h.l. semi infinito y se encuentra a una distancia d de él. Demostrar que el campo magnético en la región al vacío puede obtenerse como el resultante de esta corriente y una corriente imagen $I' = I(Km - 1)/(Km + 1)$ situada a una distancia d en el interior del material. Encontrar la corriente I'' que dará el valor correcto de **H** en el interior del material si se encuentra situada en la misma posición que I. ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud entre I y el material? ¿Es ésta una fuerza de atracción o de repulsión?

20-24 En la discusión de cable axial se supuso que el conductor interno (región 1) era no magnético. Supóngase que en realidad se trata de un material diamagnético de susceptibilidad $\chi md < 0$, mientras que todo lo demás permanece sin cambios. Encontrar **H**, **B**, **M**, y $\mathbf{J}_m$ para todos los puntos de la región 1 y graficar los resultados. Verificar que las condiciones de frontera apropiadas se satisfacen en $\rho = a$.

20-25 Considérese el mismo cable axial que se estudió al final de la sección 20-5, excepto que la región 2 entre los conductores se encuentra llena de un material no homogéneo tal que $Km = K(\rho/a)$, siendo $K =$ const. Encontrar **H** y **B** dentro de esta región y la contribución, L_2 de una longitud l de esta región a la autoinductancia.

20-26 *Considérese el mismo cable axial que se estudió al final de la sección 20-5, excepto* que la región 2 entre los conductores se encuentra llena con dos materiales i.h.l. como sigue. Para $a < \rho < c$. la permeabilidad relativa es Km_1, mientras que para $c < \rho < b$ es Km_2. Encontrar la contribución, L_2 de una longitud l de esta región a la autoinductancia.

20-27 Un líquido paramagnético de densidad de masa d se encuentra contenido en un tubo en U de sección circular de radio a. Cuando se aplica un campo H_0 a uno de los brazos del tubo en U, el nivel del líquido se eleva una distancia h en la región donde $H_0 \neq 0$. Suponer que $\chi m \ll 1$, despreciar todo efecto de borde y encontrar una expresión de la cual se puede calcular la susceptibilidad.

20-28 Un cable muy largo lleva corriente I. Otro cable largo de permeabilidad relativa Km y sección circular de radio a se encuentra paralelo al primero y a una distancia b del mismo, siendo $b \gg a$. Demostrar que existirá una fuerza de atracción por unidad de longitud entre ambos cables dada aproximadamente por $(K_m - 1)\mu_0 a^2 I^2/2(K_m + 1)\pi b^3$.

20-29 Un electroimán fabricado en forma toroidal tiene una sección rectangular. El ancho de la sección es de 2 centímetros, mientras que los radios interior y exterior de 7 y 8 centímetros, respectivamente. La bobina tiene 1000 vueltas y la abertura tiene una longitud de 0.25 milímetros. Cuando el flujo producido en el anillo es de 2.60×10^{-4} webers, la permeabilidad del núcleo es de $4250\mu_0$. Encontrar la inducción, reluctancia, corriente en las vueltas, campo magnético en la abertura y el núcleo de hierro, y fracción de la fuerza magnetomotriz que se encuentra "a través" de la abertura.

20-30 Demostrar que la energía almacenada en un circuito magnético toroidal puede expresarse en la forma $\frac{1}{2} \mathcal{R} \Phi^2$.

20-31 Encontrar la expresión para la fuerza de atracción sobre una de las caras que forman la abertura en un electroimán y que está dirigida hacia la otra. Evaluar esta fuerza para el caso descrito numéricamente en el ejercicio 20-29 y expresar entonces la fuerza por unidad de área en atmósferas.

Capítulo

21
Ecuaciones de Maxwell

Desde que se hizo el último resumen al principio del capítulo 17, se ha añadido la ley de Faraday y se ha definido el vector **H** como resultado de haber incluido los efectos magnéticos de la materia. Por lo tanto, todos los resultados obtenidos hasta aquí se pueden resumir en las siguientes ecuaciones:

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho_f \qquad \nabla\cdot\mathbf{B}=0$$
$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}_f \tag{21-1}$$

según (10-41), (16-3), (17-30) y (20-29). Estos vectores de campo se relacionan entre sí y con la materia por medio de (10-40) y (20-28): $\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ y $\mathbf{H}=(\mathbf{B}/\mu_0)-\mathbf{M}$. Además, se cuenta con la ecuación de continuidad (12-19) que describe la conservación de la carga libre:

$$\nabla\cdot\mathbf{J}_f+\frac{\partial\rho_f}{\partial t}=0 \tag{21-2}$$

Como ya se hizo notar con anterioridad, se ha supuesto que estas ecuaciones siguen siendo válidas cuando los campos varían en el tiempo aun cuando, a excepción de la ley de Faraday, fueron obtenidas a partir de leyes de acción a distancia, que describen situaciones independientes del tiempo.

Una de las grandes contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética consistió, primero, en señalar que dos de las ecuaciones de (21-1) son incompatibles con la conservación de la carga según se enuncia en (21-2), y después, demostrar que esta situación puede resolverse por medio de la introducción de una "corriente" más.

21-1 Corriente de desplazamiento

Como se enuncia en (1-49), la divergencia del rotacional de cualquier vector es siempre igual a cero. Si se calcula la divergencia del rotacional de **H** según se expresa en (21-1) y se utiliza (21-2), se obtiene

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \tag{21-3}$$

Dado que por lo general se debe esperar que $(\partial \rho_f / \partial t) \neq 0$, se observa una contradicción fundamental entre (21-3) y el requisito de (1-49).

Para remediar esta situación, Maxwell supuso que de hecho, la ecuación para $\nabla \times \mathbf{H}$ todavía no estaba completa, sino que le faltaba otra "densidad de corriente", es decir, supuso que dicha ecuación en realidad debe ser de la forma

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_d \tag{21-4}$$

siendo $\mathbf{J}_d$ el término adicional que hacía falta. El objetivo es, pues, encontrar $\mathbf{J}_d$.

Al sustituir (21-4) en (1-49) y utilizar (21-2) y $\Delta\, \mathbf{D} = \rho_f$, se obtiene

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J}_f + \nabla \cdot \mathbf{J}_d = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{J}_d$$

de manera que

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J}_d - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \tag{21-5}$$

ya que se puede intercambiar el orden de la derivación parcial. Por lo tanto, sin importar lo que $\mathbf{J}_d$ pueda ser, se sabe que debe satisfacer (21-5). Desde luego, la suposición más simple es que el término entre paréntesis es igual a cero; de acuerdo con ello, Maxwell supuso que

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{21-6}$$

de modo que (21-4) puede también expresarse como

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{21-7}$$

siendo así completamente consistente con (21-2). Nótese también que (21-5) se puede satisfacer en general si se escribe $\mathbf{J}_d = (\partial \mathbf{D}/\partial t) + \nabla \times \mathbf{G}$, donde $\mathbf{G}$ es algún vector arbitrario; sin embargo, todavía no se ha encontrado que sea necesario hacerlo así, por lo que sólo complicaría las cosas innecesariamente manejar este término extra.

A esta nueva densidad de corriente, $\mathbf{J}_d$, Maxwell le dio el nombre de *corriente de desplazamiento*. Este concepto tiene grandes consecuencias y resulta necesario más adelante para hacer que los resultados que se obtendrán estén de acuerdo con la experimentación y, como se verá en el capítulo 24, también resulta esencial para la existencia de las ondas electromagnéticas.

Ahora que se ha modificado la forma de $\Delta \times \mathbf{H}$, se hace necesario investigar cómo se afectan algunos de los resultados que dependen de ella. En primer lugar, la forma integral de la ley de Ampere para $\mathbf{H}$ se obtuvo al combinar (21-7) con el teorema de Stokes (1-67), resultando

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\mathbf{J}_f + \mathbf{J}_d) \cdot d\mathbf{a} = \int_S \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot da$$

$$= I_{f,\text{enc}} + I_{d,\text{enc}} \tag{21-8}$$

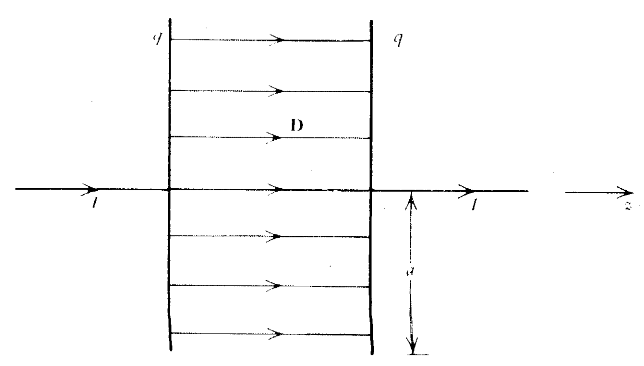


Figura 21-1 Vista de perfil de un capacitor de placas paralelas en proceso de carga.

donde $I_{d,\text{enc}}$ es la corriente de desplazamiento total encerrada por la trayectoria de integración. Cuando **D** es constante, $\partial\mathbf{D}/\partial t = 0$, por lo que (21-8) se reduce muy apropiadamente a la expresión ya anotada (20-32).

Otro resultado importante que depende de $\Delta \times \mathbf{H}$ es la condición de frontera para las componentes tangenciales de **H** en una superficie de discontinuidad de propiedades. Si se sustituye (21-7) en el resultado general (9-13), se obtiene

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \lim_{h \to 0} \left[h \left(\mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right] \tag{21-9}$$

Como antes, se puede utilizar la análoga de (15-14) para corrientes libres para obtener $\lim_{h \to 0}(h\mathbf{J}_f) = \mathbf{K}_f$. Lo que es más, tal como se hizo antes de (17-13), es de esperarse que $\partial\mathbf{D}/\partial t$ sea finito a medida que la capa de transición se reduce a un grosor cero, de modo que $h \to 0$, $h(\partial\mathbf{D}/\partial t) \to 0$ y (21-9) se vuelven $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f$, que no es sino (20-30) de nuevo. Por lo tanto, la introducción de la corriente de desplazamiento no ha cambiado esta condición de frontera, por lo que las componentes tangenciales de **H** cambiarán sólo como consecuencia de la existencia de corrientes superficiales *libres*.

Ejemplo

Capacitor en proceso de carga. En la figura 21-1 se muestra una vista de perfil de un capacitor de placas paralelas, circulares, de radio a. Para simplificar, se supone que existe vacío entre las placas y, como ya es usual, se supone también que la separación entre placas es tan pequeña comparada con el radio, que se puede suponer que el campo eléctrico **E** es uniforme y está confinado enteramente a la región entre las placas. El campo eléctrico está dado por (6-4) como $\mathbf{E} = (\sigma_f/\epsilon_0)\hat{\mathbf{z}} = (q/\epsilon_0 \pi a^2)\hat{\mathbf{z}}$ en función de la densidad superficial σ_f, la carga total q y la superficie πa^2 de una placa. Por lo tanto, en la región entre las placas

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{q}{\pi a^2}\hat{\mathbf{z}} \tag{21-10}$$

Estos resultados son los que corresponden al caso electrostático en que la carga tiene un valor constante y se encuentra uniformemente distribuida sobre la superficie de las placas. Ahora supóngase que el capacitor se carga a una razón constante dq/dt. Esto puede lograrse por medio de una corriente $I = dq/dt$ que fluye por un alambre muy delgado y largo que coincide con el eje z, como se ilustra. Sin embargo, se desea seguir tratando este caso como si la carga estuviese uniformemente distribuida en las placas, de modo que se pueda seguir utilizando (21-10). En otras palabras, se supone que la carga

se distribuye sobre la superficie de la placa esencialmente en forma instantánea. Lo que de hecho significa que el capacitor se está cargando tan lentamente que cualquier cantidad apreciable de carga transferida a la placa se le añade en un tiempo muy largo comparado con el tiempo de relajación del conductor, que se estudió en la sección 12-6. Allí se vio que este tiempo puede, a lo más ser del orden de 10^{-14} segundos en el caso de un buen conductor, de modo que no existe dificultad para suponer que I es lo suficientemente pequeña para que la distribución de carga sea siempre casi la misma que la del caso de equilibrio electrostático, es decir, que se trata de un proceso cuasiestático.

Dado que q no es constante, la corriente de desplazamiento que se obtuvo en (21-6) y (21-10) es

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{\mathbf{z}} \tag{21-11}$$

Así, se tiene el equivalente de una densidad de corriente uniforme entre las placas como se ilustra en la figura 21-2; se utiliza la palabra "equivalente" porque en realidad *no* existe transferencia de carga real en la región al vacío entre las placas pero, según (21-7), existe un término fuente para el campo magnético. Sin embargo, existe una equivalencia numérica, ya que de (21-11) y (12-6) se encuentra que la "corriente" total entre las placas debe ser

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{a} = \int_S \frac{I}{\pi a^2}\hat{\mathbf{z}} \cdot d\mathbf{a} = I \tag{21-12}$$

y es por tanto igual a la corriente real total que aporta la carga al capacitor.

Se puede utilizar (21-8) para calcular $\mathbf{H}$. Siendo las placas circulares y estando la corriente I a lo largo del eje z, se tendrá simetría axial con respecto al eje z, por lo que se puede concluir que $\mathbf{H}$ es de la forma general $\mathbf{H} = H_\varphi(\rho)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Por lo tanto, si se elige una trayectoria de integración circular de radio ρ con centro en el eje z y perpendicular al mismo, se encuentra que la integral de línea de (21-8) se vuelve $H\varphi 2\pi\rho$ como ya es usual, por lo que

$$H_\varphi(\rho) = \frac{I_{f,\text{enc}} + I_{d,\text{enc}}}{2\pi\rho} \tag{21-13}$$

Resulta de gran utilidad dividir el espacio en las cuatro regiones que se muestran en la figura 21-3. La región 1 es el volumen entre las placas del capacitor, y la 2 es el resto del encerrado entre los dos planos paralelos que coinciden en parte con las placas. Las regiones

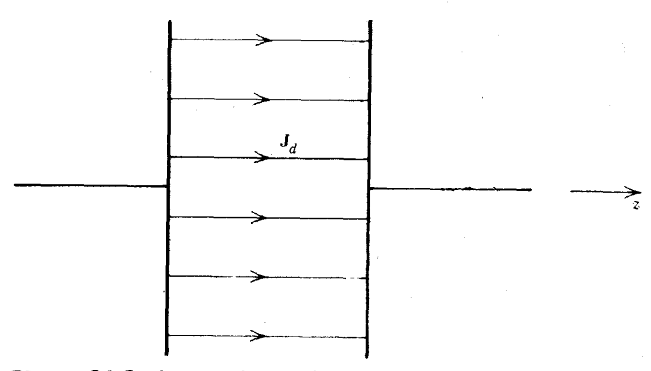


Figura 21-2 La corriente de desplazamiento entre las placas de un capacitor de placas paralelas en proceso de carga.

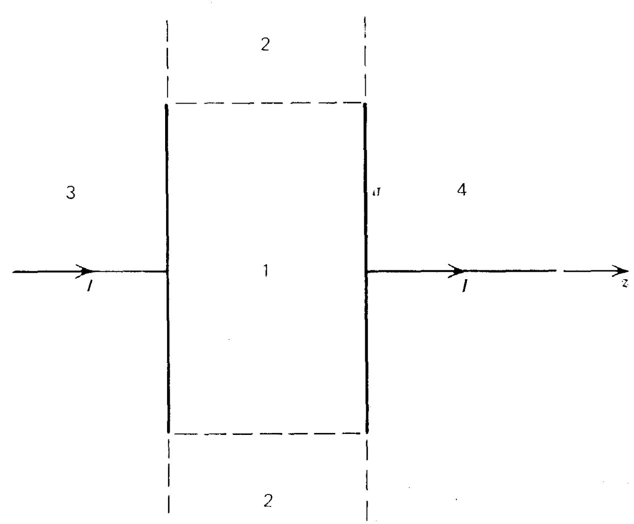


Figura 21-3 Regiones utilizadas para el cálculo del campo magnético.

3 y 4 representan el resto del espacio; I es diferente de cero en ellas.

En las regiones 3 y 4, $I_{f,\text{enc}} = I$, mientras que $I_{d,\text{enc}} = 0$, con lo que se tiene

$$H_{\varphi 3}(\rho) = H_{\varphi 4}(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \tag{21-14}$$

Para una trayectoria en la región 2, $I_{f,\text{ enc}} = 0$, mientras que $I_{d,\text{ enc}} = I_d = I$, de acuerdo con (21-12), de modo que

$$H_{\varphi 2}(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \qquad (\rho > a) \tag{21-15}$$

Aunque (21-14) y (21-15) se parecen, fueron encontradas usando *fuentes diferentes* – una corriente real y una corriente de desplazamiento, respectivamente. Por último para la región 1, en la que $\rho \leqslant a$, se tiene que $I_{f,\text{ enc}} = 0$ y $I_{d,\text{ enc}}/I_d = I_{d,enc}/I = \pi\rho^2/\pi a^2 = \rho^2/a^2$, de modo que (21-13) da otra expresión de aspecto familiar:

$$H_{\varphi 1}(\rho) = \frac{I_d \rho}{2\pi a^2} = \frac{I\rho}{2\pi a^2} \qquad (\rho \leqslant a) \tag{21-16}$$

Si se consideran primero los valores de $p > a$, se observa de los resultados anteriores que a medida que se pasa de la región 3 a la 2 y después de la 2 a la 4, las componentes tangenciales de **H** son continuas, como era de esperarse según (20-31), ya que no existen corrientes libres en estas fronteras imaginarias. Por otro lado, si la corriente de desplazamiento no se hubiera incluido en este caso de simetría axial, se hubiera llegado a la conclusión de que $\mathbf{H} = 0$ en la región 2 (y en la 1 también); esto hubiera dado una discontinuidad en las componentes tangenciales de **H** a través de la frontera entre 3 y 2, donde *no* existe ninguna corriente real, en contradicción directa con todas las suposiciones y experiencias. Maxwell también consideró este problema y fueron precisamente este tipo de argumentos los que le convencieron de la necesidad de la existencia de la corriente de desplazamiento.

Si ahora se consideran los valores de $\rho < a$, *sí* existe una discontinuidad en las componentes tangenciales de **H** al pasar de la región 3 a la 1, por decir algo, y de (21-16) y (21-14) se encuentra que la diferencia es

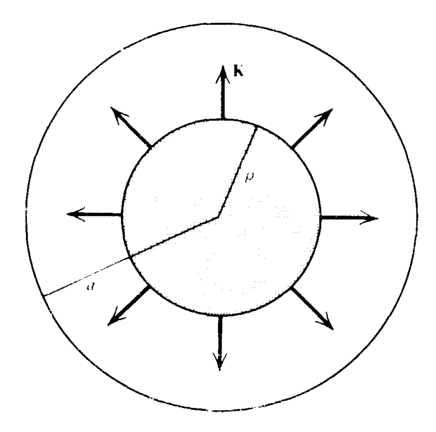


Figura 21-4 Cálculo de la densidad de corriente superficial sobre la placa de un capacitor en proceso de carga.

$$\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_3 = \frac{I}{2\pi\rho}\left(\frac{\rho^2}{a^2} - 1\right)\hat{\varphi} \tag{21-17}$$

y, según (20-31), esto debe ser igual a $\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$, que en este caso es $\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}_{3\to 1} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{z}}$. Para poder verificar esto se necesita conocer $\mathbf{K}_f$, que puede encontrarse con la ayuda de la figura 21-4. En un tiempo Δt, una carga $\Delta q = I\,\Delta t$ se deposita en las placas. Por suposición, ésta se distribuye "instantánea" y uniformemente en las placas. Por simetría, $\mathbf{K}_f$ debe ser radial y por lo tanto debe tener la forma $\mathbf{K}_f = \mathbf{K}_f(\rho)\hat{\rho}$. Como se muestra en la figura, la corriente superficial a través del círculo de radio ρ debe distribuir la carga que llega al resto de la placa en el exterior del círculo sombreado de radio ρ. Por lo tanto, en un tiempo Δt la carga total transferida a través de este círculo se obtiene de la figura 12–5a y resulta ser

$$\int K_f ds\, \Delta t = K_f \Delta t\, 2\pi\rho = \sigma_f(\pi a^2 - \pi\rho^2)$$

$$= \frac{\Delta q}{\pi a^2}(\pi a^2 - \pi\rho^2) = I\Delta t\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

y, por lo tanto, $K_f = (I/2\pi\rho)[1 - (\rho^2/a^2)]$ de manera que

$$\mathbf{K}_f = K_f(\rho)\hat{\rho} = \frac{I}{2\pi\rho}\left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)\hat{\rho} \tag{21-18}$$

Así, por medio de (1-76) se encuentra que $\mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{z}} = K_f\hat{\rho} \times \hat{\mathbf{z}} = -K_f\hat{\varphi} = (I/2\pi\rho)](\rho^2/a^2) - 1]\hat{\varphi}$, que es exactamente el miembro derecho de (21-17). por lo tanto, las condiciones de frontera quedan precisamente satisfechas, pudiéndose hacer notar de nuevo que ello no hubiera sido posible si no se hubiera incluido la corriente de desplazamiento como una fuente de **H**.

Si $\mathbf{J}_f = 0$, entonces $\nabla \times \mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t$, por lo que todavía queda una posible fuente de **H**. En esta forma se encuentra cierta analogía con la ley de Faraday dada por (21-1), que puede enunciarse a grandes rasgos diciendo que la ley de Faraday describe un campo eléctrico producido por un vector de campo magnético cambiante, mientras que (21-7) describe un campo magnético producido por un vector de campo eléctrico cambiante.

21-2 Ecuaciones de Maxwell en su forma general

Al fin se ha llegado a un conocimiento completo del electromagnetismo macroscópico, descriptivo pudiendo resumirse por medio de las ecuaciones (21-1) complementadas por (21-7):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \tag{21-19}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{21-20}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{21-21}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{21-22}$$

A estas ecuaciones se les conoce como las *ecuaciones de Maxwell* y se supone que son siempre válidas. [En realidad son ocho ecuaciones escalares, ya que tanto (21-20) como (21-22) tienen tres componentes cada una de ellas].

Vale la pena repasar el contenido físico de estas ecuaciones. La ecuación 21-19 resume la ley de Coulomb de la fuerza entre cargas puntuales más los efectos eléctricos de la materia, mientras que (21-20) representa la ley de Faraday de la inducción, que es también compatible con la ley de Coulomb para campos estáticos. El tercer miembro del grupo, (21-21), es una consecuencia de la ley de Ampere de la fuerza entre corrientes y también refleja el hecho de que no se sabe que existan cargas magnéticas libres. Por último, (21-22) incluye la ley de Ampere para la fuerza entre corrientes más los efectos magnéticos de la materia, además de la conservación de la carga libre; lo último se desprende del hecho de que la ecuación de continuidad (21-2) puede derivarse de (21-22), (21-19) y (1-49), por lo que ya no es necesario escribirla en forma separada.

Estas ecuaciones diferenciales fuente deben, desde luego, complementarse con las definiciones (10-40) y (20-28), que relacionan pares de vectores de campo con la descripción de la materia puesta en función de las densidades volumétricas correspondientes de momentos dipolares:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{21-23}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \tag{21-24}$$

Aunque siempre es posible obtener las condiciones de frontera en una superficie de discontinuidad a partir de las ecuaciones de Maxwell y de los resultados generales del capítulo 9, resulta conveniente listarlas por separado. Están dadas por (10-42), (9-16) y (17-13), (16-4), (20-30) y (20-31):

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f \tag{21-25}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} \tag{21-26}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \tag{21-27}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}_f \qquad \text{o} \qquad \mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \tag{21-28}$$

debiendo recordarse que $\hat{\mathbf{n}}$ en estas ecuaciones siempre se dibuja de la región 1 a la 2. (Nótese aquí que muchos textos, en especial los de grados superiores, omiten el subíndice f que aquí se utiliza para denotar las cargas y las corrientes libres, quedando al lector recordar que es eso precisamente lo que se implica; por tanto, es muy común encontrar todas estas ecuaciones escritas en función de los símbolos ρ, $\mathbf{J}$, σ y $\mathbf{K}$. Sin embargo, en este libro se seguirán usando esos subíndices por conveniencia).

Todas esta ecuaciones describen el comportamiento de los vectores de campo. La conexión básica entre los campos y su efecto sobre partículas cargadas se describen por medio de la fuerza de Lorentz sobre una carga puntual q, según (14-32):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{21-29}$$

siendo **v** la velocidad de la carga.

A menudo resulta conveniente expresar las ecuaciones de Maxwell en función de únicamente dos vectores —uno eléctrico y uno magnético. Por ejemplo, si se utiliza (21-23) y (21-24) para eliminar **D** y **H** de (21-19), (21-29), (21-21) y (21-22), se obtienen las ecuaciones de Maxwell expresadas en función de **E** y de **B**:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \tag{21-30}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{21-31}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{21-32}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) \tag{21-33}$$

Dos de estas ecuaciones no cambiaron y las otras dos ya no son tan compactas, debido a que las propiedades de la materia aparecen ahora en forma explícita. Sin embargo, su forma resulta fácil de comprender. El término entre paréntesis de (21-30) es, obviamente, la densidad total de carga escrita como la suma de las densidades de carga libre y ligada como se vio en (10-38). De manera similar, el término entre paréntesis de (21-33) representa la densidad total de corriente, $\mathbf{J}_{tot}$. Es claro que las dos primeras partes corresponden a la densidad de corriente libre y a la densidad de corriente de magnetización de (20-10). Los últimos dos términos juntos representan la densidad de corriente de desplazamiento que se ve ahora que tiene dos contribuciones: la primera, $\epsilon_0(\partial \mathbf{E}/\partial t)$, se encuentra presente aún en ausencia de materia y es nombrada densidad de *corriente de desplazamiento del vacio*, y el último término, $\partial \mathbf{P}/\partial t$, ya se manejó antes en (12-18) como la densidad de corriente de polarización asociada con el movimiento de las cargas ligadas. A menos que **P** y **M** representen polarización o magnetización permanentes, existe una dependencia adicional de **E** con respecto a **B** en estas ecuaciones, en el sentido de que todavía existe la posibilidad de que $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ y que $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$, y hasta que no se conozcan estas relaciones funcionales, dichas ecuaciones serán de utilidad limitada.

Las condiciones de frontera también pueden expresarse completamente en función de **E** y de **B** resultando que las que sí cambian de fbrma son

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{1}{\epsilon_0}[\sigma_f - \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)] \tag{21-34}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0[\mathbf{K}_f + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)] \tag{21-35}$$

de acuerdo con los resultados anteriores (10-12) y (20-12).

De manera similar, también es posible expresar las ecuaciones básicas en función de los pares (**E**, **H**), (**D**, **B**) y (**D**, **H**) en caso de que se desee hacerlo, y los términos que resultan se pueden interpretar de la misma manera.

Las llamadas *formas integrales* de la ecuaciones de Maxwell se obtienen al combinar el teorema de la divergencia (1-59) y el teorema de Stokes (1-67) con los miembros apropiados de (21-19), (21-20), (21-21) y (21-22), resultando lo siguiente:

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f \, d\tau \tag{21-36}$$

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} \tag{21-37}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{21-38}$$

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J}_f\cdot d\mathbf{a} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a} \tag{21-39}$$

Un poco de reflexión bastará para convencer a cualquiera que todos los resultados generales obtenidos en los capítulos anteriores pueden obtenerse a partir de las ecuaciones resumidas en esta sección, aunque a menudo se deba trabajar hacia atrás el procedimiento usado para obtenerlas originalmente.

Por último, se puede puntualizar que las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales *lineales*. En consecuencia, si se conocen dos o más campos electromagnéticos que sean soluciones de ellas, la *suma* de estos campos será también otra solución. Por lo general, a este hecho se le conoce como la *propiedad de superposición* del campo electromagnético o simplemente como el *principio de superposición*.

21-3 Ecuaciones de Maxwell para medios isotrópicos homogéneos lineales

Una importante y simplificadora situación especial ocurre cuando se manejan medios isotrópicos homogéneos lineales. Para simplificar, se verá aquí solamente el caso en que los materiales son i.h.l. en *todas* sus propiedades. Es entonces posible utilizar las ecuaciones constitutivas (10-51) y (20-53) para escribir

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \qquad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{21-40}$$

Además, la corriente libre estaría dada por (12-25) como $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$. Las cantidades ϵ, μ, y σ son constantes escalares características del material. Puede ahora ocurrir que existan corrientes libres presentes que no sean las producidas por la conductividad del material; por ejemplo, el material podría tener una incidencia de haces de partículas cargadas provenientes de fuentes externas. Así, si se toma a $\mathbf{J}_f'$ como la corriente libre proveniente de otras fuentes aparte de la conductividad, se puede simplemente sumarla a $\sigma\mathbf{E}$ para expresar la corriente libre total como

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_f' \tag{21-41}$$

Aunque (21-41) representa una posibilidad general que debe tomarse en cuenta, en realidad se tiene poca necesidad de ella en las aplicaciones prácticas, pero de todos modos se seguirá incluyendo $\mathbf{J}_f'$ para que el trabajo sea completo.

Si se sustituyen estas expresiones en (21-19), (21-20), (21-21) y (21-22) se puede, por ejemplo, expresarlas en función de **E** y de **B** únicamente:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{21-42}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{21-43}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0 \tag{21-44}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu\sigma\mathbf{E}+\mu\mathbf{J}_f{}'+\mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{21-45}$$

y las correspondientes condiciones de frontera que cambian de forma son

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\epsilon_2\mathbf{E}_2-\epsilon_1\mathbf{E}_1)=\sigma_f \tag{21-46}$$

$$\frac{\mathbf{B}_{2t}}{\mu_2}-\frac{\mathbf{B}_{1t}}{\mu_1}=\mathbf{K}_f\times\hat{\mathbf{n}} \tag{21-47}$$

De manera similar, si las ecuaciones se expresan completamente en función de **E** y de **H** se obtiene

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{21-48}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{21-49}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0 \tag{21-50}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\sigma\mathbf{E}+\mathbf{J}_f{}'+\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{21-51}$$

junto con

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mu_2\mathbf{H}_2-\mu_1\mathbf{H}_1)=0 \tag{21-52}$$

En contraste con las ecuaciones de la sección anterior, estos resultados *no* siempre son ciertos, pero *muy a menudo* lo son.

Las formas integrales de la ecuaciones de Maxwell pueden obtenerse para este caso restringido de la misma manera en que se obtuvieron de la (21-36) a la (21-39). Desde luego, el principio general de superposición también se aplica a estos materiales.

21-4 Teorema de Poynting

Ahora ya se puede volver a considerar la energía para estos campos generales descritos por las ecuaciones de Maxwell. Recuérdese el resultado anterior (12-35) de que la rapidez con que se disipa en calor la energía electromagnética por unidad de volumen está dada por

$w = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$. Por lo tanto, si se integra esta expresión sobre un volumen arbitrario V, se obtiene la velocidad total de pérdida de energía electromagnética, $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W} = \int_V w\, d\tau = \int_V \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}\, d\tau \tag{21-53}$$

y sería conveniente poder expresar esto en función de los vectores de campo. Si se utiliza $\mathbf{J}_f$ dada que (21-22), se encuentra que es posible escribir también

$$\mathcal{W} = \int_V \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})\, d\tau - \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, d\tau \tag{21-54}$$

Al combinar (1-118) con (21-20) se puede expresar el primer integrando como

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

Si ahora se sustituye esto en (21-54), se utiliza el teorema de la divergencia (1-59) y se transfiere el resultado al otro lado de la ecuación, resulta

$$-\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau = \mathcal{W} + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} \tag{21-55}$$

lo cual se conoce como el *teorema de Poynting.*

Hasta ahora el tratamiento seguido ha sido perfectamente general. Sin embargo, resulta más sencillo interpretar este resultado si se restringe a medios completamente i.h.l., y dado que de todas maneras se aplicará este teorema sólo a estos casos, supóngase que esa es la situación aquí. Al utilizar (21-40) se obtiene $\mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{D}/\partial t) = \epsilon \mathbf{E} \cdot (\partial \mathbf{E}/\partial t) = \partial(\frac{1}{2}\, \epsilon\, \mathbf{E}^2)/\partial t$; de manera similar se encuentra que $\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{B}/\partial t) = \partial[(\mathbf{B}^2/2\mu)]Pt$. Al sustituir esto en (21-55), recordando que se está manejando un volumen V de fronteras fijas de modo que se puede intercambiar el orden de diferenciación e integración, y volver a introducir la expresión integral para $\mathcal{W}$ según (21-53), se obtiene finalmente

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} \right) d\tau = \int_V \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}\, d\tau + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} \tag{21-56}$$

Se observa ahora que el integrando del miembro izquierdo no es sino la suma de las expresiones (10-38) y (20-80) que ya se vio que corresponden a las densidades de energía eléctrica y magnética, respectivamente. Si se hace ahora la razonable suposición de que se les puede interpretar en exactamente esta misma forma cuando los campos varían con el tiempo, entonces el integrando será la densidad total de energía electromagnética

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} \tag{21-57}$$

y la integral será exactamente la energía electromagnética total contenida en el volumen V. En consecuencia, el miembro izquierdo de (21-56) representa la rapidez de *disminución* de esta energía total. ¿A dónde va? El primer término del miembro derecho es la velocidad

a la que esta energía se convierte en calor. Si se recuerda el principio de la conservación de la energía, entonces cualquier cantidad de energía que no se convierta en calor *debe* salir del volumen V a través de su frontera S. Dado que el término restante tiene justamente esta forma de una integral sobre una superficie, se puede interpretar

$$\oint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{a} = \left(\frac{dU}{dt}\right)_{\text{a través de}} \tag{21-58}$$

como la rapidez con que fluye la energía a través de la superficie limitante. Lo siguiente que se puede hacer es interpretar de manera similar el *integrando* de (21-58); por tanto,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{21-59}$$

será la rapidez con que fluye la energía electromagnética por unidad de superficie. En otras palabras, es una *densidad de corriente de energía* o *flujo de potencia* y se le medirá en watts/metro^2. La cantidad $\mathbf{S}$ recibe el nombre de *vector de Poynting*; su dirección es la misma que la del flujo instantáneo de energía, es decir, que "apunta" en dirección del flujo de energía. Aunque esta interpretación del *integrando* se ha extraído del significado físico de toda la *integral*, en verdad es una interpretación muy plausible, resultando ser muy útil y consistente, en particular en lo que se refiere a aplicaciones en soluciones dependientes del tiempo de las ecuaciones de Maxwell.

Aun cuando la mayoría de las aplicaciones de este resultado conciernen a campos que varían en el tiempo, puede considerarse aquí un ejemplo que demuestra que esta interpretación de $\mathbf{S}$ da resultados razonables y consistentes cuando se le aplica a un caso simple que abarque campos *estacionarios*, esto es, independientes del tiempo.

Ejemplo

Cilindro con corriente constante. Considérese una porción de un conductor cilíndrico recto y largo de longitud l y radio a, como se muestra en la figura 21-5. Existe una corriente

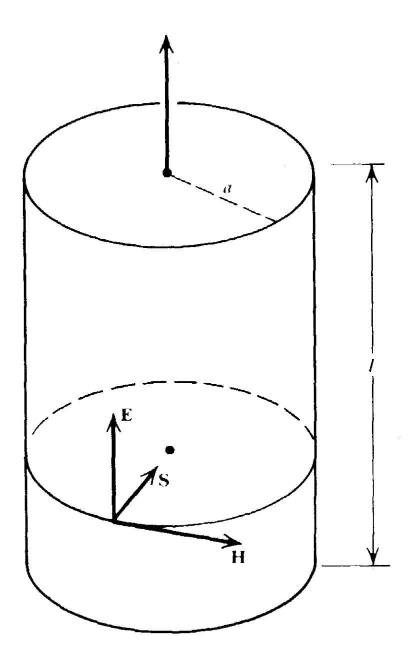


Figura 21-5 Campos y vector de Poynting para un cilindro que conduce una corriente constante.

constante en la dirección z, distribuida uniformemente en la sección, de modo que $\mathbf{J}_f = J_f\hat{\mathbf{z}}$ = const. Se desea encontrar **S** en la superficie justamente en el exterior del conductor.

Esta situación es similar a la representada en la figura 12-7, y ya se encontró en el párrafo que siguió a (12-28) que el campo eléctrico justamente fuera del cilindro es igual al valor constante de su interior, dado por $\mathbf{E} = \mathbf{J}_f/\sigma$, siendo paralelo al eje, como se muestra. En (15-19) se tiene el valor de **B** fuera del cilindro, de modo que en este caso el valor de **H** justamente fuera es $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, o sea

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{2}J_f a\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{21-60}$$

dado que $J_f = I/\pi a^2$. Al sustituir estas expresiones en (21-59) y utilizar (1-76) se encuentra que

$$\mathbf{S} = \frac{J_f}{\sigma}\hat{\mathbf{z}} \times \frac{1}{2}J_f a\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\frac{J_f^2 a}{2\sigma}\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{21-61}$$

También de la figura se puede observar que **S** es normal a la superficie y está dirigida radialmente hacia adentro, de modo que existe un flujo constante de energía hacia el conductor, puesto que **S** es constante. El elemento de superficie $d\mathbf{a}$ se encuentra dirigido hacia afuera de la superficie; **S** también es paralelo a los extremos del cilindro. Por lo tanto, la rapidez total a la que la energía fluye hacia *adentro* del volumen está dada por

$$-\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = S\int da = S(2\pi a l) = \frac{J_f^2}{\sigma}(\pi a^2 l) = \frac{J_f^2}{\sigma}(\text{volumen}) \tag{21-62}$$

usando (21-61) y siendo $\pi a^2 l$ el volumen del conductor. Al comparar esto con (12-35) se observa que (21-62) indica que la rapidez total a la que la energía fluye hacia el conductor es exactamente igual a la rapidez con que la energía se está disipando en forma de calor en el interior del volumen. Esto es justamente lo que se requiere para una situación de estado estacionario como la que se ha puesto. La fuente última de esta energía es algún dispositivo, una batería por ejemplo, que mantiene la diferencia de potencial entre los extremos del conductor al realizar continuamente un trabajo sobre las cargas a medida que pasan por el circuito completo. Esta descripción en términos de **S** muestra que la energía está siendo transferida desde una fuente, por medio de los campos que se establecen en el espacio como resultado de las distribuciones de cargas y corrientes en su interior. Por último, el flujo de energía pasa perpendicularmente a través de la superficie del conductor en exactamente la cantidad correcta para ser transformada en calor. Así, la interpretación que se ha dado al vector de Poynting proporciona una descripción completa e internamente consistente de los procesos que tienen participación activa en este caso.

21-5 Cantidad de movimiento electromagnético

Ya se ha visto cómo la densidad y el flujo de energía pueden adjudicarse al campo electromagnético. También resulta posible asociarle una cantidad de movimiento, y de hecho resulta muy conveniente hacerlo. Recuérdese el resultado (2-8), que demostraba que las fuerzas de Coulomb entre dos cargas puntuales son iguales y opuestas, es decir, que están de acuerdo con la tercera ley de Newton. Por otro lado, en (13-19) se encontró que las fuerzas entre elementos de corriente dadas por (13-17) no son, por lo general, iguales y opuestas, po lo que no satisfacen la tercera ley de Newton. De la mecánica se sabe que es un hecho que las fuerzas entre masas puntuales de un sistema compuesto son iguales y

opuestas, y esto es la base de la derivación inicial de la *conservación de la cantidad de movimiento lineal* de un sistema aislado. Dado que esta propiedad de la conservación de la cantidad de movimiento es un principio tan básico y de alcances tan extendidos, sería preocupante que la ley fundamental sobre las fuerzas magnéticas (13-17) obligara a concluir que la conservación de la cantidad de movimientos no es ya un principio general en presencia de campos electromagnéticos. El objetivo aquí es, pues, buscar la manera de que ese principio se siga manteniendo. Sin embargo y para simplificar, esto se hará aquí sólo para el caso del vacío.

Considérese una distribución de cargas y corrientes libres que ocupa un volumen V y que se encuentra descrita por las densidades ρ_f y $\mathbf{J}_f$. Si $d\mathbf{F}$ es la fuerza sobre las cargas y las corrientes en un volumen $d\tau$, se pueden combinar (21-29), (2-14) y (12-3) para obtener

$$d\mathbf{F}=(\rho_f\mathbf{E}+\mathbf{J}_f\times\mathbf{B})\,d\tau \tag{21-63}$$

Se puede así introducir una fuerza por unidad de volumen, $\mathbf{f}_v$, por medio de

$$\mathbf{f}_v=\frac{d\mathbf{F}}{d\tau}=\rho_f\mathbf{E}+\mathbf{J}_f\times\mathbf{B} \tag{21-64}$$

Más aún, la fuerza electromagnética total sobre todo el sistema se puede calcular sumando (21-63) sobre toda la distribución para obtener

$$\mathbf{F}=\int_V \mathbf{f}_v\,d\tau=\int_V(\rho_f\mathbf{E}+\mathbf{J}_f\times\mathbf{B})\,d\tau \tag{21-65}$$

deséandose ahora, como ya es costumbre, expresar esto completamente en función de los campos.

Haciendo que **P** y **M** sean iguales a cero en (21-30) y (21-33) y utilizando los resultados así obtenidos, se encuentra que el integrando de (21-65) puede expresarse como

$$\mathbf{f}_v=\epsilon_0\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}-\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B} \tag{21-66}$$

Puede mejorarse la simetría de esta expresión entre **E** y **B** si se le suma cero expresado como

$$-\epsilon_0\mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\epsilon_0\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})+\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B})=0$$

según se desprende de (21-31) y (21-32). Haciendo esto y utilizando (1-23) se obtiene

$$\mathbf{f}_v+\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})=\epsilon_0[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})]$$
$$+\frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B})] \tag{21-67}$$

Para poder apreciar bien lo que se ha obtenido, calcúlese la componente x del primer término entre corchetes a la derecha; de una manera directa se encuentra que puede escribirse como

$$[\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E})-\mathbf{E}\times(\nabla\times\mathbf{E})]\cdot\hat{\mathbf{x}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x^2-\frac{1}{2}E^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z) \tag{21-68}$$

y habrá un resultado similar para el término en **B**. Esto puede escribirse más compactamente si se introduce un conjunto de cantidades T_{ij} definidas como

$$T_{ij} = \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}E^2\delta_{ij}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}B^2\delta_{ij}\right) \tag{21-68}$$

por medio del símbolo delta de Kronecker que se definió en (8-27), donde los índices i y j pueden tomar, en forma independiente, los valores x, y y z. Al utilizar esta definición se observa que la componente x de (21-67) puede expresarse en la forma

$$\left[\mathbf{f}_v + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\right]_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = \nabla\cdot\mathbf{X} \tag{21-69}$$

donde $\mathbf{X} = T_{xx}\hat{\mathbf{x}} + T_{xy}\hat{\mathbf{y}} + T_{xz}\hat{\mathbf{z}}$. (las cantidades T_{ij} reciben el nombre de componentes del *tensor de esfuerzo de Maxwell*; sin embargo, no se volverán a usar otra vez después de esta sección). Si ahora se integra (21-69) sobre el volumen V y se aplica el teorema de la divergencia (1-59), se obtiene

$$\int_V\left[\mathbf{f}_v + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\right]_x d\tau = \int_V \nabla\cdot\mathbf{X}\,d\tau = \oint_S \mathbf{X}\cdot d\mathbf{a} \tag{21-70}$$

Extiéndase ahora la región de integración para incluir todo el espacio, cosa que es posible debido a que ρ_f y $\mathbf{J}_f$ son iguales a cero en el exterior de V. Dado que todas las fuentes ρ_f y $\mathbf{J}_f$ están dentro de una región finita, a una distancia R muy grande se tendrá, cuando mucho, que $\mathbf{E}\sim 1/R^2$ y $\mathbf{B}\sim 1/R^3$ como ya se vio en (7-26) y (18-19), mientras que el área de la superficie de integración aumenta como R^2, pero las componentes de T_{ij} incluyen productos de las componentes de los campos, y se puede observar en (21-69) que **X** disminuirá mucho más rápidamente con R que lo que el área de la superficie de integración aumentará, por lo que su integral de superficie se anula, quedando (21-70) como

$$\int_{\text{todo el espacio}}\left[\mathbf{f}_v + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\right]_x d\tau = \oint_{\text{todo el espacio}} \mathbf{X}\cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{21-71}$$

Se obtienen los mismos valores para las componentes y y z de esta integral, de manera que la integral vectorial se anula y, por lo tanto,

$$\int_{\text{todo el espacio}}\left[\mathbf{f}_v + \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\right] d\tau = \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{todo el espacio}} \epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,d\tau = 0 \tag{21-72}$$

donse se ha utilizado (21-65) para volver a introducir la fuerza total sobre las cargas y corrientes. **F** actúa sobre los portadores de carga y corriente, es decir, sobre la materia del campo; la materia posee propiedades mecánicas y de la mecánica se sabe que **F** es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento de la materia, es decir, $\mathbf{F} = d\mathbf{p}_{\text{materia}}/dt$. Sustituyendo esto en (21-72) y observando que ya no existe distinción entre derivadas parciales y totales con respecto al tiempo en el segundo término porque la integración es con respecto a todo el espacio, se encuentra que (21-72) puede expresarse como

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{p}_{\text{materia}} + \int_{\text{todo el espacio}} \epsilon_0(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,d\tau\right] = 0 \tag{21-73}$$

de modo que la cantidad entre corchetes es una *constante.* Pero ésta es justamente la manera en que se haría un enunciado de la conservación de la *cantidad de movimiento total* de todo el sistema. Por lo tanto, se puede interpretar la integral como la *cantidad de movimiento del campo electromagnético* y escribir

$$\mathbf{p}_{\text{campo en}} = \int_{\text{todo el espacio}} \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}\, d\tau \tag{21-74}$$

Resulta natural ya interpretar el integrando como una *densidad de cantidad de movimiento,* **g**:

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S} \tag{21-75}$$

donde **S** es el vector de Poynting porque $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ en este caso.

Si se recuerda de la mecánica que la cantidad de movimiento angular **l** de una masa puntual con cantidad de movimiento lineal **p** se define como $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde **r** es el vector de posición, se concluirá por analogía que es posible definir una *densidad de cantidad de movimiento angular* $\mathfrak{L}$ asociada con el campo electromagnético por medio de

$$\mathfrak{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \tag{21-76}$$

Ejercicios

21-1 Un capacitor de placas paralelas consiste de dos placas circulares de área S con un vacío entre ellas. Se conecta a una batería de fem constante . Se hacen oscilar entonces las placas *lentamente* de modo que sigan siendo paralelas pero la separación d cambie según $d = d_0 + d_1$ sen ωt. Encontrar el campo magnético **H** que se produce entre las placas por la corriente de desplazamiento. De manera similar, encontrar **H** si primero se desconecta el capacitor de la batería y después se hace que las placas oscilen de la misma manera.

21-2 Un capacitor cilíndrico infinitamente largo de radios a y b ($b > a$) lleva una carga libre λ_f por unidad de longitud. La región entre las placas está llena de un dieléctrico no magnético de conductividad σ. Demostrar que en cada punto del dieléctrico la corriente de conducción se compensa exactamente con la corriente de desplazamiento, de manera que no se produce ningún campo magnético en el interior. Encontrar la rapidez de disipación de energía por unidad de volumen en un punto a una distancia ρ del eje. Encontrar la velocidad total de disipación de energía para una longitud l del dieléctrico, y demostrar que es igual a la rapidez de disminución de la energía electrostática del capacitor.

21-3 Expresar la forma general de la ecuaciones de Maxwell completamente en función de cada uno de los siguientes pares: (**E**, **H**), (**D**, **B**) y (**D**, **H**). En otras palabras, encontrar las análogas de (21-34), (21-26), (21-27) y (21-35) para cada uno de estos pares.

21-4 Expresar las condiciones de fronteras generales completamente en función de cada uno de los siguientes pares: (**E**, **H**), (**D**, **B**) y (**D**, **H**). En otras palabras, encontrar las análogas de (21-34), (21-26), (21-27) y (21-35) para cada uno de estos pares.

21-5 A partir de la fuerza de Lorentz (21-29) y de las ecuaciones de Maxwell para el vacío, derivar la ley de Coulomb (2-3).

21-6 Suponer que una cierta distribución de cargas y corrientes libres (ρ_1, $\mathbf{J}_1$) produce un campo electromagnético $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{D}_1$, es decir, que estos son soluciones de las ecuaciones de Maxwell. De manera similar, otra distribución (ρ_2, $\mathbf{J}_2$) produce $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{H}_2$ y $\mathbf{D}_2$. Verificar la propiedad de superposición directamente demostrando que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 +$

$+ \mathbf{E}_2$ y así sucesivamente, son también soluciones de las ecuaciones de Maxwell para las distribuciones fuente totales $\rho_1 + \rho_2$ y $\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$.

21-7 Encontrar la forma de la ecuaciones de Maxwell en función de **E** y **B** para un medio isotrópico lineal pero *no* homogéneo.

21-8 He aquí algunos campos electromagnéticos genuinos, es decir, qie satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío. (Más adelante se verá cómo pueden obtenerse).

$$E_y = -H_0\mu_0\omega\left(\frac{a}{\pi}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\text{sen}(kz-\omega t)$$

$$H_x = H_0 k\left(\frac{a}{\pi}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\text{sen}(kz-\omega t)$$

$$H_z = H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(kz-\omega t)$$

Todas las demás componentes son iguales a cero y $0 \leqslant x \leqslant a$. H_0, a, k y ω son constantes y $\mu_0\epsilon_0\omega^2 = k^2 + (\pi/a)^2$. (*a*) Verificar por sustitución directa que se satisfacen las ecuaciones de Maxwell para un vacío que no contiene cargas o corrientes libres. (*b*) Encontrar la corriente de desplazamiento. (*c*) Encontrar el vector de Poynting. (d) En $x = 0$ existe una pared perfectamente conductora que coincide con el plano yz. Suponer que todos los campos son iguales a cero para x negativas y encontrar la densidad superficial de carga libre y la densidad superficial de corriente libre en función de la posición en esta pared.

21-9 Encontrar el vector de Poynting sobre la superficie limitante de la región 1 de la figura 21-3. Encontrar la rapidez total a la que entra energía a la región 1 y demostrar después que es igual a la velocidad con que cambia la energía del capacitor.

21-10 Suponer que el cable coaxial muy largo de la figura 20-14 se utiliza como línea de transmisión entre una batería y un resistor. La batería, de fem $\mathcal{E}$, tiene sus dos terminales conectadas a los dos conductores en un extremo del cable, mientras que en el otro extremo los dos conductores están conectados a un resistor de resistencia R. Encontrar **S** en la región entre los conductores. Demostrar que la potencia total que pasa por una sección del cable es igual a $\mathcal{E}^2/R$ y dar una interpretación de este resultado. ¿Cambiará la dirección del flujo de energía si se intercambian las conexiones de la batería?

21-11 Considerar un medio i.h.l. donde ρ_f y $\mathbf{J}_f$ son ambas iguales a cero en la región de interés. Demostrar que las ecuaciones de Maxwell son invariables ante la transformación

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= C\left[\mathbf{E}\cos\alpha + (\mu\epsilon)^{-1/2}\mathbf{B}\,\text{sen}\,\alpha\right] \\ \mathbf{B}' &= C\left[-(\mu\epsilon)^{1/2}\mathbf{E}\,\text{sen}\,\alpha + \mathbf{B}\cos\alpha\right] \end{aligned} \quad (21\text{-}77)$$

donde C es una constante sin dimensiones y α es un ángulo constante pero arbitrario. En otras palabras, si **E** y **B** son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, demostrar que entonces **E'** y **B'** lo son también. Considerar el caso especial $\alpha = \pi/2$ y así demostrar que en este sentido, los campos **E** y **B** pueden intercambiarse. Ilustrar este último resultado con un bosquejo sencillo. ¿Es compatible la relación que se encontró después de (16-40) con estos resultados? Esta propiedad suele llamarse propiedad de *dualidad* del campo electromagnético.

Capítulo 22

Potenciales escalar y vectorial

En el capítulo anterior se resumió el electromagnetismo en función de los propios vectores de campo. Sin embargo, debe recordarse que cuando se introdujeron anteriormente los potenciales escalar y vectorial se simplificó en gran medida el trabajo, por lo que resulta natural preguntarse si acaso dichos potenciales no serían igualmente útiles al aplicarse a estas situaciones más generales. De hecho, resulta posible formular este tema de una manera análoga. Estos potenciales más generales resultan ser de extrema utilidad para discutir la producción de campos a partir de fuentes dadas, lo cual no se hará sino hasta el capítulo 27. Sin embargo, resulta conveniente en este punto estudiarlos en términos generales.

22-1 Potenciales en general

Nótese primero que la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que fue usada inicialmente para introducir el potencial vectorial **A** en (16-7), no ha cambiado de forma según se ve en (21-21). Por lo tanto, siempre se podrá satisfacer (21-21) si se escribe

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \tag{22-1}$$

La diferencia entre (22-1) y (16-7) es que ahora se toman tanto **A** como **B** como posibles funciones del tiempo t y de la posición r.

Si se sustituye (22-1) en (21-20) se obtiene $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial(\nabla \times \mathbf{A})/\partial t = -\nabla \times (\partial \mathbf{A}/\partial t)$, de manera que

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{22-2}$$

Según (1-48), el término entre paréntesis se puede escribir como el gradiente de un escalar, es decir, $\mathbf{E} + (\partial \mathbf{A}/\partial t) = -\nabla \phi$, o sea,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{22-3}$$

Esto, desde luego, es de la misma forma que (17-12) ya que ambas fueron derivadas de exactamente la misma manera. Aquí se debe suponer que el potencial escalar es, por lo general, una función tanto del tiempo como de la posición.

Por lo tanto, dos de las ecuaciones de Maxwell serán siempre satisfechas si **E** y **B** se expresan en la forma (22-1) y (22-3). Las otras dos deberán indicar cómo obtener **A** y ϕ a partir de las fuentes. Si se sustituyen estas expresiones de **E** y de **B** en (21-30) y (21-33) se obtiene

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = -\frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f - \nabla\cdot\mathbf{P}) \tag{22-4}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu_0\left(\mathbf{J}_f + \nabla\times\mathbf{M} + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right) \tag{22-5}$$

por medio de (1-45) y (1-122). Si fuese posible ahora encontrar soluciones a estas ecuaciones, que satisficiesen las condiciones de frontera apropiadas, se sabría, por la forma en que se obtuvieron, que las **E** y **B** que se calculen a partir de estos **A** y ϕ serán automáticamente soluciones de *todas* las ecuaciones de Maxwell.

Una dificultad con estas dos ecuaciones, es decir, que las ecuaciones no están separadas. Además, si **P** y **M** representan distribuciones de momentos dipolares permanentes que resultan afectadas por los campos, deberá asumirse que **P** y **M** son funciones de **E** y **B** y por lo tanto de **A** y ϕ. En consecuencia, a menos que se cuente con una dependencia específica dada, no es posible realizar progreso alguno con estas ecuaciones generales. Sin embargo, se ha supuesto que el conjunto de ecuaciones (22-1), (22-3), (22-4) y (22-5) es *siempre* verdadero

Resulta todavía posible obtener algunas conclusiones acerca de las condiciones de frontera en una superficie de discontinuidad de propiedades. Los argumentos esgrimidos en relación con (16-21), basados en $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, siguen siendo válidos cuando **B** es una función del tiempo, ya que el único requisito era que **B** fuera finita. Dado que (22-1) sigue siendo válida, se puede concluir que las componentes tangenciales de **A** son siempre continuas:

$$\mathbf{A}_{2t} = \mathbf{A}_{1t} \tag{22-6}$$

Pero todavía no se cuenta con una expresión específica para $\nabla \cdot \mathbf{A}$; por lo tanto, no se puede estar seguro acerca del comportamiento de las componentes normales de **A**, aunque no resulta irrazonable suponer que se comportarán como en (16-20) y que serán también continuas.

En la sección 9-5 se llegó a la conclusión de que el potencial electrostático escalar era continuo. Sin embargo, ahora se debe aplicar (22-3) en lugar de simplemente $\mathbf{E} = -\Delta\phi$, pero a pesar de ello, al revisar los anteriores argumentos se observa que si se les agrega el requisito normal de que $\partial\mathbf{A}/\partial t$ permanezca finito a medida que la capa de transición se reduce a grosor nulo, se volverá a encontrar que ϕ es continuo:

$$\phi_2 = \phi_1 \tag{22-7}$$

Por último, como una especie de verificación de estos resultados, si se regresa al caso estático en el que todas las derivadas son iguales a cero, y se utiliza $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ según consta en (16-17), se encuentra que (22-4) y (22-5) se vuelven $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ y $\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}$,

que no son sino los anteriores resultados dados en (11-1), (10-38) y (16-18). Por lo tanto, los potenciales escalar y vectorial generalizados se reducen en forma apropiada a los que ya se sabían aplicables a las situaciones estáticas.

22-2 Potenciales para medios isotrópicos homogéneos lineales

Como en la sección 21-3, se puede lograr una gran simplificación al tratar exclusivamente con materiales i.h.l., de manera que sean aplicables las ecuaciones constitutivas (21-40) así como también (21-41) para la densidad de corriente libre. Es más conveniente volver a empezar con las formas de las ecuaciones de Maxwell para este caso, que son (21-42) a (21-45). Las dos de en medio se volverán a satisfacer al usar (22-1) y (22-3), y cuando estas expresiones de **E** y **B** se sustituyen en (21-42) (21-45) se obtiene

$$\nabla^2\phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{22-8}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi\right) = -\mu\mathbf{J}_f' \tag{22-9}$$

Se puede ahora poner (22-8) en una forma más parecida a (22-9) al sumarle y restarle términos apropiados, encontrándose que se le puede expresar también como

$$\nabla^2\phi - \mu\sigma\frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi\right) = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{22-10}$$

Estas ecuaciones son las que se deben resolver para **A** y ϕ. Sin embargo, cada una de ellas contienen tanto a **A** como a ϕ y sería deseable que de alguna manera se pudieran separar. Si se recuerda el teorema de Helmholtz de la sección 1-18, el vector **A** no estará completamente determinado hasta que no se hayan especificado tanto $\nabla \times \mathbf{A}$ como $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en todo lugar. Hasta ahora sólo se ha especificado $\nabla \times \mathbf{A}$ por medio de (22-1); en consecuencia, existe libertad para escoger $\nabla \cdot \mathbf{A}$ de la manera más conveniente. Al comparar (22-9) y (22-10) se puede observar que resulta simple *requerir* que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi = 0 \tag{22-11}$$

pues así

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}_f' \tag{22-12}$$

$$\nabla^2\phi - \mu\sigma\frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{22-13}$$

Al requisito (22-11) se le conoce como la *condición de Lorentz.* La ventaja de esta elección en particular es que no solamente hace que las ecuaciones de **A** y de ϕ sean independientes entre sí, sino que las cuatro ecuaciones escalares que resultan (una para cada componente de **A** y una para ϕ) sean todas ecuaciones diferenciales de la *misma forma general,* de manera que, en este sentido, sólo resta *un* problema general por resolver.

La formulación que se ha desarrollado hasta aquí ya anticipa que el procedimiento general para resolver un problema de campo electromagnético por medio de los potenciales sea el siguiente. Se supone que las fuentes externas y que las condiciones de frontera están dadas; es decir, se dan por conocidas las funciones $\mathbf{p}_f$ (r, t) y $\mathbf{J}_f'$ (r, t). Entonces se resuelve (22-12) y (22-13) para **A** y ϕ, asegurándose que satisfagan la condición de Lorentz (22-11). Una vez hecho esto, **E** y **B** se encuentran a partir de (22-1) y (22-3), satisfaciéndose también las condiciones de frontera apropiadas. Se sabe ya que **E** y **B** calculadas de esta manera serán soluciones de las ecuaciones de Maxwell y por lo tanto representan la solución completa. Si se desea, se pueden entonces encontrar $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu$; se pueden también calcular la polarización y la magnetización en cualquier punto con $\mathbf{P}=(k_e-1)\ \epsilon_0\ \mathbf{E}$ y $\mathbf{M}=[(k_m-1)/k_m\mu_0]\mathbf{B}$.

En realidad, el uso más importante y conveniente de estos potenciales se encuentra en el caso de medios no conductores, por lo que resulta interesante averiguar a qué se reducen los resultados en este caso particular. Cuando $\sigma=0$ resulta $\mathbf{J}_f'=\mathbf{J}_f$ según (21-41), con lo que (22-11) a (22-13) se convierten en

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{22-14}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu\mathbf{J}_f \tag{22-15}$$

$$\nabla^2\phi-\mu\epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{22-16}$$

Se suelen expresar estas ecuaciones de una manera más compacta definiendo el *operador D'Alembertiano* como

$$\Box^2=\nabla^2-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{22-17}$$

de modo que se obtenga

$$\Box^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}_f \qquad \Box^2\phi=-\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{22-18}$$

que hacen recordar las ecuaciones de Poisson (11-2) y (16-18).

Si se supone que $\partial\phi/\partial t$ permanece finita en la capa de transición, de (22-14) y (9-7) se encuentra que las componentes normales de **A** son continuas a través de la superficie de discontinuidad, es decir,

$$A_{2n}-A_{1n}=0 \tag{22-19}$$

lo que, combinado con (22-6), indica que el propio **A** es continuo,

$$\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_1 \tag{22-20}$$

justo como ocurrió en el caso estático, según (16-22).

22-3 Transformaciones de norma

Casi al final de la sección 16-2 se vio que el requisito $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ sigue dejando alguna ambigüedad en el potencial vectorial, y en (16-24) y (16-25) también se vio que un nuevo potencial, $\mathbf{A}^\dagger$, definido como

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} + \nabla\chi \tag{22-21}$$

proporciona la inducción $\mathbf{B}$ igualmente bien. Se observa que tal sigue siendo el caso aquí, sólo que se esperaría que el escalar χ fuera una función tanto de la posición como del tiempo, de modo que se pueda escribir $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$. Sin embargo, ahora $\mathbf{E}$ depende tanto del potencial escalar como del vectorial y se desea, desde luego, encontrar el mismo campo eléctrico. Si se sustituye (22-21) en (22-3) se obtiene

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}^\dagger - \nabla\chi) = -\nabla\left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial\mathbf{A}^\dagger}{\partial t} = -\nabla\phi^\dagger - \frac{\partial\mathbf{A}^\dagger}{\partial t} \tag{22-22}$$

donde

$$\phi^\dagger = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{22-23}$$

Así, la *forma* de (22-3) se mantiene si también se modifica el potencial escalar de la misma manera. En otras palabras, se obtienen los mismos campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ ya sea usando el conjunto de potenciales $(\mathbf{A}, \phi)$ o el conjunto $(\mathbf{A}^\dagger, \phi^\dagger)$. El tipo de transformación definida por (22-21) y (22-23) recibe el nombre de *transformación de norma;* así, se ha encontrado que las ecuaciones de Maxwell no cambian por una transformación de norma o un "cambio de norma." Sin embargo, hay algunas restricciones que sería deseable imponer sobre χ para que ambos conjuntos de potenciales satisfagan la condición de Lorentz. Si se sustituyen (22-21) y (22-23) en (22-14) se tiene

$$\nabla\cdot\mathbf{A}^\dagger + \mu\epsilon\frac{\partial\phi^\dagger}{\partial t} - \nabla^2\chi + \mu\epsilon\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0 \tag{22-24}$$

de modo que $\mathbf{A}^\dagger$ y $\phi^\dagger$ también satisfacen (22-14) siempre que

$$\nabla^2\chi - \mu\epsilon\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \square^2\chi = 0 \tag{22-25}$$

[En el caso de campos estáticos, (22-14) y (22-25) se reducen a los resultados anteriores (16-26) y (16-27).]

También se puede verificar fácilmente que bajo esta suposición $\mathbf{A}^\dagger$ y $\phi^\dagger$ satisfacen las mismas ecuaciones diferenciales que $\mathbf{A}$ y ϕ satisfacen:

$$\square^2\mathbf{A}^\dagger = -\mu\mathbf{J}_f \qquad \square^2\phi^\dagger = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \tag{22-26}$$

Cuando se manejan potenciales que cumplen con todos estos requerimientos, se dice que se ha utilizado una *norma de Lorentz*

Ejercicios

22-1 Demostrar que (22-8) y (22-9) también pueden obtenerse empezando con (22-4) y (22-5) en lugar de regresar a las ecuaciones de Maxwell.

22-2 Demostrar que si las distribuciones de carga y corriente libres y la polarización y magnetización son todas funciones *dadas* de la posición y del tiempo, entonces las ecuaciones generales que los potenciales satisfacen pueden separarse usando la forma de la condición de Lorentz apropiada para el vacío. Encontrar las ecuaciones diferenciales que **A** y ϕ satisfacen bajo estas circunstancias.

22-3 Encontrar las ecuaciones que los potenciales satisfacen para un medio isotrópico lineal pero *no* homogéno.

22-4 Encontrar las condiciones de frontera que deben satisfacer las componentes normales de **A**. a partir de la condición de Lorentz (22-11), que involucra la conductividad.

22-5 Considerar un medio i.h.l. no conductor. Si se requiere que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, se dice que se está utilizando la *norma de Coulomb*. Encontrar las ecuaciones diferenciales que **A** y ϕ satisfacen en este caso.

22-6 Demostrar que en una región i.h.l. no conductora en la que $\rho_f = 0$ y $\mathbf{J}_f = 0$, los campos **E** y **B** pueden encontrarse en forma completa a partir de un potencial vectorial, es decir, que $\phi =$ const. (por lo general se toma como igual a cero). ¿Cuáles son las dos ecuaciones que determinan A?

22-7 Considerar una región donde $\rho_f = 0$, $\mathbf{J}_f = 0$, $\mathbf{M} = 0$ y **P** es una función *dada* de la posición y del tiempo. Demostrar que (22-4) y (22-5) se satisfacen y que el campo electromagnético puede ser obtenido de *un solo* vector π_e tal que $\mathbf{A} = \mu_0 \epsilon_0 (\partial \boldsymbol{\pi}_e / \partial t), \phi = -\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e$ y $\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_e - \mu_0 \epsilon_0 (\partial^2 \boldsymbol{\pi}_e / \partial t^2) = -\mathbf{P}/\epsilon_0$. A este vector se le conoce como el *vector de Hertz o potencial de polarización.* Expresar **E** y **B** completamente en función de π_e. y también de **P** si es que esto lleva a alguna simplificación.

22-8 La esencia de este ejercicio es similar a la del anterior. Suponer que $\rho_f = 0$, $\mathbf{J}_f = 0$, $\mathbf{P} = 0$ y **M** es una función dada de la posición y del tiempo. Demostrar que ahora se puede obtener el campo electromagnético a partir de un solo vector, π_m, que satisface la ecuación $\nabla^2 \boldsymbol{\pi}_m - \mu_0 \epsilon_0 (\partial^2 \boldsymbol{\pi}_m / \partial t^2) = -\mu_0 \mathbf{M}$. Encontrar expresiones para **A**, ϕ, **E** y **B** en función de π_m.

Capítulo 23
Sistemas de unidades

Se han estado utilizando exclusivamente unidades del SI que, para los propósitos que aquí se persiguen, son las mismas que las del sistema MKSA, y en adelante se seguirá con la misma política. Esto significa que este sistema de unidades está basado en *cuatro* cantidades escogidas y definidas en forma arbitraria —metro, kilogramo, segundo y ampere. Principalmente por razones históricas basadas en el desarrollo originalmente separado de la electricidad y del magnetismo, también se han utilizado y se seguirán utilizando otros sistemas de unidades para estudiar este tema. Esto suele ser particularmente notorio en estudios avanzados de física, especialmente en temas como la mecánica cuántica y sus aplicaciones sobre las propiedades microscópicas de la materia. Como resultado de esta situación, aquel estudiante cuyo entrenamiento se haya basado exclusivamente en el uso de unidades MKSA suele enfrentarse a menudo al problema de tener que contestar dos preguntas: ¿en qué sistema de unidades está escrita *esta* ecuación? ¿Qué *números* o factores se deben introducir para poder resolver este problema? Este capítulo pretende ser una guía para contestar estas preguntas. Por lo tanto, no se hace un estudio exhaustivo de los diferentes sistemas de unidades, sino que principalmente se trata de explicar cómo se originaron, qué efectos tienen sobre la forma de las ecuaciones que aquí se utilizan y qué hacer al respecto. Así, en cierto sentido, este pequeño capítulo viene a ser una digresión, pero ya que se ha terminado con la tarea de describir el electromagnetismo en su forma más general y fundamental, es oportuno en este un punto considerar tales interrogantes.

23-1 Origen de otros sistemas de unidades

Para entender cómo pueden concurrir diferentes sistemas de unidades, baste considerar dos resultados experimentales básicos – uno electrostático y otro magnetostático. Según la ley de Coulomb (2-3), se sabe que la magnitud de la fuerza entre dos cargas puntuales tiene la forma

$$F = C_e \frac{qq'}{R^2} \tag{23-1}$$

donde C_e es una constante de proporcionalidad cuyo valor numérico depende de las unidades utilizadas. Anteriormente se eligió $C_e = 1/4\pi\epsilon_0$. De manera similar, la magnitud de la fuerza por unidad de longitud entre dos corrientes paralelas está dada, según la ley de Ampere, por (13-13) y (13-14), pudiéndose escribir

$$\frac{dF}{dz} = 2C_m \frac{II'}{\rho} \tag{23-2}$$

donde C_m es otra constante de proporcionalidad que antes se escribió como $C_m = \mu_0/4\pi$. Además, todos los sistemas de unidades utilizan la definición de corriente dada por (12-2): $I = dq/dt$.

Si se utiliza siempre el mismo conjunto de unidades mecánicas en ellas, entonces las fuerzas implicadas tendrán la misma dimensión, y se puede observar que las combinaciones $C_e qq'/R^2$ y $C_m II'$ deben también tener las mismas dimensiones, de modo que la relación

$$\frac{C_e}{C_m} = c^2 \tag{23-3}$$

debe tener las dimensiones de (distancia/tiempo)^2, es decir, c tiene dimensiones de *velocidad.* Este valor ha sido medido en numerosas ocasiones y el *resultado experimental* es

$$c = 3 \times 10^8 \text{ metros/segundo} \tag{23-4}$$

que es igual al valor medido para la velocidad de la luz en el vacío. El mejor valor de c que se conoce actualmente es 2.99792458×10^8 metros/segundo, pero el valor que se da en (23-4) es suficientemente exacto para los actuales propósitos. (Como se verá en el siguiente capítulo, la concordancia entre esta relación y la velocidad de la luz no es accidental.) Ya se tomó en consideración este valor en los valores que se dieron a C_e y C_m, encontrándose que $C_e/C_m = (4\pi\epsilon_0)^{-1}/(\mu_0/a\pi) = (\mu_0\epsilon_0)^{-1} = (9 \times 10^9)/(10^{-7}) = (3 \times 10^8$ metros/segundo$)^2$ según (2-5) y (13-2); esto concuerda con (23-3) y (23-4). En otras palabras, se cuenta con el resultado fundamental de que

$$\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \tag{23-5}$$

para el sistema MKSA que se está utilizando aquí.

Los diversos sistemas de unidades que se utilizan en electromagnetismo difieren esencialmente en la manera en que se eligen estas constantes. Resulta evidente que cualquiera de las constantes, C_e ó C_m, puede elegirse arbitrariamente, pero entonces el valor de la otra debe ajustarse al requisito de (23-3).

Todos los demás sistemas de interés están basados en el uso del sistema CGS, en el que todo se expresa en función de la elección arbitraria de *tres* unidades fundamentales para longitud, masa y tiempo; éstas son el centímetro, el gramo y el segundo, respectivamente. Las unidades mecánicas se derivan después de la manera tradicional a partir de sus definiciones. Así, la unidad de la fuerza es 1 gramo $\times$ 1 centímetro/ (segundo)^2 = 1 dina. La unidad de trabajo o energía será el producto de la unidad de fuerza por la unidad de desplazamiento:

1 dina-centímetro = 1 erg. La unidad de potencia será de 1 erg/segundo, y así sucesivamente.

Otra distinción que se debe hacer entre sistemas de unidades se refiere al hecho de saber si son "racionalizados" o "no racionalizados". Lo que esto significa es que para un sistema racionalizado no existen factores de 4π en las ecuaciones de Maxwell, mientras que, como se verá adelante, sí aparecen si se utiliza un sistema no racionalizado. Las ecuaciones 21-19 a 21-22 demuestran que se ha estado utilizando un sistema de unidades MKSA racionalizado. (El uso de un sistema racionalizado no hace que 4π desaparezca, sino que simplemente significa que los 4π se encontrarán en otros resultados que se derivan de las ecuaciones de Maxwell; por lo tanto, la elección del tipo de sistemas a utilizar es cuestión de gustos.)

23-2 Los sistemas electrostático y electromagnético

Supóngase que se decide que la ley de Coulomb es un resultado fundamental que resulta ser el mejor punto para comenzar a definir un sistema de unidades para el electromagnetismo. La inclinación natural en este caso sería darle a esta ecuación la apariencia más simple posible; esto puede ciertamente lograrse haciendo que $C_e = 1$. Así, según (23-3), C_m *debe* ser $1/c^2$, por lo que (23-1) y (23-2) quedarían

$$F = \frac{qq'}{R^2} \qquad \frac{dF}{dz} = \frac{2II'}{c^2\rho} \qquad \text{(uee)} \tag{23-6}$$

Este procedimiento lleva al *sistema de unidades electrostático* (uee). De la primera expresión de (23-6) se observa que dos cargas iguales unitarias separadas a un centímetro de distancia se repelerán entre sí con una fuerza de 1 dina; la unidad de carga que así se define recibe el nombre de *estatcoulomb* (de electro*stá*tico). La unidad de corriente será entonces 1 estatcoulomb/segundo = 1 estatampere, y la de la diferencia de potencial será 1 erg/estatcoulomb = 1 estatvolt. Se puede seguir este procedimiento para definir el estatfarad, el estathm, y así sucesivamente, desarrollando de esta manera una descripción completa y consistente. Sin embargo, en algún punto se deberá decidir cómo definir **B** y cómo relacionarlo con **E**; en este sistema esto se logra al escribir la ley de Faraday como $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, o lo que es equivalente, se escribe la fuerza de Lorentz como $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Sin embargo, este sistema ya no se suele usar en su forma pura, por lo que lo visto hasta aquí debe ser suficiente. A veces se pueden encontrar algunas cantidades medidas en este sistema pero *no* dadas en estatamperes, estatfarads, etc., sino simplemente como tantas "unidades electrostáticas" o, más sencillamente, como tantas "uee".

Supóngase ahora que se tuviera mayor interés o habilidad en magnetostática que en electrostática; en este caso, la expresión (23-2) sería el punto de partida más lógico, por lo que se trataría de expresarla de la manera más sencilla posible. Esto se logra al tomar $C_m = 1$, de manera que $C_e = c^2$, con lo que (23-1) y (23-2) quedarían

$$F = \frac{c^2qq'}{R^2} \qquad \frac{dF}{dz} = \frac{2II'}{\rho} \qquad \text{(uem)} \tag{23-7}$$

De este procedimiento se obtiene el *sistema de unidades electromagnéticos* (uem). Se observa en la segunda expresión de (23-7) que dos corrientes rectas muy largas y paralelas, separadas a 1 centímetro de distancia, se atraerán mutuamente con una fuerza de

2 dinas/centímetro; a la unidad de corriente resultante se le asigna el nombre de *abampere* (de *ab*soluto). La unidad de carga es 1 abcoulomb = 1 abampere-segundo y se puede continuar este proceso para definir el abvolt, el abfarad, y por el estilo todos los demás; resulta también común encontrar únicamente la terminología "unidades electromagnéticas" o "uem." Aquí también las definiciones de **E** y **B** se relacionan entre sí por medio de $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ o por $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. El sistema electromagnético en esta forma pura prácticamente nunca se utiliza. El sistema que *sí* se utiliza mucho todavía y con el que es necesario estar bien familiarizado es el que se considera a continuación.

23-3 El sistema gausiano

Este es un sistema *CGS no racionalizado y mixto* en el sentido de que las cantidades eléctricas se miden en unidades electrostáticas mientras que las cantidades magnéticas se miden en unidades electromagnéticas. Para los propósitos presentes, baste simplemente enunciar las formas que adquieren las ecuaciones básicas en este sistema. Las ecuaciones de Maxwell en general son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_f \qquad & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_f + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{23-8}$$

donde los diversos vectores de campo se interrelacionan por medio de

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \tag{23-9}$$

y la fuerza de Lorentz es

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \tag{23-10}$$

[De (23-8) se desprende que la ecuación de continuidad sigue teniendo la forma $\nabla \cdot \mathbf{J}_f + (\partial\rho_f/\partial t) = 0$.]

Cuando son aplicables, las diversas ecuaciones constitutivas se deben escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu \qquad \mathbf{J}_f = \sigma\mathbf{E} \\ \mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E} \qquad \mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H} \end{aligned} \tag{23-11}$$

de manera que

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e \qquad \mu = 1 + 4\pi\chi_m \tag{23-12}$$

Resulta fácil observar que las expresiones que implican los potenciales quedan como

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{23-13}$$

mientras que las fórmulas relevantes de energía son

$$u = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) \tag{23-14}$$

donde la primera se aplica a medios lineales.

De lo anterior se desprende que todos los vectores de campo **E**, **D**, **B**, **H**, **P** y **M** tienen las *mismas dimensiones;* desde luego, esto no ha impedido que la gente les dé *nombres* diferentes a las *unidades.* Esto resulta más evidente con las cantidades magnéticas, y las de uso más común son como sigue: **B**, gauss; **H**, oersted; **M**, oersted (pero véase la siguiente sección); Φ, 1 gauss- (centímetro)^2 = 1 maxwell.

De (23-9) se desprende también que en el vacío $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Las cantidades ϵ, μ, χ_e y χ_m no tienen dimensiones; sus valores numéricos se dan en la siguiente sección.

Más aún, no resulta difícil encontrar en uso sistemas gausianos "modificados." El más común es justamente como el descrito, *excepto* en que mientras que la carga se sigue midiendo en estatcoulombs (uee), la corriente se mide en abamperes (uem). Lo que de hecho ocurre con esto es un reemplazo de cualquiera que sea el símbolo que se use para la corriente, por c multiplicada por ese símbolo (por ejemplo, $\mathbf{J}_f \to c\mathbf{J}_f$). La única ecuación de Maxwell afectada por esto es la ley de Ampere y, por lo tanto, la ecuación de continuidad, que quedan

$$\nabla\times\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J}_f + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \qquad \nabla\cdot\mathbf{J}_f + \frac{1}{c}\frac{\partial\rho_f}{\partial t} = 0 \tag{23-15}$$

Por último, el sistema *Heaviside-Lorentz* no es sino un sistema gausiano racionalizado; cuando se le usa, el efecto que produce es remplazar todas las 4 π de las ecuaciones (23-8) a (23-12) por la unidad; por ejemplo, se obtienen $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f$ y $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Los factores c siguen estando presentes.

Si algún autor en particular no aclara el sistema de unidades que utiliza, es posible deducirlo al observar la forma de algunos de los resultados fundamentales, de preferencia las ecuaciones de Maxwell.

23-4 Cómo manejar el sistema gausiano

En principio, es posible derivar cualquier resultado en el sistema gausiano a partir de las ecuaciones de Maxwell (23-8) y utilizando las expresiones (23-9) a (23-13) según se requiera. Esto no siempre resulta muy conveniente, por lo que sería conveniente contar con algún método que permita transformar un resultado dado en el sistema gausiano a su correspondiente en el sistema MKSA y *viceversa.* La tabla 23-1 proporciona la receta para lograrlo. Para usar esta tabla se remplaza un símbolo en la columna marcada para el sistema en que está escrita la fórmula con el símbolo o combinación de símbolos listada para el otro sistema. Los símbolos que representan cantidades esencialmente mecánicas no cambian.

Ejemplo

Transfórmese $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f$ según se da en (21-19). Según la tabla, se obtiene $\nabla\cdot[(\epsilon_0/4\pi)^{1/2}\mathbf{D}] = (4\pi\epsilon_0)^{1/2}\rho_f$, que se reduce a $\Delta\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho_f$, como se apuntó en (23-8).

Ejemplo

Transfórmese la expresión dada en (23-14) para el vector de Poynting a su forma en el MKSA. Dado que **S** es un flujo de energía, no cambia, y al ir de la columna gausiana a la del MKSA se obtiene

$$\mathbf{S}=\frac{(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}}{4\pi}\left[(4\pi\epsilon_0)^{1/2}\mathbf{E}\times(4\pi\mu_0)^{1/2}\mathbf{H}\right]=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

que es justamente (21-59).

El uso de la tabla 23-1 suele producir algún error cuando ésta se aplica a una ecuación en sistema gaussiano que se ha derivado para el *vacío*. La razón es que, como en este caso $\mathbf{D}=\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}=\mathbf{H}$, existe una tendencia a utilizar estos símbolos intercambiados indis-

Tabla 23-1

Conversión de símbolos en las ecuaciones.

Los símbolos que representan cantidades esencialmente mecánicas (longitud, masa, tiempo, fuerza, trabajo, energía, potencia, etc.) no cambian (ni tampoco sus derivadas) Para convertir una ecuación escrita en el sistema MKSA a la correspondiente en el sistema gaussiano, reemplazar el símbolo bajo la columna MKSA por el listado bajo la columna gaussiana. Se puede utilizar la tabla también para pasar una ecuación gaussiana al sistema MKSA yendo de derecha a izquierda en ella.

CANTIDAD	MKSA	GAUSSIANO
Capacitancia	C	$4\pi\epsilon_0 C$
Carga	q	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}q$
Densidad de carga	ρ, (σ,λ)	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}\rho$, (σ,λ)
Conductividad	σ	$4\pi\epsilon_0\sigma$
Corriente	I	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}I$
Densidad de corriente	$\mathbf{J}$, $(\mathbf{K})$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}\mathbf{J}$, $(\mathbf{K})$
Constante dieléctrica	κ_e	ϵ
Momento dipolar (eléctrico)	$\mathbf{p}$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}\mathbf{p}$
Momento dipolar (magnético)	$\mathbf{m}$	$(4\pi/\mu_0)^{1/2}\mathbf{m}$
Desplazamiento	$\mathbf{D}$	$(\epsilon_0/4\pi)^{1/2}\mathbf{D}$
Campo eléctrico	$\mathbf{E}$	$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2}\mathbf{E}$
Inductancia	L	$(4\pi\epsilon_0)^{-1}L$
Campo magnético	$\mathbf{H}$	$(4\pi\mu_0)^{-1/2}\mathbf{H}$
Flujo magnético	Φ	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}\Phi$
Inducción magnética	$\mathbf{B}$	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}\mathbf{B}$
Magnetización	$\mathbf{M}$	$(4\pi/\mu_0)^{1/2}\mathbf{M}$
Permeabilidad	μ	(1) $\kappa_m\mu_0$, entonces (2) $\kappa_m\rightarrow\mu$
Permeabilidad (relativa)	κ_m	μ
Capacidad inductiva específica	ϵ	(1) $\kappa_e\epsilon_0$, entonces (2) $\kappa_e\rightarrow\epsilon$
Polarización	$\mathbf{P}$	$(4\pi\epsilon_0)^{1/2}\mathbf{P}$
Resistencia	R	$(4\pi\epsilon_0)^{-1}R$
Resistividad	ρ	$(4\pi\epsilon_0)^{-1}\rho$
Potencial escalar	ϕ	$(4\pi\epsilon_0)^{-1/2}\phi$
Velocidad de la luz	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$	c
Susceptibilidad	χ_e, (χ_m)	$4\pi\chi_e$, (χ_m)
Potencial vectorial	$\mathbf{A}$	$(\mu_0/4\pi)^{1/2}\mathbf{A}$

criminadamente, lo que resulta en ambigüedades debidas a que los factores de conversión de la tabla 23-1 son diferentes para los miembros de cada uno de estos pares. Por ejemplo, resulta muy común encontrar esa situación en la ecuación que conecte el campo con el potencial vectorial, normalmente escrito como $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, la cual se ve rápidamente que no se transforma por medio de la tabla a la ecuación MKSA correspondiente $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, aunque sí resulta $\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ que es correcta *para el vacío.*

La cuestión de convertir la *forma* de una ecuación es diferente de la de convertirlos *valores numéricos* de una cantidad física dada, de un sistema de unidades a otro. Por ejemplo, los datos están dados numéricamente en unidades gaussianas y es necesario sustituir sus *valores numéricos* equivalentes en una fórmula MKSA, o al revés. En este caso se requiere de una tabla de conversión numérica, siendo la tabla 23-2 adecuada para la

Tabla 23-2 Tabla de conversión para valores numéricos

CANTIDAD	MKSA	GAUSSIANO
Longitud	1 metro (m)	10^2 centímetros (cm)
Masa	1 kilogramo	10^3 gramos
Tiempo	1 segundo	1 segundo
Fuerza	1 newton	10^5 dinas
Trabajo, energía	1 joule	10^7 ergs
Potencia	1 watt	10^7 ergs/segundo
Capacitancia (C)	1 farad	9×10^{11} estatfarads
Carga (q)	1 coulomb	3×10^9 estatcoulombs
Densidad de carga (ρ)	1 coulomb/m^3	3×10^3 estatcoulombs/cm^3
Conductividad (σ)	1 (ohm-m)$^{-1}$	9×10^9 (estatohm-cm)$^{-1}$
Corriente (I)	1 ampere	3×10^9 estatamperes $= 10^{-1}$ abamperes
Densidad de corriente (**J**)	1 ampere/m^2	3×10^5 estatamperes/cm^2
Desplazamiento (**D**)	1 coulomb/m^2	$12\pi \times 10^5$ estatvolts/cm
Campo eléctrico (**E**)	1 volt/m	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$ statvolt/cm
Inductancia (**L**)	1 henry	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$ estathenrys
Campo magnético (**H**)	1 ampere/m	$4\pi \times 10^{-3}$ oersted
Flujo magnético (Φ)	1 weber	10^8 maxwells
Inducción magnética (**B**)	1 weber/m^2 = 1 tesla	10^4 gauss
Magnetización (**M**)	1 ampere/m	10^{-3} oersted
Polarización (**P**)	1 coulomb/m^2	3×10^5 statvolt/cm
Potencial (ϕ)	1 volt	$\frac{1}{300}$ estatvolts
Resistencia (R)	1 ohm	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$ estatohms

mayoría de las situaciones. En cada renglón se da la misma cantidad expresada en diferentes unidades; es decir, los términos de cada renglón son iguales. Los diversos factores 3 que aparecen provienen del uso de $c = 3 \times 10^8$ metros/segundo; esto no se aplica a potencias de 10. Otras conversiones que se requieran pueden derivarse con el método tradicional de multiplicar por el número uno expresado por una relación apropiada y cancelar las unidades; por ejemplo, se puede escribir $1 = 10^3$ gramos/1 kilogramo.

Aunque **H** y **M** se miden ambos en ampere/metro en el sistema MKSA, se puede observar que los factores de conversión a oersteds son diferentes para cada uno de ellos; esto es consecuencia del 4π de (23-9), aplicándose una observación similar para el caso

de **D** y **P**. No es difícil encontrar la magnetización expresada en gauss, en lugar de oersteds; en la mayoría de tales casos, el autor *realmente* quiere decir "oersteds", pudiéndose con seguridad simplemente cambiarle el nombre y usar el factor dado en la tabla para **M**. En contadas ocasiones, el autor *realmente* quiere decir "gauss"; lo que normalmente significa esto es que él o ella tiene en mente una definición MKSA del momento dipolar magnético igual a μ_0 veces la expresión (19-20); esto haría que la relación entre los vectores magnéticos tome la forma $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$ en lugar de (21-24). En ese caso, sería apropiado medir **B** y **M** en las mismas unidades; sin embargo, esta situación es muy rara.

Cuando se buscan los valores numéricos de las cantidades permeabilidad, constante dieléctrica y susceptibilidad, es muy común encontrarlos expresados en unidades gausianas. Las relaciones numéricas entre estos parámetros en los dos sistemas son:

$$\kappa_{e\,\text{MKSA}} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)_{\text{MKSA}} = \epsilon_{\text{Gausiano}} \tag{23-16}$$

$$\kappa_{m\,\text{MKSA}} = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)_{\text{MKSA}} = \mu_{\text{Gausiano}} \tag{23-17}$$

$$\chi_{\text{MKSA}} = 4\pi\chi_{\text{Gausiano}} \tag{23-18}$$

donde la última relación es válida tanto para χ_e como para χ_m. (Véase también el ejercicio 20-17).

Ejercicios

23-1 Utilizando (23-6), expresar las dimensiones de un estatcoulomb en función de centímetros, gramos y segundos. De menera similar, utilizar (23-7) para hacer lo mismo con el abampere.

23-2 Demostrar que 1 estatcoulomb/(centímetro)^2 = 1 estatvolt/centímetro. Demostrar también que 1 estatfarad = 1 centímetro y que 1 estatohm = 1 segundo/centímetro.

23-3 Demostrar que todas las ecuaciones (23-8) a (23-13) pueden obtenerse si se aplica la tabla 23-1 a las ecuaciones MKSA correspondientes.

23-4 A partir de las ecuaciones expresadas en forma gausiana, derivar las ecuaciones diferenciales que **A** y Φ satisfacen y la condición de Lorentz para un medio i.h.l. Verificar que son las mismas que se obtienen por medio de la tabla 23-1.

23-5 Utilizar (23-8) y (23-9) para obtener la capacitancia de un capacitor de placas paralelas con superficie de placas igual a **A** y separación d, y vacío entre las placas. Verificar que el resultado obtenido es consistente con la tabla 23-1 y el ejercicio 23-2.

23-6 Utilizar (23-8) para demostrar que la fem inducida se expresará en unidades gausianas como $\mathcal{E} = -c^{-1}(d\Phi/dt)$. Si la autoinductancia se define también de la manera usual como $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$, demostrar que la análoga de (17-55) debe ser $L = \Phi/cI$. Demostrar entonces que 1 unidad gausiana de inductancia = 1 estathenry = 1 (segundo)^2/centímetro. Utilizar ahora (23-8) y (23-9) para encontrar la autoinductancia de una longitud de un solenoide ideal infinitamente largo de sección S, de n vueltas por unidad de longitud y con vacío en su interior. Verificar que el resultado es consistente con la tabla 23-1 y el resultado anterior por lo que se refiere a sus dimensiones.

23-7 Utilizar (23-8) y (23-11) para derivar el teorema de Poynting para un medio isotrópico lineal, y así demostrar que los resultados dados en (23-14) son adecuados.

23-8 Como un ejercicio numérico sencillo en el uso de la tabla 23-2, suponer que **H** y **M** son paralelos y que tienen los valores de α ampere/metro y β ampere/metro respectivamente, siendo α y β números. Encontrar **B** en weber/(metro)^2, **B** en gauss, **H** en oersted, y **M**

en oersted. Demostrar que cuando los valores encontrados para **H** y **M** se sustituyen en (23-9) se obtiene el mismo valor de **B** que se logró por conversión directa de **B** mismo.
23-9 Verificar que (23-16) a (23-18) son correctas. (Clave: como en el ejercicio anterior, tomar un valor numérico específico para la cantidad apropiada y realizar todas las conversiones.)

Capítulo 24 Ondas planas

El principio, se acepta que cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell que satisfaga condiciones de frontera dadas en un posible campo electromagnético que podría ser producido por una distribución apropiada de cargas y corrientes. Sin embargo, en la práctica no resulta conveniente tratar de resolver ecuaciones de Maxwell indiscriminadamente, sino buscar soluciones de algún tipo en particular, o aquéllas que parezcan ser apropiadas para la situación de interés en un momento dado. En primer lugar se estudian varios ejemplos de este último procedimiento para campos que dependen del tiempo, postergando de momento la cuestión de cómo se podrían producir dichos campos en caso de que se deseara hacerlo.

En el resto de éste libro, a excepción de algunas partes del apéndice B, se supone que los medios con los que se trata son isotrópicos lineales y homogéneos en todas sus propiedades.

24-1 Ecuaciones separadas para E y para B

Para empezar, supóngase que no existen cargas o corrientes libres externas en la región de interés, es decir, que se toma $\rho_f = 0$ y $\mathbf{J}_f' = 0$. En este caso (21-45) quedan como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{24-1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{24-2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{24-3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{24-4}$$

Se puede eliminar uno de los campos de la siguiente manera. Si se toma el rotacional de (24-2) y se utilizan (1-122), (24-1) y (24-4), se encuentra que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B} = -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

o sea

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{24-5}$$

De exactamente la misma manera, $\Delta \times (\Delta \times \mathbf{B})$ conduce a

$$\nabla^2\mathbf{B} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{24-6}$$

Se puede observar que **E** y **B** por separado satisfacen la misma ecuación. Así, si $\psi(\mathbf{r}, t)$ es *cualquiera* de las seis componentes rectangulares de **E** y **B**, se encuentra que

$$\nabla^2\psi - \mu\sigma\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{24-7}$$

de modo que, de hecho, únicamente se tiene una ecuación escalar por resolver.

Sin embargo, este último resultado *no* significa que se pueda tomar *cualesquiera* seis soluciones arbitrarias de (24-7), llamarles E_x, E_y,..., B_z, de cualquier manera y considerar que el resultado sea un posible campo electromagnético. La razón es que los campos deben de todas formas satisfacer las ecuaciones de Maxwell dadas arriba, lo que impone ciertas restricciones sobre **E** y **B**. Esto ha ocurrido porque se derivaron las ecuaciones de Maxwell para obtener (24-5) a (24-7) y durante el proceso de derivación siempre se pierde algo de información. Sin embargo, se puede continuar de esa manera aunque finalmente se tenga que satisfacer (24-1) a (24-4) también.

Resulta aquí conveniente tratar de simplificar un poco las cosas.

24-2 Ondas planas en medios no conductores

En primer lugar supongase que el medio no es conductor, es decir, $\sigma = 0$; entonces (24-7) toma la forma

$$\nabla^2\psi - \mu\epsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{24-8}$$

que se conoce como la *ecuación de onda tridimensional.* Aunque más adelante se regresará a (24 - 8), búsquese ahora una función ψ del tipo especial $\psi = \psi(z,t)$. En otras palabras, que para cualquier t. ψ es independiente de x y y, de modo que dado cualquier valor de z, ψ es constante sobre el correspondiente plano infinito paralelo al plano xy; uno de tales planos se indica en la figura 24-1. En este caso (24-8) se vuelve

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{24-9}$$

que es la *ecuación de onda unidimensional.*

En esencia, el término *onda* se utiliza para describir una configuración (o forma) que se propaga, es decir, que viaja. Así, una función $f(z,t) = f(z-vt)$, en la que z y t aparecen *únicamente* en la combinación $z - vt$, siendo v una constante, puede tomarse como una onda que viaja en el sentido positivo de la dirección z a velocidad v. (A esto se le llama una

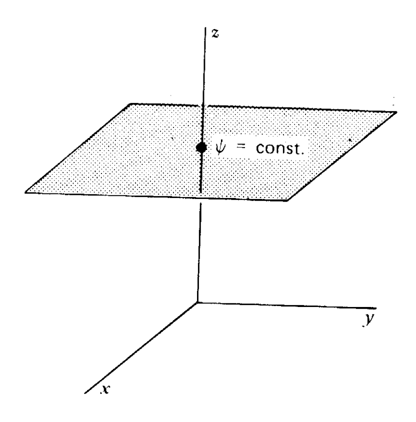


Figura 24-1 Un plano de ψ costante paralelo al plano xy.

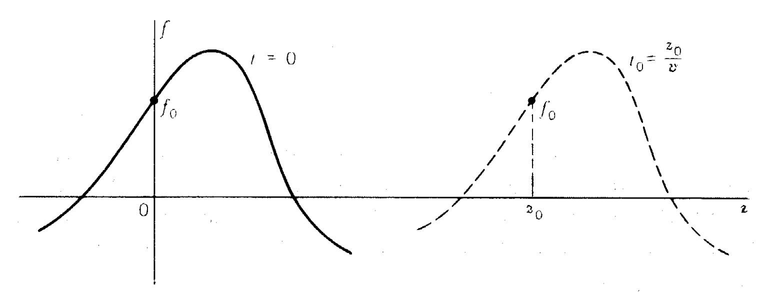


Figura 24-2 La configuración a $t = 0$ se ha desplazado una distancia z_0 en un tiempo t_0.

onda plana porque f es constante sobre el plano z = const.). Se puede verificar lo anterior por medio de la figura 24-2. Considérese el valor de f en $t = 0$ y $z = 0$: $f(0) = f_0$. En un tiempo posterior, t_0, f volverá a tener el mismo valor f_0 en una nueva posición z_0 tal que el argumento vuelva a ser igual a cero, es decir, $f(z_0 - vt_0) = f_0 = f(0)$, de modo que

$$z_0 = vt_0 \tag{24-10}$$

En otras palabras, el valor particular $f = f_0$, que apareció en $z = 0$ y $t = 0$, se han movido ahora a la nueva posición z_0 dada por (24-10), es decir, a un punto alcanzado al viajar con velocidad constante v. Se pueden hacer observaciones similares con respecto a los valores de f en $t = 0$, siendo el resultado neto que toda la configuración se ha movido en la dirección positiva de z una distancia vt_0. De manera similar, se puede demostrar que $g(z + vt)$ representa una onda de forma arbitraria que se mueve en la dirección negativa de z, es decir, hacia la izquierda, con rapidez v y por lo tanto con una velocidad $-v$.

Se desea aquí demostrar que es posible demostrar una solución completamente general de (24-9) en la forma

$$\psi(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt) \tag{24-11}$$

donde f y g son funciones arbitrarias. Para lograrlo, sea $w = z - vt$; así, se puede escribir $f = f(w)$, encontrándose que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{df}{dw} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{d^2 f}{dw^2}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d^2 f}{dw^2}$$

mientras que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = -v\frac{df}{dw} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v\frac{d^2 f}{dw^2}\frac{\partial w}{\partial t} = v^2\frac{d^2 f}{dw^2}$$

Al sustituir estos resultados en (24-9) se obtiene

$$(1 - v^2\mu\epsilon)\frac{d^2 f}{dw^2} = 0$$

que demuestra que $f(z - vt)$ es una solución siempre que $v^2\mu\epsilon = 1$, o sèa que

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{24-12}$$

De manera similar puede demostrarse que $g(z + vt)$ es una solución de (24-9), con v dada por la misma expresión (24-12). De esta manera se puede ver ya que los campos electromagnéticos pueden tomar la forma de ondas planas que propagan en la dirección z, estando la velocidad de las ondas determinada *exclusivamente* por las propiedades electromagnéticas del medio, dadas por el producto $\mu\epsilon$.

Es común expresar (24-12) de una manera algo diferente; si se utilizan (10-53), (20-55) y (23-5), se ve que se puede escribir

$$v = \frac{c}{n} \tag{24-13}$$

$$n = \sqrt{\kappa_e \kappa_m} \tag{24-14}$$

donde n recibe el nombre de *índice de refracción* del medio, y es una cantidad sin dimensiones. Para el vacío, $n = 1$ y la velocidad de la onda es simplemente c, que, como ya se hizo notar tras (23-4), es igual a la velocidad medida para la luz en el vacío. Maxwell fue el primero en obtener este resultado y tanto él como otros muchos desde entonces lo han tomado como una fuerte evidencia de que las ondas de luz son realmente ondas electromagnéticas. Desde los tiempos de Maxwell se ha acumulado una gran cantidad de evidencia adicional en apoyo a esta idea–tanta de hecho, que hoy en día se acepta universalmente como cierta. Lo que es más, el concepto de ondas electromagnéticas se han extendido mucho más allá de la mera descripción de la luz visible, tanto en forma experimental como teórica.

Al sustituir (24-12) en (24-9) se encuentra que la ecuación de onda se puede expresar en la forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{24-15}$$

Aunque se sabe que (24-11) representa una solución general de esta ecuación, resulta muy general para el propósito presente, por lo que deben considerarse otras soluciones de forma más específica. Para tener una idea del tipo que se desea estudiar, tómese de nuevo

la ecuación (24-15) y aplíquese a ella el método de separación de variables que resultó tan útil en las secciones 11-4 y 11-5; en otras palabras, inténtese con la forma $\psi(z,t)=Z(z)T(t)$. Al sustituir esto en (24-15), dividir después entre ZT y proceder de la manera normal, se encuentra que

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{v^2T}\frac{d^2T}{dt^2}=\text{const.}=-k^2$$

Se tienen así dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2Z=0 \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2T=0 \tag{24-16}$$

donde

$$k^2=\frac{\omega^2}{v^2} \tag{24-17}$$

Las soluciones generales para (24-16) pueden escribirse como $Z_k(z)=\alpha_k e^{ikz}+\beta_k e^{-ikz}$ y $T_k(t)=\gamma_k e^{i\omega t}+\delta_k e^{-i\omega t}$ donde α_k β_k, γ_k, y δ_k son constantes e $i=\sqrt{-1}$. Si se multiplican estos dos resultados entre sí se obtiene una solución de la ecuación de onda para este valor particular de k y la ω correspondiente dada en (24-17). Dado que bien puede haber varios valores aceptables de k, y debido a que (24-15) es una ecuación diferencial lineal, la suma de soluciones de esta misma forma es también una solución. Por lo tanto, si se suman estos productos Z_kT_k con respecto a todos los posibles valores de k, se obtendrá la solución general de la ecuación de onda, la cual tiene la forma

$$\psi(z,t)=\sum_k\left[\alpha_k\delta_k e^{i(kz-\omega t)}+\beta_k\gamma_k e^{-i(kz-\omega t)}\right]$$
$$+\sum_k\left[\alpha_k\gamma_k e^{i(kz+\omega t)}+\beta_k\delta_k e^{-i(kz+\omega t)}\right] \tag{24-18}$$

Por medio de (24-17) se puede observar que los argumentos de los términos exponenciales son todos de la forma $kz\mp\omega t=k[z\mp(\omega/k)t]=k(z\mp vt)$, de modo que ψ se parece ahora a (24-11) y, de hecho, la primera suma de (24-18) puede identificarse con f, mientras que la segunda suma es igual a g. Se ha encontrado así que la solución de la ecuación de onda unidimensional puede expresarse como una superposición de ondas planas sinusoidales.

Se puede reducir aún más la complejidad de (24-18). Considérese el término que abarca a $e^{i(kz-\omega t)}$; por razones que resultarán evidentes más adelante, siempre se toma a ω como una cantidad positiva. Si resulta que también k es positiva, esta forma representa una onda plana que viaja en la dirección positiva de z a velocidad $v=\omega/k$. Si k es negativa, se puede escribir $k=-|k|$, llegándose a la forma $e^{-i(|k|z+\omega t)}$, la cual es una onda plana en la dirección negativa de z a velocidad $v=\omega/|k|$. Por lo tanto, es lo que concierne al primer término de cada una de las sumas de (24-18), lo único que se necesita considerar viene siendo la forma simple $e^{i(kz-\omega t)}$, y el *signo* de k (positivo o negativo) indicará el sentido del movimiento de la onda. Los otros términos exponenciales de (24-18) son simplemente los conjugados complejos de los que se acaban de estudiar, teniendo también la forma apropiada. De acuerdo con todo esto, para el presente propósito será suficiente

estudiar el comportamiento de *una sola* onda plana prototipo para un valor particular de k (y la ω correspondiente), que puede tomarse como la de la forma

$$\psi(z,t)=\psi_0 e^{i(kz-\omega t)} \tag{24-19}$$

donde ψ_0 es una constante; la solución general se puede construir como la suma de los términos encontrados a partir de ésta, como se muestra en (24-18). [La forma (24-19) es la forma normal de representar una onda plana en física; sin embargo, en algunos otros libros el término exponencial se escribe como $e^{i(\omega t - kz)}$, es decir, como la conjugada compleja de (24-19). Además, muy a menudo se suele encontrar la notación j en lugar de i para $\sqrt{-1}$. Hablando en términos generales, pueden compararse los resultados si se reemplaza la i por $-i$ por $\pm j$, según sea el caso].

Dado que ψ representa una componente de **E** o **B**, es una cantidad física y por lo tanto debe ser *real*. Sin embargo, resulta más conveniente manejar funciones exponenciales que funciones con senos y cosenos, de modo que resulta práctica común seguir escribiendo ψ en la forma (24-19), suplementando este procedimiento con una convención: si ψ (o **E** o **B**) se escribe o se encuentra en forma compleja, se toma la *parte real* como la solución significativa desde el punto de vista físico, es decir,

$$\psi_{\text{física}}=\text{Re}\,\psi=\text{Re}\left[\psi_0 e^{i(kz-\omega t)}\right] \tag{24-20}$$

(Esta convención resulta posible porque la ecuación de la onda es lineal, de modo que la parte real de ω y su parte imaginaria son soluciones separadas). Dado que por lo general la amplitud ψ_0 es en sí misma compleja, resulta útil contar con formas explícitas para la parte real. Si se escribe ψ_0 en función de su parte real, ψ_{0R}, y de su parte imaginaria,

$$\psi_0=\psi_{0R}+i\psi_{0I} \tag{24-21}$$

y se utilizan

$$e^{iu}=\cos u+i\,\text{sen}\,u \qquad e^{-iu}=\cos u-i\,\text{sen}\,u \tag{24-22}$$

se encuentra que (24-19) se vuelve $\psi=(\psi_{0R}+i\psi_{0I})[\cos(kz-\omega t)+i\,\text{sen}(kz-\omega t)]$, de modo que

$$\text{Re}\,\psi=\psi_{0R}\cos(kz-\omega t)-\psi_{0I}\,\text{sen}(kz-\omega t) \tag{24-23}$$

Otro maneral útil de expresar un número complejo es en función de una amplitud real, ψ_{0a}, y un ángulo de face ϑ:

$$\psi_0=\psi_{0a}e^{i\vartheta} \tag{24-24}$$

Se observa que estas diversas cantidades están relacionadas entre sí por

$$\begin{aligned}\psi_{0R}&=\psi_{0a}\cos\vartheta \qquad \psi_{0I}=\psi_{0a}\,\text{sen}\,\vartheta\\ \psi_{0a}&=(\psi_{0R}^2+\psi_{0I}^2)^{1/2} \qquad \tan\vartheta=\frac{\psi_{0I}}{\psi_{0R}}\end{aligned} \tag{24-25}$$

Cuando se constituye (24-24) en (24-19) ésta se convierte en $\psi = \psi_{0a} e^{i(kz - \omega t + \vartheta)}$ de modo que

$$\text{Re}\psi = \psi_{0a} \cos(kz - \omega t + \vartheta) \tag{24-26}$$

que muy a menudo resulta ser una forma conveniente. Así, una amplitud compleja ψ_0 significa que existe un factor de fase, ϑ, en la onda plana sinusoidal.

La ecuación 24-26 muestra, por ejemplo, que una onda plana sinusoidal es periódica tanto en el espacio como en el tiempo. Al período espacial, λ, se le denomina *longitud de onda,* y el período temporal, T, está relacionado con la frecuencia ν por $T = 1/\nu$. Estas cantidades pueden relacionarse con k y con ω como sigue: Dado que el período de un coseno es 2π, la función de (24-26) se repetirá siempre que su argumento cambie por 2π. Por lo tanto, para una t fija, $\Delta|(kz - \omega t + \vartheta)| = 2\pi = |k\vartheta z| = |k|\lambda$ de modo que $|k| = 2\pi/\lambda$. De manera similar, para una posición fija, $\Delta|(kz - \omega t + \vartheta)| = 2\pi = \omega\ \Delta t = \omega T$ y $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$. Por tanto, las relaciones son

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{24-27}$$

Según (24-17), se tiene que $|k| = \omega/v$ y cuando (24-27) se combina con esto se obtiene el conocido resultado para una onda plana sinusoidal

$$v = \nu\lambda \tag{24-28}$$

A la cantidad k se le denomina la *constante de propagación* y se mide en (metros)$^{-1}$; ω es la frecuencia (angular) y se mide en (radianes)/segundo, mientras que ν se mide en hertz como ya se vio justo antes de (17-14). Como resultado de todas estas relaciones, existe una gran variedad de maneras en que se pueden expresar las ecuaciones relacionadas con una onda plana; por lo general, aquí se seguirá utilizando (24-19) por economía en la notación.

El argumento de la exponencial, $kz - \omega t$, recibe el nombre de *fase* de la onda, de modo que la velocidad v viene a ser la rapidez a la que un valor definido de esta fase viaja; de acuerdo con esto, a v se le conoce como *velocidad de fase.*

Las tres características de la onda (k,ω,ν) se relacionan en el resultado anterior (24-17). Las propiedades del medio determinan v, según (24-12); así, las otras dos (k y ω) no pueden ser escogidas de manera independiente. Dado que ω (o ν) se determina por lo general por la fuente que produce la onda, es costumbre tomar a la frecuencia como la variable independiente que caracteriza la onda, de modo que k se vuelve la variable dependiente del conjunto.

Puesto que se ha decidido considerar sólo la forma (24-19) de ψ, todas las componentes de **E** y **B** tendrán también esta forma, es decir, para una onda plana sinusoidal se tendrá

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(kz - \omega t)} \tag{24-29}$$

donde $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{B}_0$ son amplitudes vectoriales *constantes* apropiadas que deben relacionarse entre sí de manera que satisfagan las ecuaciones de Maxwell. Estas formas permiten sim-

plificar la expresión de esas ecuaciones. Dado que ψ es una función únicamente de z y de t, se encuentra a partir de (24-19) que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = ik\psi \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega\psi \tag{24-30}$$

y por lo tanto $\nabla\cdot \mathbf{E} = \partial E_z/\partial_z = ikE_z$ y $\nabla\cdot\mathbf{B} = ikB_z$. De manera similar se encuentra que $\nabla \times \mathbf{E} = ik(-E_y\hat{\mathbf{x}} + E_x\hat{\mathbf{y}})$, con una expresión correspondiente para $\nabla \times \mathbf{B}$; también se tiene que $\partial\mathbf{B}/\partial t = -i\omega\mathbf{B}$. Sustituyendo estas expresiones en (24-1) a (24-4), haciendo $\sigma = 0$ y utilizando (24-12), se encuentra que las ecuaciones de Maxwell para una onda plana que viaja a una dirección z en un medio no conductor son

$$\begin{aligned} kE_z &= 0 \qquad & kB_z &= 0 \\ k(-E_y\hat{\mathbf{x}} + E_x\hat{\mathbf{y}}) &= \omega\mathbf{B} \qquad & k(-B_y\hat{\mathbf{x}} + B_x\hat{\mathbf{y}}) &= -\frac{\omega}{v^2}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{24-31}$$

Se les puede escribir en forma más compacta y útil si se observa que $E_z = \hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{E}$ y que $-E_y\hat{\mathbf{x}} + E_x\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$, con expresiones similares para $\mathbf{B}$; así, es posible escribir (24-31) como

$$\begin{aligned} k\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{E} &= 0 \qquad & k\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{B} &= 0 \\ k\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E} &= \omega\mathbf{B} \qquad & k\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{B} &= -\frac{\omega}{v^2}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{24-32}$$

recordando que la dirección de propagación está dada por $\mp\hat{\mathbf{z}}$, según sea el signo *de* k.

Supóngase que $k = 0$; en este caso es posible que $E_z \neq 0$ y que $B_z \neq 0$ Pero de (24-17) se observa que en este caso $\omega = 0$ también, de modo que, de hecho, se tiene una situación *estática*. Aunque esto es posible, no es de primordial interés aquí.

Para un caso *no estático*, $\omega \neq \nabla 0$ y por lo tanto $k \neq \nabla 0$. Se ve entonces que según las dos primeras ecuaciones de (24-32) se debe tener que $E_z = 0$ y B_{x0}. Por lo tanto, ni $\mathbf{B}$ ni $\mathbf{E}$ tienen componentes en la dirección de propagación, es decir, que tanto $\mathbf{B}$ como $\mathbf{E}$ son perpendiculares a ella; en otras palabras, la onda electromagnética plana es una onda *transversal.* De $k\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$ se observa que $\mathbf{B}$ es perpendicular a $\mathbf{E}$, lo que también se desprende de la última ecuación de (24-32). Todo esto significa que los dos vectores forman un conjunto mutuamente perpendicular; esta situación se ilustra en la figura 24-3 k positiva. Como también se indica en la figura, el vector de Poynting $S = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu$ está en la dirección de propagación. Si se resuelve la tercera ecuación de (24-32) y se utiliza (24-17), se encuentra que

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E} = \frac{1}{v}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E} \tag{24-33}$$

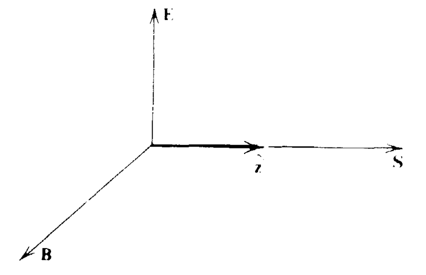


Figura 24-3 Relaciones entre vectores de campo, dirección de propagación y flujo de energía para una onda plana transversal.

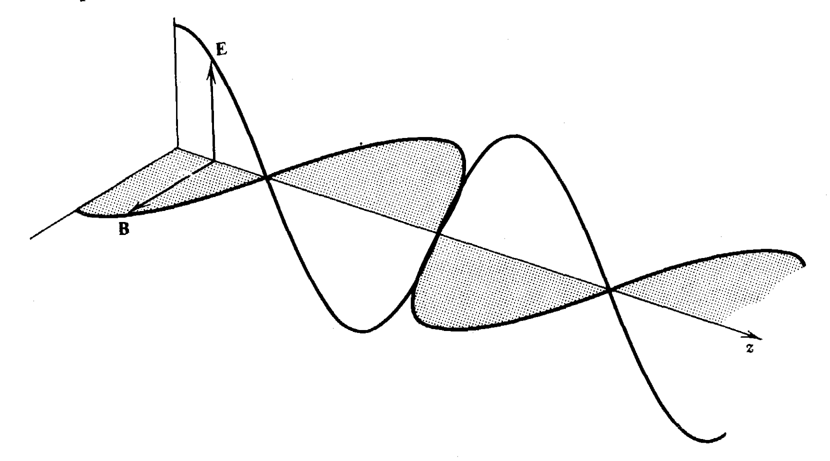


Figura 24-4 Campos de una onda plana transversal en un instante dado.

demostrando que las magnitudes de los campos se relacionan por

$$|\mathbf{B}| = \frac{k}{\omega}|\mathbf{E}| = \frac{1}{v}|\mathbf{E}| = \sqrt{\mu\epsilon}\;|\mathbf{E}| = \frac{n}{c}|\mathbf{E}| \tag{24-34}$$

de tal forma que para el vacío, $|\mathbf{B}|/|\mathbf{E}| = 1/c$.

Según (24-29), las ecuaciones anteriores son válidas también para las amplitudes vectoriales $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{B}_0$, ya que los factores exponenciales se cancelan en ambos lados. Además, si $\mathbf{E}_0$ tiene la forma compleja $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{0a}e^{i\vartheta}$, estas relaciones también son válidas para las amplitudes reales $\mathbf{E}_{0a}$ y $\mathbf{B}_{0a}$. En consecuencia, si se requiriera tomar las partes reales de las soluciones, como se hizo en el caso de (24-26), se obtendrían

$$\mathbf{E}_{\text{real}} = \mathbf{E}_{0a}\cos(kz - \omega t + \vartheta) \qquad \mathbf{B}_{\text{real}} = \mathbf{B}_{0a}\cos(kz - \omega t + \vartheta) \tag{24-35}$$

Dado que los argumentos de los cosenos son los mismos en ambos casos, se dice que los dos campos *están en fase*—se vuelven cero juntos, alcanzan sus máximos juntos, y así sucesivamente. La figura 24-4 ilustra esta situación para k positiva y un instante definido, es decir, la figura muestra una "instantánea" de los campos en función de la distancia a lo largo de la dirección de propagación. Para un observador en un punto fijo (z = const.), la dependencia de los campos con respecto al tiempo, descrita en (24-35), puede visualizarse si se imagina que esta imagen se mueve en la dirección positiva del eje z con velocidad v. [Para simplificar se ha supuesto que **E** (y **B**) descansan siempre sobre el mismo plano, es decir, que se encuentra *linealmente polarizado;* se volverá a tocar este punto en la sección 24-7].

Aunque no se ha utilizado explícitamente la última relación de (24-32), es decir, $k\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = (\omega/v^2)\mathbf{E}$, se puede verificar fácilmente que es consistente con (24-33).

24-3 Ondas planas en medios conductores

Se supone ahora que $\sigma \neq 0$, pero se seguirá considerando que $\rho_f = 0$ y que $\mathbf{J}_f' = 0$. La ecuación apropiada para cualquier componente de **E** y **B** es ahora (24-7), que queda como

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \mu\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{24-36}$$

cuando $\psi = \psi(z,t)$. Se vuelve a intentar resolverla con una onda plana de forma (24-19) y cuando ésta se constituye en (24-36) se encuentra que k y ω deben ahora estar relacionadas entre sí por la *relación de dispersión*

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\sigma \tag{24-37}$$

en lugar de (24-17). Dado que sólo interesan aquí los campos que varían en forma armónica con el tiempo, es decir, que no se amortiguan con el tiempo, se requiere que ω sea tanto real como positiva. Por lo tanto, solamente puede satisfacerse (24-37) si k es una cantidad compleja; de acuerdo con esto se supone que k tiene la forma

$$k = \pm(\alpha + i\beta) \tag{24-38}$$

donde α y β son reales y positivos. Sustituyendo en (24-37) se obtiene

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = \omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\sigma \tag{24-39}$$

Dado que las partes real e imaginaria deben ser iguales por separado, se tienen

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2\mu\epsilon \tag{24-40}$$

$$2\alpha\beta = \omega\mu\sigma \tag{24-41}$$

donde se ha supuesto que μ, ϵ y σ son reales; en la sección 24-8 se vuelve a tocar este punto. Ahora se pueden despejar α y β, resultando

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right]^{1/2} \tag{24-42}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right]^{1/2} \tag{24-43}$$

(Nótese que cuando $\sigma = 0$ las ecuaciones anteriores se reducen a $\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega/v$ y $\beta = 0$, como debería ser).

Estos resultados se suelen expresar en función de un parámetro sin dimensiones, Q, que, por razones que se darán más adelante, se define como

$$Q = \frac{\omega\epsilon}{\sigma} \tag{24-44}$$

de manera que

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} + 1\right]^{1/2} \tag{24-45}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} - 1\right]^{1/2} \tag{24-46}$$

Más aún, muy a menudo resulta conveniente expresar k en la forma

$$k = |k| e^{i\Omega} \tag{24-47}$$

de modo que al utilizar (24-22) y (24-38) se obtiene que $k = \alpha + i\beta = |k|(\cos\Omega + i\,\mathrm{sen}\,\Omega)$ y, por lo tanto,

$$\alpha = |k| \cos\Omega \qquad \beta = |k| \,\mathrm{sen}\,\Omega \tag{24-48}$$

$$|k| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 + \frac{1}{Q^2}\right]^{1/4} \tag{24-49}$$

$$\tan\Omega = \frac{\beta}{\alpha} = Q\left[\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} - 1\right] = \sqrt{1 + Q^2} - Q \tag{24-50}$$

Ahora que se tienen todos estos resultados complicados, se tratará de descubrir qué significado tienen y, en particular, cuáles son las consecuencias físicas de una constante de propagación k compleja.

Si se sustituye $k = \alpha + i\beta$ en (24-19) se obtiene

$$\psi = \psi_0 e^{-\beta z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \tag{24-51}$$

dado que $i^2 = -1$. A una función de este tipo se le denomina *onda viajera amortiguada* porque su amplitud no es constante sino que decrece con la distancia en la dirección de propagación por el factor $e^{-\beta z}$. El origen de este término se encuentra en la conductividad, puesto que $\beta \neq 0$ solamente cuando $\sigma \neq 0$. Es evidente que esto debe estar relacionado con la pérdida de energía de la onda debida a la resistencia y a la correspondiente disipación de energía en forma de calor, y en breve se considerará esto en detalle. Si se compara la forma del término de propagación con f de (24-11), se encuentra que en este caso la velocidad está dada por

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left\{\frac{2}{[1 + (1/Q^2)]^{1/2} + 1}\right\}^{1/2} \tag{24-52}$$

y se puede observar que, en general, $v < (\mu\epsilon)^{-1/2}$ o que $v < v_{\text{no conductor}}$ debido a (24-12). Por tanto, otro de los efectos de la conductividad del medio es hacer que la onda viaje más lentamente. La longitud de onda puede calcularse de la misma manera en que se obtuvo (24-27), encontrándose que

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}\left\{\frac{2}{[1 + (1/Q^2)]^{1/2} + 1}\right\}^{1/2} \tag{24-53}$$

lo que, desde luego, está de acuerdo con (24-28). Dado que v ha disminuido, se observa que $\lambda < \lambda_{\text{no conductor}}$, de modo que la onda de la misma frecuencia tiene una longitud de onda más corta que la que tendría en un medio no conductor con el mismo valor de $\mu\epsilon$.

Puesto que, según (24-44), Q depende de la frecuencia ω, (24-52) muestra que la velocidad de onda v ya no es constante, sino que también es una función de la frecuencia, es decir, se tiene $v = v(\omega)$. A este fenómeno se le denomina *dispersión* y, por lo tanto, un medio conductor es un ejemplo de lo que se conoce como un *medio dispersivo*. Para entender la principal consecuencia de este hecho, supóngase que se está manejando un campo mucho más complicado, descrito como una superposición de ondas viajeras sinusoidales como, por ejemplo, la primera suma de (24-28). Dado que k ya no es constante sino una función de ω, cada una de las ondas componentes de la suma viajará a una velocidad diferente, de modo que en un tiempo posterior el valor numérico de la superposición en una z dada será diferente, es decir, la *forma* de la superposición habrá variado. Muy a menudo se suele describir este fenómeno diciendo que la superposición altera su forma a medida que se propaga.

A partir del factor de amortiguamiento $e^{-\beta z}$ en (24-51) se puede deducir que la distancia en la que la amplitud disminuye por un factor $1/e$ es igual a $\Delta_z = 1/\beta$. Esta cantidad es normalmente representada por δ y recibe el nombre de *distancia de atenuación* o *profundidad de penetración*, siendo una medida muy conveniente del amortiguamiento, ya que se puede pensar que la onda ha desaparecido básicamente después de viajar unos cuantos valores de δ. Resulta posible expresar esto de diversas maneras por medio de (24-41), (24-52), (24-53) y (24-28):

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2\alpha}{\mu\sigma\omega} = \frac{2}{\mu\sigma v} = \frac{4\pi}{\mu\sigma\omega\lambda} = \frac{2}{\mu\sigma\nu\lambda} \tag{24-54}$$

donde λ es la longitud de onda *en el medio*.

Para completar las cosas es necesario verificar que todas las conclusiones expuestas son también válidas para ondas que viajan en la dirección negativa de z. Al sustituir $k = -(\alpha + i\beta)$ en (24-19) se encuentra que

$$\psi = \psi_0 e^{\beta z} e^{-i(\alpha z + \omega t)} \tag{24-55}$$

y, si se le compara con (24-11), se observa que sí representa una onda que viaja a la dirección correcta con la misma velocidad $v = \omega/q$ que se encontró en (24-52). Además, dado que los valores de z están ahora *disminuyendo*, el factor exponencial $e^{\beta z}$ decrecerá también a medida que la onda progresa, de modo que se sigue representando una atenuación.

Existe todavía otra manera muy interesante y a menudo muy útil de describir e interpretar los resultados obtenidos. Si se realiza una comparación puramente formal entre (24-19), (24-11) y (24-13) es posible observar que siempre se puede definir una "velocidad de onda", V, y un "índice de refracción", N, mediante

$$V = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\alpha + i\beta} = \frac{\omega}{|k|} e^{-i\Omega} \tag{24-56}$$

$$N = \frac{c}{V} = \frac{ck}{\omega} = \left(\frac{c\alpha}{\omega}\right) + i\left(\frac{c\beta}{\omega}\right) = \frac{c}{v} + i\left(\frac{c\beta}{\omega}\right)$$
$$= n' + i\left(\frac{c\beta}{\omega}\right) \tag{24-57}$$

donde $u' = c/v$ es lo que se podría llamar el índice de refracción regular porque se reduce al valor apropiado para un no conductor según (24-14). Por lo tanto, se puede decir que

un medio absorbente ($\beta \neq 0$) es aquél que tiene un *índice de refracción complejo*, estando asociada la aparición de la parte imaginaria con la atenuación.

Hasta ahora, todo lo que se ha concluido acerca de los efectos de la conductividad se ha basado en el comportamiento de una sola componente ψ. Considérese ahora la relación entre los campos **E** y **B**. Se revisa el trabajo realizado a partir de (24-29), se observará que no hay nada que dependa de que k sea real; por tanto, las ecuaciones de Maxwell en la forma (24-32) son todavía válidas, excepto la última, que provino de (24-4) y que ahora toma la forma

$$k\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{B} = -(\mu\epsilon\omega + i\mu\sigma)\mathbf{E} \tag{24-58}$$

Por lo tanto, los campos siguen siendo transversales a la dirección de propagación, mientras que

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E} \tag{24-59}$$

otra vez, según (24-33). Todo lo que se requiere, pues, es averiguar si (24-58) se satisface. Si se sustituye en ella (24-59) y se utilizan (1-30) y $\hat{\mathbf{z}}\cdot\mathbf{E}=0$, se encuentra que se vuelve $(k^2 - \mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega)\mathbf{E} = 0$, que queda satisfecha aún con $\mathbf{E}\neq 0$ debido a la relación de dispersión (24-37). Pero ahora k es compleja, y si se utiliza la forma (24-47) en (24-59) se puede encontrar que los campos se relacionan ahora mediante

$$\mathbf{B} = \frac{|k|}{\omega}e^{i\Omega}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E} \tag{24-60}$$

Para entender el significado del factor de fase $e^{i\Omega}$ se deben encontrar las partes reales de **E** y **B**. Si en (24-29) se vuelve a escribir $\mathbf{E}_0$ como $\mathbf{E}_{0a}e^{i\vartheta}$, donde $\mathbf{E}_{0a}$ es real, y después se utiliza (24-38), se obtendrá

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{0a}e^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t+\vartheta)}\\ \mathbf{B} &= \frac{|k|}{\omega}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}_{0a}e^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t+\vartheta+\Omega)}\end{aligned} \tag{24-61}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{real}} &= \mathbf{E}_{0a}e^{-\beta z}\cos(\alpha z-\omega t+\vartheta)\\ \mathbf{B}_{\text{real}} &= \frac{|k|}{\omega}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}_{0a}e^{-\beta z}\cos(\alpha z-\omega t+\vartheta+\Omega)\end{aligned} \tag{24-62}$$

pudiéndose entonces expresar la amplitud de $\mathbf{B}_{\text{real}}$ como $\mathbf{B}_{0a} = (|k|/\omega)\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}_{0a}$. Al comparar estas expresiones con (24-35) se observa que en un medio conductor **E** y **B** *ya no están en fase* y que la diferencia de fase, Ω, es positiva, de acuerdo con (24-50). Esto significa que **E** y **B** ya no alcanzan sus mínimos y máximos juntos, ni se extinguen juntos. Se les puede comparar cuantitativamente. Supóngase que la fase, es decir, el argumento del coseno, tiene un valor definido P en una posición dada z_0 y en un tiempo t_E para el campo eléctrico, es decir, $P = \alpha z_0 - \omega t_E + \vartheta$. Entonces la inducción alcanzará el mismo *valor relativo* en este punto en un tiempo t_B cuando la fase tenga el mismo valor, de modo que

$P = \alpha z_0 - \omega t_B + \vartheta + \Omega$. Al igualar estas expresiones se encuentra que los tiempos se relacionan entre sí por medio de

$$t_B = t_E + \frac{\Omega}{\omega} > t_E \tag{24-63}$$

lo que demuestra que **B** alcanzará su máximo, por ejemplo, en este punto, después que **E**; en otras palabras, **B** *va detrás de* **E** como función del tiempo. Por otro lado, a un tiempo dado t_0, las posiciones en las que **B** y **E** tienen la misma fase se relacionan por medio de

$$z_B = z_E - \frac{\Omega}{\alpha} < z_E \tag{24-64}$$

de modo que se puede decir que **B** *va por delante* de **E** como funcion de la *posición*. Este efecto, junto con la atenuación, queda ilustrado de manera esquemática en la figura 24-5, que muestra la situación en un instante dado y para una k positiva. (Debe compararse esta figura con la figura 24-4).

Otro efecto que se desprende de (24-62) es una alteración de las magnitudes relativas, encontrándose por medio de (24-49) que

$$\frac{|\mathbf{B}_{\text{real}}|}{|\mathbf{E}_{\text{real}}|} = \frac{|k|}{\omega} = \sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)^{1/4} \tag{24-65}$$

El valor de esta relación es mayor que el valor $\sqrt{\mu\epsilon}$ que era aplicable en el caso de un no conductor, como puede verse en (24-34). Así, la magnitud de **B** comparada con la de **E** resulta relativamente mayor en un conductor que en un no conductor.

[En un sentido puramente formal, es justificado asegurar que en realidad las cosas no han cambiado. Si se usa (24-56) en (24-32) se puede expresar $\mathbf{B} = (k/\omega)\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E})/V$, y al comparar con (24-33) se observa que en ambos casos la **b** (compleja) es simplemente igual a $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$ dividida entre la "velocidad de onda" apropiada].

Todos los resultados obtenidos hasta ahora han sido exactos, aunque un tanto complicados. Resulta conveniente y útil derivar algunas aproximaciones que son aplicables a

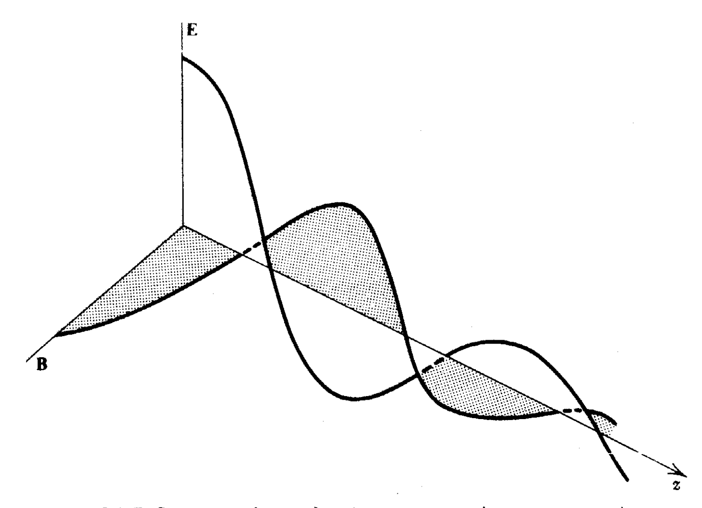


Figura 24-5 Campos de onda plana atenuada en un conductor, en un instante dado.

dos casos extremos. Este procedimiento puede realizarse más fácil en función del parámetro sin dimensiones Q que se definió en (24-44). Antes que nada, la definición no es en realidad superflua, puesto que se puede dar una sencilla interpretación física de Q. Para un campo eléctrico que varía armónicamente con el tiempo, es decir, que es proporcional a $e^{-i\omega t}$, la magnitud de la corriente de desplazamiento sera $|\partial \mathbf{D}/\partial t| = |\epsilon \partial \mathbf{E}/\partial t| = \epsilon\omega|\mathbf{E}|$, mientras que la magnitud de la corriente será $|\mathbf{J}_f| = \sigma|\mathbf{E}|$. Si ahora se multiplican el numerador y el denominador de (24-44) por $|\mathbf{E}|$, se encuentra que es también posible escribir

$$Q = \frac{|\partial \mathbf{D}/\partial t|}{|\mathbf{J}_f|} \tag{24-66}$$

de modo que se puede tomar a Q como una medida de la importancia relativa de la corriente de conducción. Resulta útil usar el valor de Q para caracterizar un material como "aislante" o como buen conductor para un valor dado de la frecuencia. De (24-44) se desprende que para una conductividad pequeña y altas frecuencias, Q será muy grande, pudiéndose decir que se trata de un aislante. Por otro lado, para una conductividad alta y bajas frecuencias, Q será muy pequeña, tratándose entonces de un buen conductor; por lo general, estos criterios son aplicables a los metales. De acuerdo con esto, se pueden tomar los casos límite que corresponden a $Q \gg 1$ y cuando $Q \ll 1$, aproximando los resultados obtenidos anteriormente para obtener fórmulas adecuadas y más fáciles de usar. Para empezar, se toma el caso más parecido al de la sección anterior.

I "Aislante" ($Q \gg 1$)

En este caso, $1/Q^2 \ll 1$, pudiéndose usar la aproximación $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ para $x \ll 1$. De esta manera, si se mantiene ya sea el término de corriente de primer orden de algo que es finito para un no conductor, o el término de primer orden de algo que se anula, los resultados obtenidos antes se vuelven, *aproximadamente,*

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right) \qquad \beta = \frac{1}{\delta} = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{2Q} = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \tag{24-67}$$

$$|k| = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right) \qquad \tan\Omega = \frac{1}{2Q} = \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \tag{24-68}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}\left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}\left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right) \tag{24-69}$$

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} = \sqrt{\mu\epsilon}\left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right) \tag{24-70}$$

y, desde luego, sólo existen pequeñas diferencias entre estos resultados y los obtenidos en la sección anterior.

II. "Buen conductor" ($Q \ll 1$)

Siguiendo un procedimiento similar, se encuentra que las expresiones aproximadas son (con términos de corrección hasta el orden Q solamente):

$$\alpha=\left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{2}Q\right) \qquad \beta=\frac{1}{\delta}=\left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}Q\right) \tag{24-71}$$

$$|k|=(\mu\sigma\omega)^{1/2} \qquad \tan\Omega=1-Q \tag{24-72}$$

$$v=\left(\frac{2\omega}{\mu\sigma}\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}Q\right) \qquad \lambda=2\pi\left(\frac{2}{\mu\sigma\omega}\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}Q\right) \tag{24-73}$$

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|}=\left(\frac{\mu\sigma}{\omega}\right)^{1/2}=\left(\frac{\mu\epsilon}{Q}\right)^{1/2} \tag{24-74}$$

Es práctica común aproximar todavía más estas fórmulas desechando los términos de corrección, obteniéndose

$$\alpha=\beta=\left(\frac{1}{2}\mu\sigma\omega\right)^{1/2} \tag{24-75}$$

$$\tan\Omega=1, \text{ de modo que } \Omega=\frac{\pi}{4} \text{ or } 45° \tag{24-76}$$

$$v=\left(\frac{2\omega}{\mu\sigma}\right)^{1/2}=\left(\frac{2Q}{\mu\epsilon}\right)^{1/2}=\sqrt{2Q}\; v_{\text{no conductor}} \tag{24-77}$$

$$\delta=\left(\frac{2}{\mu\sigma\omega}\right)^{1/2}=\frac{\lambda}{2\pi} \tag{24-78}$$

Si se compara (24-74) con (24-70) se puede observar que $|\mathbf{B}|$ es relativamente mucho mayor que $|\mathbf{E}|$ en un buen conductor, en comparación con un aislante, mientras que la diferencia de fase es virtualmente siempre igual a $\pi/4$, de acuerdo con (24-76). De manera similar, (24-77) muestra que la velocidad de onda es mucho menor en el caso de un buen conductor, mientras que (24-78) enuncia que la profundidad de penetración (distancia de anunciación) es del orden de una longitud de onda *en el conductor,* que a su vez es mucho menor que en un aislante.

Un ejemplo numérico puede ser de gran ayuda aquí. Un metal típico como el cobre tiene $\sigma \simeq 6 \times 10^7$ (ohm-metro)$^{-1}$ y $\epsilon \simeq \epsilon_0$. De (24-44) se desprende, pues, que

$$Q=\frac{2\pi\nu\epsilon}{\sigma}\simeq\left(\frac{2\pi\epsilon_0}{\sigma}\right)\nu=9\times10^{-19}\nu\simeq10^{-18}\nu$$

de modo que para que $Q \ll 1$, se debe tener que $\nu \ll 10^{18}$ hertz. Esto significa que la aproximación es buena durante toda la escala ascendente de frecuencias hasta que se llega a la región ultravioleta, donde de todas maneras se encontrarán efectos mecánicocuánticos. En otras palabras, el caso $Q \ll 1$ realmente se ajusta a todos los metales ordinarios muy bien.

Si se utiliza este mismo valor de σ y se toma $\mu \simeq \mu_0$ en (24-78), se encuentra que la profundidad de penetración δ se vuelve $(6.5 \times 10^{-2})/\nu^{1/2}$. A frecuencias bajas, esto resulta muy grande, de modo que prácticamente no existe atenuación. Pero para cuando se alcanza el límite inferior de las microondas ($\nu \sim 3 \times 10^9$ hertz), se ve que $\delta \sim 10^{-6}$ metros, de modo que los campos son esencialmente diferentes de cero sólo dentro de esta pequeña distancia; éste es el origen del término "profundidad pelicular."

24.4 Ondas planas en medios cargados

Ahora que ya se tiene una experiencia, se puede considerar una situación más complicada. Supóngase que existe una distribución de carga libre, ρf, en el medio; sigue suponiéndose que $\mathbf{J}_f{}' = 0$ porque un valor no nulo corresponde a un caso que se da muy raramente. Así, en lugar de (24-1) se requiere usar $\Delta \cdot \mathbf{E} \neq 0$. El resto de las ecuaciones (24-2) a (24-4) no cambian. Cuando se elimina $\mathbf{B}$ por el mismo método que se usó antes, se encuentra que en lugar de (24-5) se tiene

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \tag{24-79}$$

Por otro lado, la ecuación que $\mathbf{B}$ satisface es todavía (24-6):

$$\nabla^2\mathbf{B} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{24-80}$$

ya que $\Delta \cdot \mathbf{B} = 0$ siempre.

Se vuelve a considerar el caso en el que los campos son función únicamente de z y de t, de modo que las únicas derivadas espaciales que no son iguales a cero son las que se toman con respecto a z. Entonces (24-79) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\hat{\mathbf{z}} \tag{24-81}$$

La componente x de esta ecuación es

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

habiendo una ecuación similar para E_y. Así, las ecuaciones para E_x, E_y y las tres componentes de $\mathbf{B}$ obtenidas de (24-80) son todavía de la forma (24-7). La única que es diferente es la componente z de (24-81):

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_z}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

que se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma}{\epsilon} E_z + \frac{\partial E_z}{\partial t}\right) = 0 \tag{24-82}$$

y muestra que el término entre paréntesis es, cuando mucho, una función de z. Si se toma una función como $a(z)$, entonces la solución general de la ecuación resultante es $E_z = (\epsilon/\sigma)[a(z) + b(z)e^{-\sigma t/\epsilon}]$. Esta componente tiene una parte que decae exponencialmente a cero con tiempo de relajación ϵ/σ, de (12-41), y ciertamente no se trata de una onda. La otra parte representa un campo *estático* que puede ser función de la posición; si bien ésta es

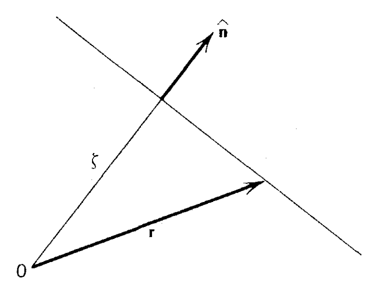


Figura 24-6 Una onda plana que viaja en la dirección arbitraria $\hat{\mathbf{n}}$.

una posibilidad, no resulta ser de interés alguno para un estudio de la propagación de ondas, por lo que en lugar de seguir con ello, simplemente se puede tomar $E_z = 0$. Por tanto, se concluye que una *onda viajera* en un medio i.h.l. cargado *sigue siendo transversal* y que todas las componentes de importancia satisfacen la ecuación (24-7). En consecuencia, todas las conclusiones de las últimas dos secciones se aplican a este caso también; no es necesario, pues, considerarlo con mayor profundidad, pudiéndose seguir utilizando (24-1) a (24-4) para ondas viajeras.

24-5 Ondas planas en una dirección arbitraria

Para simplificar solamente se han considerado las ondas planas que viajan en una dirección específica, que se tomó como la del eje z. Para usos ulteriores, resulta conveniente generalizar estos resultados para poder describir una onda viajera que se mueve en una dirección arbitraria con respecto a un sistema coordenado *dado*.

Ya antes se escribió $\psi = \psi(z,t)$ de modo que ψ era constante en todos los puntos de un plano perpendicular al eje z, como se ilustra en la figura 24-1. Lo que se desea aquí es que ahora ψ dependa solamente del tiempo t y la distancia, ζ de un plano dado al origen, de modo que $\psi = \psi(\zeta, t)$. Esta situación se muestra en una vista de perfil en la figura 24-6, donde la orientación del plano se describe por su normal $\hat{\mathbf{n}}$ y donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un punto arbitrario sobre el plano. De la figura se desprende que la distancia constante ζ está dada por

$$\zeta = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} \tag{24-83}$$

de modo que ésta es la ecuación del plano. Así, para una onda plana de constante de propagación k se tendrá

$$\psi = \psi_0 e^{i(k\zeta - \omega t)} = \psi_0 e^{i(k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{24-84}$$

Si se toma siempre la normal $\hat{\mathbf{n}}$ en la dirección de propagación de la onda, se puede tomar k como positiva y definir un *vector de propagación* $\mathbf{k}$ como

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}} = k\hat{\mathbf{k}} \tag{24-85}$$

de manera que pueda escribirse

$$\psi = \psi_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{24-86}$$

como la representación de una onda plana que viaja en la dirección $\mathbf{k}$ (con el correspondiente

vector unitario $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}$). Si, por ejemplo, se refiere esta situación a un conjunto específico de ejes coordenados, se puede escribir

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} + k_z\hat{\mathbf{z}} \tag{24-87}$$

y, por lo tanto,

$$\psi = \psi_0 e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z) - \omega t]} \tag{24-88}$$

Puesto que ψ puede ser una componente de **E** o de **B**, la generalización de (24-29) será

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{24-89}$$

quedando ahora por ver qué pasa con las ecuaciones de Maxwell para esta manera más generalizada de escribir los campos.

Con la forma que se ha supuesto (24-88), las análogas de (24-30) son ahora

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = ik_x\psi \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = ik_y\psi \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = ik_z\psi \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega\psi \tag{24-90}$$

lo que significa que el operador *del* es equivalente a la sustitución $\Delta = ik = ik\hat{\mathbf{k}}$, con lo que las ecuaciones de Maxwell (24-1) a (24-4) se vuelven

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\cdot\mathbf{E} &= 0 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{k}\times\mathbf{E} &= \omega\mathbf{B} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{B} = -(\mu\epsilon\omega + i\mu\sigma)\mathbf{E} \end{aligned} \tag{24-91}$$

que son exactamente las primeras tres de (24-32) más (24-58), con $k\hat{\mathbf{z}}$ reemplazadas por $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$, como era de esperarse. Por tanto, todavía es cierto que los campos están relacionados por

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E} \tag{24-92}$$

donde k y ω se conectan por medio de la relación de dispersión (24-37), de manera que todos los resultados de las secciones anteriores pueden aplicarse a este caso general reemplazando simplemente cada $\hat{\mathbf{z}}$ por $\hat{\mathbf{k}}$ y cada kz por $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$.

Más tarde será de utilidad contar con una relación explícita entre **H** y **E**, misma que puede derivarse a partir de (24-92) puesto que $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, obteniéndose

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\mu\omega}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E} = \frac{|k|}{\mu\omega}e^{i\Omega}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E} \tag{24-93}$$

por medio de (24-60). En el muy importante caso especial de un medio no conductor, se puede expresar $|k|/\omega = 1/v = \sqrt{\mu\epsilon}$, según (24-17) y (24-12), de modo que se tiene también que

$$\mathbf{H} = \frac{\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}}{\mu v} = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2}\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E} = \frac{\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}}{Z} \tag{24-94}$$

donde

$$Z = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} = \left(\frac{\kappa_m \mu_0}{\kappa_e \epsilon_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\kappa_m}{\kappa_e}\right)^{1/2} Z_0 . \tag{24-95}$$

recibe el nombre de *impedancia de onda*. La cantidad $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = \mu_0 c = 377$ ohms es conocida como la *impedancia del espacio libre.*

24-6 Soluciones complejas y relaciones energéticas entre valores promediados en el tiempo

Como ya se ha ilustrado ampliamente antes, a veces resulta conveniente obtener soluciones en forma compleja. Sin embargo, se debe siempre recordar que la parte real de la solución corresponde a la cantidad física de interés, como sucedió en (24-62), por ejemplo. Dado que algunas veces no resultará fácil obtener partes reales, es conveniente expresar algunos de los resultados anteriores de manera que las soluciones complejas puedan ser sustituidas en ellos directamente. Sin embargo, esto sólo se hará para campos que tengan una dependencia sinusoidal con el tiempo, es decir, que sean proporcionales a $e^{-i\omega t}$. Es importante recordar que mientras que esto es aplicable a ondas planas, *no* se restringe solamente a ellas.

Sean $\mathbf{E}_c$, $\mathbf{B}_c$, $\mathbf{H}_c$, y $\mathbf{D}_c$ soluciones que han sido obtenidas en forma compleja. En ese caso los campos eléctricos y magnéticos físicamente reales son

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}(\mathbf{E}_c) = \mathrm{Re}(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}) \tag{24-96}$$

$$\mathbf{H} = \mathrm{Re}(\mathbf{H}_c) = \mathrm{Re}(\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}) \tag{24-97}$$

que antes ya se denotaron como $\mathbf{E}_{\mathrm{real}}$, etc. Las cantidades $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ son funciones exclusivas de $\mathbf{r}$. Si ahora se les expresa en función de sus partes real e imaginaria, de modo que

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I \qquad \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_R + i\mathbf{H}_I$$

donde $\mathbf{E}_R$, $\mathbf{E}_I$, y $\mathbf{H}_I$ son todos reales, entonces (24-96) se vuelve

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathrm{Re}\left[(\mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I)(\cos\omega t - i\,\mathrm{sen}\,\omega t)\right] \\ &= \mathbf{E}_R \cos\omega t + \mathbf{E}_I\,\mathrm{sen}\,\omega t \end{aligned} \tag{24-98}$$

mientras que (24-97) da

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_R \cos\omega t + \mathbf{H}_I\,\mathrm{sen}\,\omega t \tag{24-99}$$

Al sustituir (24-98) y (24-99) en (21-59) se encuentra que el vector de Poynting está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} &= (\mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R)\cos^2\omega t + (\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I)\,\mathrm{sen}^2\,\omega t \\ &+ \left[(\mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_I) + (\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_R)\right]\mathrm{sen}\,\omega t \cos\omega t \end{aligned} \tag{24-100}$$

que por lo general es una función que varía con el tiempo.

En muchas situaciones el interés principal no estriba en el valor instantáneo del flujo de energía, principalmente porque suele fluctuar muy rápidamente resultando imposible seguirlo con los instrumentos de medición existentes. El *promedio en el tiempo* del flujo de energía, ⟨S⟩, es, por lo general, de mucho mayor significado. De (24-100) se desprende que estará dado por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \tfrac{1}{2}\left[(\mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R) + (\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I)\right] \tag{24-101}$$

puesto que

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \operatorname{sen}^2 \omega t \rangle = \tfrac{1}{2} \qquad \langle \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \rangle = 0 \tag{24-102}$$

Estos últimos resultados provienen de (19-49) al dividir las integrales adecuadas entre 2π para promediar sobre un período de las funciones trigonométricas. La ecuación 24-101 es un resultado fundamental, pero puede expresarse en una forma más conveniente.

Sea $\mathbf{H}_c{}^*$ la conjugada compleja de $\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_c$ con la i remplazada por $-i = \mathbf{H}_0{}^* e^{i\omega t} = (\mathbf{H}_R - i\mathbf{H}_I)e^{i\omega t}$. Considérese ahora

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c{}^* &= \left[(\mathbf{E}_R + i\mathbf{E}_I)e^{-i\omega t} \times (\mathbf{H}_R - i\mathbf{H}_I)e^{i\omega t}\right] \\ &= \left[(\mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_R) + (\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_I)\right] + i\left[(\mathbf{E}_I \times \mathbf{H}_R) - (\mathbf{E}_R \times \mathbf{H}_I)\right]\end{aligned} \tag{24-103}$$

Al comparar (24-101) con (24-103) se observa que

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{E}_c \times \mathbf{H}_c{}^*) \tag{24-104}$$

Por tanto, se ha tenido éxito en expresar el promedio temporal del vector de Poynting completamente en función de estas dos soluciones complejas de las ecuaciones de Maxwell, de modo que se puede calcular directamente sin necesidad de encontrar primero las partes reales.

Se puede aplicar también el mismo procedimiento al caso de los promedios de las densidades de energía. Los resultados son

$$\langle u_e \rangle = \langle \tfrac{1}{2}\epsilon \mathbf{E}^2 \rangle = \tfrac{1}{4}\epsilon \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c{}^* \tag{24-105}$$

$$\langle u_m \rangle = \langle \frac{1}{2}\mu \mathbf{H}^2 \rangle = \frac{1}{4}\mu \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{H}_c{}^* = \frac{1}{4\mu}\mathbf{B}_c \cdot \mathbf{B}_c{}^* \tag{24-106}$$

Una vez encontrados estos importantes resultados, ya no es necesario distinguir entre los campos reales y complejos. De acuerdo con ello, se concluye que aunque en lo que sigue se estarán manejando continuamente soluciones complejas de las ecuaciones de Maxwell, no se las escribirá como $\mathbf{E}_c$ y $\mathbf{H}_c$ sino simplemente como **E** y **H**, etc. Si en realidad se requiriera de las partes reales para algún propósito específico, se hará claro este hecho en forma explícita.

Ejemplo

Relaciones de energía para una onda plana. Se considera primero el caso $\sigma = 0$. Al sustituir (24-94) en (24-104), usando (24-95), (1-30) y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0$ según (24-91), se obtiene

$$\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2}\mathrm{Re}[\mathbf{E}\times(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}^*)] = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\hat{\mathbf{k}} \qquad (24\text{-}107)$$

puesto que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*$ es real. Si ahora se utilizan (24-87) y (24-94) se ve que (24-107) puede también expresarse como

$$\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2}|\mathbf{E}_0|^2\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2}|\mathbf{H}_0|^2\hat{\mathbf{k}} \qquad (24\text{-}108)$$

puesto que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^* = |\mathbf{E}_0|^2$ y así sucesivamente para $\mathbf{H}$. De este resultado se desprende que el flujo de energía no solamente es en la dirección de propagación $\hat{\mathbf{k}}$, lo cual ya se sabía, sino que además es proporcional al cuadro de la amplitud de $\mathbf{E}$ o de $\mathbf{H}$.

De la misma manera, se encuentra que las densidades de energía son

$$\langle u_e\rangle = \tfrac{1}{4}\epsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \tfrac{1}{4}\epsilon|\mathbf{E}_0|^2 = \tfrac{1}{4}\mu|\mathbf{H}_0|^2 = \langle u_m\rangle \qquad (24\text{-}109)$$

de modo que las densidades promedio de energía son iguales. El promedio de la densidad total de energía es entonces

$$\langle u\rangle = \langle u_e\rangle + \langle u_m\rangle = \tfrac{1}{2}\epsilon|\mathbf{E}_0|^2 = \tfrac{1}{2}\mu|\mathbf{H}_0|^2 \qquad (24\text{-}110)$$

que permite expresar (24-108) como

$$\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{\langle u\rangle}{\sqrt{\mu\epsilon}}\hat{\mathbf{k}} = \langle u\rangle v\hat{\mathbf{k}} = \langle u\rangle\mathbf{v} \qquad (24\text{-}111)$$

por medio de (24-12). Así, la corriente promedio de energía es el producto de la densidad promedio de energía por la velocidad de la onda. Esto concuerda con el resultado análogo para la densidad de corriente, $\mathbf{J} = \rho v$ dado en (12-3), y con el de la cinemática de fluidos según el cual el flujo de masa por unidad de área es el producto de la densidad de masa por la velocidad del fluido.

En un medio conductor, en el que $\sigma \neq 0$. se debe usar (24-93) la cual, al ser sustituida en (24-104), conduce a

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}\rangle &= \frac{|k|}{2\mu\omega}\mathrm{Re}[\mathbf{E}\times(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{E}^*)e^{-i\Omega}]\\ &= \frac{|k|\cos\Omega}{2\mu\omega}e^{-2\beta\zeta}|\mathbf{E}_0|^2\hat{\mathbf{k}} = \frac{\alpha e^{-2\beta\zeta}}{2\mu\omega}|\mathbf{E}_0|^2\hat{\mathbf{k}} = \frac{e^{-2\beta\zeta}}{2\mu v}|\mathbf{E}_0|^2\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \qquad (24\text{-}112)$$

con auxilio de (24-22), (24-48), (24-52), (24-89), (24-85), (24-83) y (24-38); Ahora ζ mide la distancia en la dirección de propagación. De manera similar, el promedio de la densidad total de energía resulta ser

$$\langle u\rangle = \frac{\alpha^2}{2\mu\omega^2}e^{-2\beta\zeta}|\mathbf{E}_0|^2 = \frac{e^{-2\beta\zeta}}{2\mu v^2}|\mathbf{E}_0|^2 \qquad (24\text{-}113)$$

donde se han usado (24-49) y (24-40). Se puede observar que en este caso $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u \rangle \, v\hat{\mathbf{k}}$, tal como lo expresa (24-111) para un medio no conductor.

Tanto $\langle \mathbf{S} \rangle$ como $\langle u \rangle$ son proporcionales a $e^{-2\beta\zeta}$, de manera que decrecen con el doble factor de atenuación de los campos; esto resulta del hecho de que ambos son proporcionales al cuadrado de las amplitudes. Esta energía se pierde a causa del calentamiento resistivo del material como consecuencia de su conductividad.

24-7 Polarización

Hasta ahora muchos de los resultados se han obtenido a partir de la forma supuesta (24-89), sin especificar mucho acerca de $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{B}_0$, a excepción de que son constantes, que están relacionados entre sí por $\mathbf{B}_0 = (k/\omega)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0$ según (24-92) y que ambos descansan sobre el plano perpendicular a la dirección de propagación. El carácter de la onda depende de la naturaleza de las amplitudes en este plano; el estudio puede concentrarse sobre $\mathbf{E}_0$ puesto que $\mathbf{B}_0$ siempre puede encontrarse a partir de él.

Para simplificar un poco la discusión, supóngase que se han escogido unos ejes de modo que la dirección de propagación sea la dirección positiva de z; el plano transversal es, pues, el plano xy, pero no se hace suposición alguna con respecto a la orientación específica de los ejes x y y en relación con la amplitud; por ejemplo, no se ha tomado ninguno de ellos en la dirección de $\mathbf{E}_0$. Puesto que $\mathbf{E}_0$ descansa sobre este plano, se le puede descomponer en sus componentes para expresar

$$\mathbf{E}_0 = E_{0x}\hat{\mathbf{x}} + E_{0y}\hat{\mathbf{y}} \tag{24-114}$$

Dado que tanto $\mathbf{E}_{0x}$ y $\mathbf{E}_{0y}$ son por lo general números complejos, se les puede expresar en la forma (24-24) como

$$E_{0x} = E_1 e^{i\vartheta_1} \qquad E_{0y} = E_2 e^{i\vartheta_2} \tag{24-115}$$

de manera que $\mathbf{E}$, según (24-29), se convierte en

$$\mathbf{E} = \left(E_1 e^{i\vartheta_1}\hat{\mathbf{x}} + E_2 e^{i\vartheta_2}\hat{\mathbf{y}}\right) e^{i(kz-\omega t)} \tag{24-116}$$

Para simplificar, se toma k como real; ya se verá después que esto no afecta las conclusiones básicas. Si entonces se toman las partes reales de (24-116), se encuentra que las componentes del campo eléctrico son

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(kz - \omega t + \vartheta_1) \\ E_y &= E_2 \cos(kz - \omega t + \vartheta_2) \end{aligned} \tag{24-117}$$

La descripción del campo eléctrico depende ahora de los valores relativos de las amplitudes (E_1, E_2) y de las fases $(\vartheta_1, \vartheta_2)$.

Puesto que, según (24-117), $-E_1 \leqslant E_x \leqslant E_1$ y $-E_2$, la punta del vector del campo

eléctrico deberá siempre caer dentro del rectángulo punteado de la figura 24-7; nótese que *ahora* se está utilizando **E** para representar el campo eléctrico físico y no la expresión compleja de (24-116). La dirección de propagación está dada por el eje z y es hacia afuera de la página.

Supóngase un observador en la posición específica. A medida que el tiempo transcurre, según (24-117) las componentes de **E** varían de modo que el propio **E** cambia también y la punta del vector **E** traza una trayectoria de algún tipo dentro del rectángulo punteado. Se puede encontrar esta trayectoria u "órbita" si se elimina $(kz - \omega t)$ de (24-117). Se encuentra que

$$\frac{E_x}{E_1} = \cos(kz - \omega t)\cos\vartheta_1 - \operatorname{sen}(kz - \omega t)\operatorname{sen}\vartheta_1$$

$$\frac{E_y}{E_2} = \cos(kz - \omega t)\cos\vartheta_2 - \operatorname{sen}(kz - \omega t)\operatorname{sen}\vartheta_2$$

y por lo tanto,

$$\frac{E_x}{E_1}\operatorname{sen}\vartheta_2 - \frac{E_y}{E_2}\operatorname{sen}\vartheta_1 = -\cos(kz - \omega t)\operatorname{sen}(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

$$\frac{E_x}{E_1}\cos\vartheta_2 - \frac{E_y}{E_2}\cos\vartheta_1 = -\operatorname{sen}(kz - \omega t)\operatorname{sen}(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

Elevando al cuadrado cada una de las expresiones y después sumando los miembros correspondientes, se obtiene

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_1}\right)\left(\frac{E_y}{E_2}\right)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = \operatorname{sen}^2(\vartheta_1 - \vartheta_2) \qquad (24\text{-}118)$$

Esta ecuación de segundo grado es la ecuación de una *elipse* (puesto que tanto E_x como E_y permanecen finitos), por lo que se dice que el campo eléctrico está *polarizado elípticamente*. Por lo tanto, la trayectoria trazada por la punta de este campo podría ser como la que se

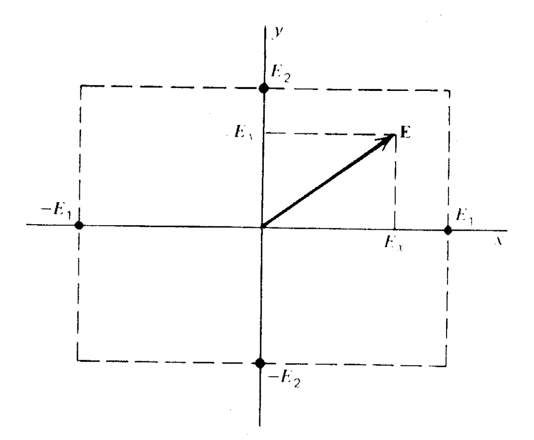


Figura 24-7 Las componentes de un campo eléctrico en el plano transversal a la dirección de propagación.

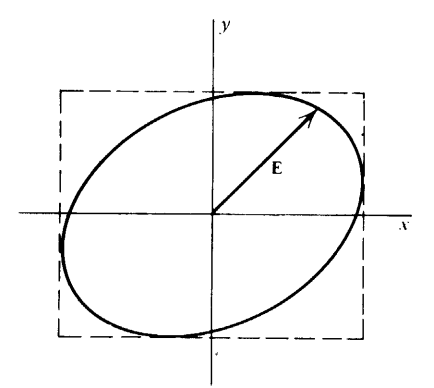


Figura 24-8 Un campo eléctrico polarizado elípticamente.

muestra en la figura 24-8. La inducción magnética **B** estará también polarizada elípticamente puesto que **B** es siempre perpendicular a **E**, resultando que su elipse estaría rotada 90° con respecto a la de **E**.

Los valores de los ejes principales de la elipse y su orientación con respecto a los ejes dependen claramente de las amplitudes E_1 y E_2 y de la *fase relativa* de las dos componentes, ya que (24-118) depende sólo del valor absoluto de la *diferencia* de la fase $|\vartheta_1 - \vartheta_2|$. Resultará de gran ayuda considerar algunos casos especiales.

I. $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$

En este caso, (24-118) se reduce a $[(E_x/E_1) - (E_y/E_2)]^2 = 0$, o sea,

$$\frac{E_x}{E_1} = \frac{E_y}{E_2} \tag{24-119}$$

Esta es la ecuación de la línea recta diagonal como la que se muestra en la figura 24-9. La punta de **E** recorre siempre esta línea y se dice que el campo se encuentra *linealmente polarizado.* Esto puede verse también de (24-117), ya que cuando $\vartheta_1 = \vartheta_2$ las dos componentes están en fase, es decir, alcanzan sus máximos y sus mínimos juntas, y se anulan juntas; una relación de este tipo produce la línea recta que se muestra en la figura.

II. $|\vartheta_1 - \vartheta_2| = \pi$

Ahora (24-118) se reduce a $[(E_x/E_1) + (E_y/E_2)]^2 = 0$, o sea,

$$\frac{E_x}{E_1} = -\frac{E_y}{E_2} \tag{24-120}$$

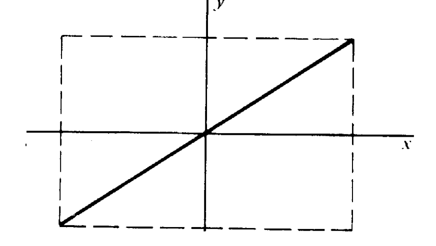


Figura 24-9 Un campo eléctrico polarizado linealmente cuya diferencia de fase entre las componentes *x* y *y* es igual a cero.

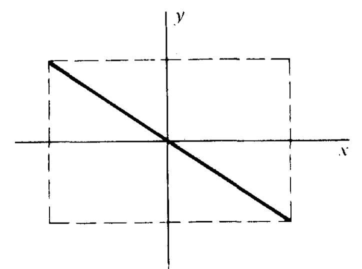


Figura 24-10 Un campo eléctrico polarizado linealmente cuya diferencia de fase entre las componentes x y y es igual a π.

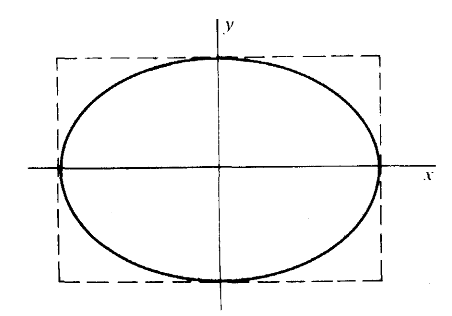


Figura 24-11 Un campo eléctrico polarizado elípticamente cuya diferencia de fase entre las componentes x y y es de $1/2\ \pi$.

En este caso, el campo también está polarizado linealmente, pero como E_x y E_y siempre tienen signos contrarios la línea trazada por **E** es la otra diagonal, como se muestra en la figura 24-10.

III. $|\vartheta_1 - \vartheta_2| = \pi/2$

Aquí (24-118) se vuelve

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1 \tag{24-121}$$

que es una elipse cuyos ejes mayor y menor se encuentran alineados con los ejes coordenados como se ilustra en la figura 24-11. Un caso especial de esto ocurre cuando $E_1 = E_2 = E_0$, con lo que (24-121) se vuelve la ecuación del círculo $E_x{}^2 + E_y{}^2 = E_0{}^2$; se dice entonces que el campo está *polarizado circularmente.*

Como se acaba de ver, la *forma* de la elipse es independiente del signo de la diferencia de la fase $\vartheta_1 - \vartheta_2$. Sin embargo, el *sentido* de trazo de la trayectoria sí depende del signo, y es justamente eso lo que se considera a continuación. Resulta conveniente introducir la diferencia de la fase Δ explícitamente haciendo

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \Delta \tag{24-122}$$

y abreviando la fase asociada con E_x como

$$P = kz - \omega t + \vartheta_1 \tag{24-123}$$

de modo que (24-117) se convierta en

$$E_x = E_1 \cos P \qquad E_y = E_2 \cos(P - \Delta) \tag{24-124}$$

Para analizar estas expresiones es de gran utilidad referirse a la figura 24-12, en la que se ha graficado una porción de los términos cosenos en función de P. La línea llena es $\cos P$, de modo que $\Delta = 0$ para ella. La línea de rayas muestra $\cos(P - \Delta)$ para $\Delta > 0$, observándose que, como función de P, va detrás de la línea llena. La línea de puntos muestra $\cos(P - \Delta)$ para Δ negativas, y se ve que está adelante de la curva $\Delta = 0$ como función de P. Si ahora se considera (24-124) como una función de la *P creciente*, entonces cuando $\Delta > 0$, E_y, sigue a E_x, es decir, alcanza su máximo después que E_x, se vuelve cero despues que E_x, y así sucesivamente. La figura 24-13 muestra este comportamiento, y dado que el eje z es perpendicular a ese plano y hacia afuera de la página, se observa que la elipse está siendo trazada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa en direcciónopuesta a la de la propagación (y por tanto, en el sentido de las manecillas del reloj si se le observa en la dirección de propagación, es decir, mirando *hacia afuera* de la página). Si Δ es negativa, entonces E_y va adelante de E_x y el sentido de rotación es el opuesto al anterior , como se ilustra en la figura 24-14.

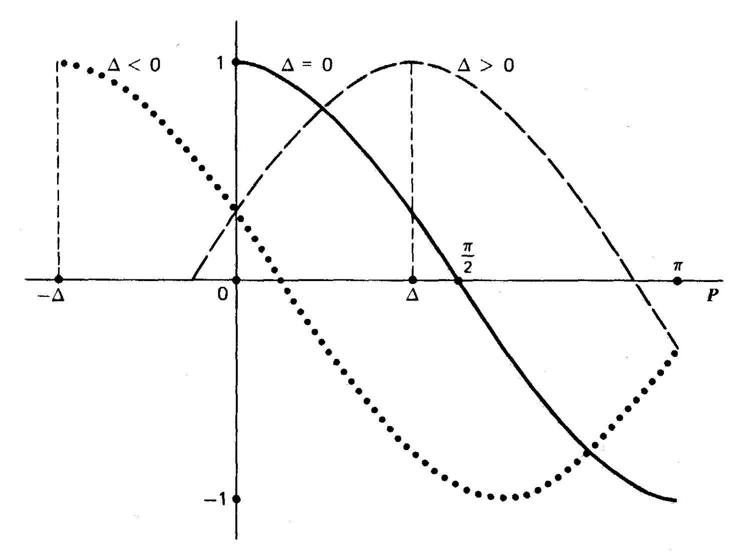


Figura 24-12 cos $(P\text{-}\Delta)$ para varios valores de Δ.

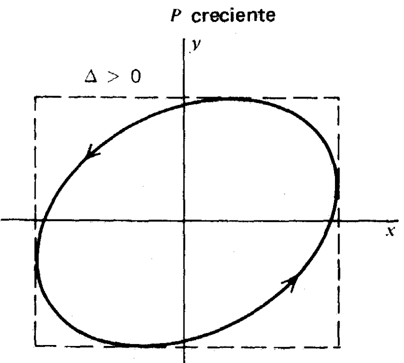


Figura 24-13 La elipse está trazada en un sentido contrario al de las manecillas del reloj, cuando se le observa desde la dirección opuesta a la de la propagación.

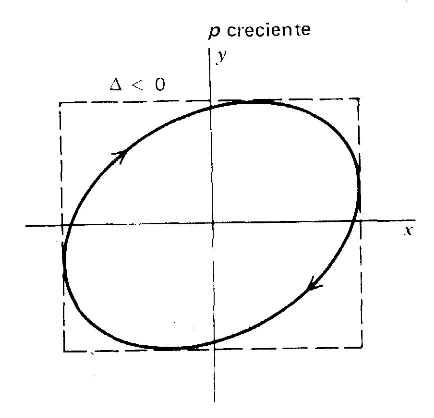
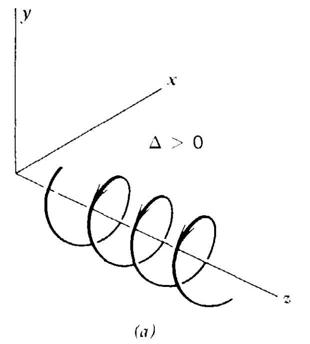


Figura 24-14 El sentido de rotación es el mismo del de las manecillas del reloj cuando se ve desde el lado opuesto a la dirección de propagación.



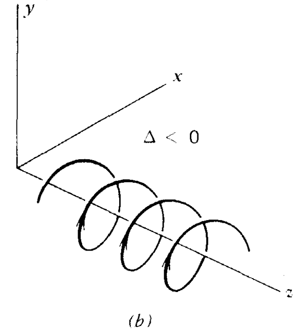


Figura 24-15 Una onda polarizada circularmente de (a) helicidad positiva y (b) helicidad negativa.

Según se puede ver por (24-123), P varía tanto con z como con t, pero de diferentes maneras. Por lo tanto, resulta conveniente considerarlas por separado.

Supóngase que t tiene un valor definido; es decir, considérese lo que se podría observar en función de la posición z, muy a la manera de una fotografía de la onda. A medida que z aumenta, P aumenta, por lo que se pueden aplicar las figuras directamente. Así, si $\Delta > 0$, al mirar *en* la dirección de propagación *(hacia afuera* de la página*)*, se verá que el campo eléctrico gira en el *sentido de las manecillas del reloj*, mientras que los hará al revés si Δ es negativa. La figura 24-15 muestra estas situaciones para una onda polarizada circularmente. Por medio de la regla estándar de la mano derecha para definir sentidos de rotación, se puede ver que (a) corresponde al sentido positivo de rotación y (b) al negativo; una onda como (a), correspondiente a $\Delta > 0$, se describe como una onda de *helicidad positiva*, mientras que la correspondiente a una diferencia de la fase negativa tendría helicidad negativa.

Por otro lado, si se considera un observador en una posición definida (z = const.), se verá que a medida que t aumenta P disminuye, de acuerdo con (24-123). Si se revisa la forma en que se trazaron las figuras 23-13 y 24-14 con la ayuda de la figura 24-12, se puede observar que si se sustituye "P creciente" por "P decreciente" en estas figuras, también se tendrá que invertir el sentido de rotación de las elipses. En este caso el observador, al mirar hacia la página, y por lo tanto en contra de la dirección de propagación, verá que E traza su elipse en el sentido de las manecillas del reloj para Δ positivas y en contra del

sentido de las manecillas del reloj para $\Delta < 0$. (En otras palabras, el observador estará mirando *hacia la fuente,* que sería lo más razonable). A las polarizaciones en estos casos se les denomina *derecha* (positiva) e *izquierda* (negativa) respectivamente.

Así, desde cualquier punto de vista, la correlación ha resultado ser la misma; una diferencia de fase Δ positiva corresponde a un sentido de rotación positivo y una diferencia de la fase negativa a un sentido de rotación negativo.

24-8 ¿Son constantes los parámetros electromagnéticos de la materia?

Se ha encontrado ya que las propiedades de propagación de las ondas planas están relacionadas con los parámetros que describen el medio, es decir, μ, ϵ y σ. Como ejemplo específico, en (24-14) se encontró que el índice de refracción de un medio no conductor está dado de manera muy simple por $n = \sqrt{k_e k_m}$. Esta relación funciona muy bien para muchos materiales, pero como un ejemplo contrario considérese el caso del agua. Si se buscan en tablas estas cantidades para el caso del agua, se encontrará que $k_m \simeq 1$ y $k_e \simeq 80$, de modo que $n \simeq 9$. Pero es bien conocido que el índice de refracción del agua para la luz es muy cercano a $\frac{4}{3} = 1.33$. La solución a esta aparente dificultad estriba en que la formulación macroscópica de la teoría del electromagnetismo que se ha dado aquí no da indicación alguna en cuanto a los valores de k_e y k_m que deben esperarse, sino que confía enteramente en los experimentos para su obtención. En otras palabras, lo que realmente hace la práctica es tomar los resultados predichos por las ecuaciones de Maxwell como correctos *siempre,* y entonces, al hacerlos concordar con la experimentación, *deducir* los valores que deben asignarse a μ, ϵ, y σ. De esta manera se puede observar que estos parámetros no son en realidad constantes para un material dado, sino que por lo general acusan una fuerte dependencia con la *frecuencia.* (No es de interés aquí una posible dependencia respecto a cosas como la temperatura o la presión). En el ejemplo anterior se usó el valor de las constantes dieléctrica del agua para el caso *estático,* mientras que el que debe usarse es el correspondiente a las altas frecuencias, como la de las ondas de luz.

La naturaleza atómica de la materia viene a ser la razón última para esta variación con la frecuencia; las cargas atómicas que se polarizan con los campos poseen cierta inercia que hace que su respuesta a las fuerzas electromagnéticas dependan de la frecuencia. Lo que es más, una combinación de los efectos de inercia y atenuación puede provocar una diferencia de la fase entre la fuerza aplicada y la respuesta del sistema; de ahí que sea apropiado expresar los parámetros como números complejos. En el apéndice B se consideran detalladamente estos efectos desde un punto de vista atómico. Sin embargo, para efectos de ilustración, aquí se restringe el tratamiento a un caso simple que ya se consideró antes desde un punto de vista microscópico, específicamente el de la conductividad de un material.

En la sección 12-5 se estudió el origen microscópico de una conductividad finita en función de las ecuaciones del movimiento (12-36) que describen la fuerza neta sobre un electrón de carga $-e$ como la suma de la fuerza eléctrica y una fuerza mecánica "de fricción" que se describió por medio del parámetro general ξ:

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = m\mathbf{a} = -e\mathbf{E} - \xi\mathbf{v} \tag{24-125}$$

Se encontró el valor estático de la conductividad, denotado ahora por σ_0, que según (12-39) es

$$\sigma_0 = \frac{ne^2}{\xi} \tag{24-126}$$

donde n es el número de electrones por unidad de volumen. Se desea ahora aplicar este mismo esquema al caso en el que el material está sujeto a un campo eléctrico que varía con el tiempo, y que corresponde a una onda plana.

Al sustituir (24-89) en (24-115) se obtiene

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \xi\mathbf{v} \tag{24-127}$$

La equivalente aquí a una solución de estado estacionario es aquélla en que la respuesta en una posición dada tiene la misma variación en el tiempo que la función de la fuerza; de acuerdo con esto, se trata de resolver esta ecuación suponiendo una solución de la forma $v = v_0 e^{-i\omega t}$ donde v_0 es independiente del tiempo. Cuando esto se sustituye en (24-127) se obtiene $m(d\mathbf{v}/dt) = -im\omega\mathbf{v} = -e\mathbf{E} - \xi\mathbf{v}$, de modo que

$$\mathbf{v} = \frac{-e\mathbf{E}}{\xi - im\omega} \tag{24-128}$$

La densidad de corriente libre puede encontrarse de la misma manera que se utilizó en (12-38):

$$\mathbf{J}_f = \rho_f\mathbf{v} = n(-e)\mathbf{v} = \frac{ne^2\mathbf{E}}{\xi - im\omega} \tag{24-129}$$

Dado que, por la definición de conductividad, esto se escribiría como $\mathbf{J}_f = \sigma\mathbf{E}$, se puede deducir que la conductividad es

$$\sigma = \sigma(\omega) = \frac{ne^2}{\xi - im\omega} = \frac{(ne^2/\xi)}{1 - i(m\omega/\xi)} = \frac{\sigma_0}{1 - i(\sigma_0 m\omega/ne^2)} \tag{24-130}$$

usando (24-136). Antes que nada, se observa que la conductividad ha resultado ser una función de la frecuencia y que el término dependiente de la frecuencia abarca tanto la inercia de los portadores de carga (m) como las fuerzas resistivas (ξ); se observa también que σ se reduce muy apropiadamente a σ_0 en el caso estático $\omega = 0$. En segundo término, se observa que σ es compleja, y ya para ahora se debe reconocer que esto significa que la densidad de corriente y el campo eléctrico no están en fase. [De hecho, por analogía con la mecánica, se debe reconocer que (24-125) es simplemente la ecuación del movimiento de un "oscilador armónico" amortiguando sin fuerza restauradora, como es el caso de los electrones libres, recordándose entonces que por lo general el desplazamiento y la velocidad ya no suelen estar en fase con la fuerza oscilatoria aplicada].

Se pueden encontrar las partes real e imaginaria de la conductividad si se multiplican el numerador y el denominador de (24-130) por la conjugada compleja del denominador, con lo que se obtiene

$$\sigma = \sigma_R + i\sigma_I = \frac{\sigma_0}{\left[1 + (\sigma_0 m\omega/ne^2)^2\right]}\left[1 + i\left(\frac{\sigma_0 m\omega}{ne^2}\right)\right] \tag{24-131}$$

Para poder estudiar el significado físico de la conductividad compleja un poco más, supóngase que se fija una posición r, de modo que **E** de (24-89), y por lo tanto $\mathbf{J}_f$, puedan escribirse en la forma

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0'e^{-i\omega t} \qquad \mathbf{J}_f=(\sigma_R+i\sigma_I)\mathbf{E}_0'e^{-i\omega t} \tag{24-132}$$

Para simplificar, se considera $\mathbf{E}_0'$ real; entonces las cantidades físicas de interés están dadas por las partes reales de (24-132) y, con la ayuda de (24-22), resulta ser

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{real}}&=\mathbf{E}_0'\cos\omega t\\ \mathbf{J}_{f\text{real}}&=(\sigma_R\cos\omega t+\sigma_I\,\text{sen}\,\omega t)\mathbf{E}_0'\end{aligned} \tag{24-133}$$

Así, la parte real de la conductividad compleja produce una componente de la corriente que se encuentra en fase con el campo eléctrico aplicado, y resulta ser precisamente la parte imaginaria de σ_I la que describe una componente de la corriente que está completamente *fuera de fase* con el campo. [Es fácil ver en (24-13) que tanto σ_R como σ_I son cantidades positivas].

Se puede ahora investigar el efecto que produce una conductividad compleja sobre las características de propagación del medio. La relación de dispersión (24-37) no depende de que las cantidades sean reales o no, como también es el caso de la forma de (24-38). Sin embargo, cuando (24-39) se combina con (24-131) se encuentra que se tiene ahora $\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta=\omega^2\mu\epsilon+i\omega\mu(\sigma_R+i\sigma_I)$, de tal manera que, en lugar de (24-40) y (24-41), α y β estan relacionadas entre sí por medio de

$$\alpha^2-\beta^2=\omega^2\mu\epsilon-\omega\mu\sigma_I \qquad 2\alpha\beta=\omega\mu\sigma_R \tag{24-134}$$

Se podría seguir adelante y despejar α y β como antes, pero existe otra manera más fácil de hacerlo. Se puede escribir la primera expresión como $\alpha^2-\beta^2=\omega^2\mu[\epsilon-(\sigma_I/\omega)]$ y, al compararla con (24-40) y (24-41) se observa que (24-42) y (24-43) pueden seguir siendo usadas si se hacen los remplazos de $\sigma\to\sigma_R$ y $\epsilon\to\epsilon-(\sigma_I/\omega)$.

En esta conexión entre la capacidad inductiva específica y la conductividad se puede a veces enfatizar si se expresa la relación de dispersión (24-37) en la forma

$$k^2=\omega^2\mu\left(\epsilon+i\frac{\sigma}{\omega}\right) \tag{24-135}$$

de modo que, en lo concerniente a la propagación de ondas, la existencia de la conductividad puede manejarse simplemente sumando a ϵ el término (generalmente complejo) $i\sigma/\omega$.

En lugar de continuar con estos resultados generales, a continuación se consideran dos casos límite que se pueden caracterizar por el tamaño relativo del parámetro ξ, que es una medida de la "fricción" del sistema, es decir, del efecto global de las colisiones.

I. "Mucha fricción" ($m\omega/\xi\ll 1$ ó $\omega\ll ne^2/\sigma_0 m$)

De (24-130) se desprende que esto significa que $\sigma\simeq\sigma_0\simeq$ const, de modo que la conductividad es esencialmente real siempre e igual al valor estático. Esto resulta ser cierto en el caso de los metales. Si se utilizan los números que se dan para el caso del cobre en el ejercicio 12-17, se encuentra que $n\simeq 8.5\times 10^{28}$ (metros)$^{-3}$. Usando $\sigma_0\simeq 6\times 10^7$ (ohm-metro)$^{-1}$

y 1,60 × 10^{-19} coulombs y 9,11 × 10^{-31} kilogramos para la carga y la masa del electrón, se encuentra que este requisito para la frecuencia ν es que $\nu \ll 6 \times 10^{12}$ hertz. Esta condición se satisface hasta bien adentro en la región de microondas, por lo que es justificable considerar a los metales como poseedores de una conductividad real y constante, como ya se hizo notar en la sección 24-3.

II "Poca fricción" $(m\omega/\xi \gg 1$ ó $\omega \gg ne^2/\sigma_0 m)$

Aquí se puede despreciar el 1 del denominador de (24-130) para quedar con

$$\sigma \simeq i\left(\frac{ne^2}{m\omega}\right) \tag{24-136}$$

resultando que la conductividad es puramente imaginaria, $\sigma_R = 0$, y la densidad de corriente y el campo eléctrico se encuentran exactamente 90° fuera de la fase, como se puede observar en (24-133). Una situación así se da en un *gas ionizado de baja densidad de partículas* o, como se suele llamar, un *plasma*. Debido a la naturaleza tenue del medio, el efecto de las colisiones es pequeño, de modo que a su vez ξ es también muy pequeña. Si se sustituye (24-136) directamente en la relación de dispersión (24-37) se encuentra que

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon\left(1 - \frac{ne^2}{m\epsilon\omega^2}\right) = \omega^2\mu\epsilon\left(1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}\right) \tag{24-137}$$

donde se ha escrito

$$\omega_p{}^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon} \tag{24-138}$$

y donde $\nu_p = \omega_p/2\pi$ recibe el nombre de *frecuencia de plasma.* En realidad, para un medio tal $\mu \simeq \mu_0$ y $\epsilon \simeq \epsilon_0$ pudiéndose aproximar estas expresiones muy bien por medio de

$$k^2 \simeq \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left(1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}\right) \qquad \omega_p{}^2 \simeq \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \tag{24-139}$$

Debido al signo negativo en la expresión para k^2, se deben considerar dos casos separados.

Si $\omega > \omega_p$, entonces $k^2 > 0$, de modo que k es real. Así, se tiene una onda viajera no atenuada de la forma (24-82), cuya velocidad de fase está dada por (24-139) como

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\left[1 - (\omega_p/\omega)^2\right]^{1/2}} \tag{24-140}$$

que es mayor que el valor c, y que sería aplicable a un medio no dispersivo con propiedades como las del vacío en los demás sentidos.

Si $\omega < \omega_p$, entonces $k^2 < 0$, de modo que k es imaginario puro. En este caso se puede expresar k según (24-139) en la forma

$$k = i\beta_p = i(\omega/c)\left[(\omega_p/\omega)^2 - 1\right]^{1/2} \tag{24-141}$$

Por lo que una solución de la forma (24-84) se convierte en

$$\psi = \psi_0 e^{-\beta_P \zeta} e^{-i\omega t} \tag{24-142}$$

Esta no es una onda viajera, sino una componente de campo que oscila sinusoidalmente y cuya amplitud disminuye exponencialmente con la distancia. Si el plasma es lo suficientemente grande, $\psi \to 0$, por lo que el campo no penetrará en el medio. Se puede así decir que un plasma es un ejemplo de un filtro "pasa altos", en el sentido de que la frecuencia debe ser mayor que la frecuencia del plasma para que pueda darse la propagación en el lugar de la simple atenuación.

Aunque no se podría decir que los electrones de conducción en el interior de un metal neutro forman un plasma de *baja* densidad de partículas, cumplen en todos los demás sentidos con los requisitos de este caso para una frecuencia lo suficientemente alta como para compensar los efectos de las colisiones, por lo que puede ser interesante evaluar la magnitud de ν_p para un metal. Usando los mismos números que ya se han usado para el cobre, de (24-139) se desprende que $\nu_p = 2.6 \times 10^{16}$ hertz. Lo que este valor extremadamente alto de la frecuencia ν_p indica es que no se puede esperar que un metal típico sea "transparente" a las ondas electromagnéticas hasta bien entrada la región ultravioleta del espectro, resultado que está perfectamente de acuerdo con las demás conclusiones logradas acerca del comportamiento de los metales. En los ejercicios se consideran otros ejemplos de plasmas.

Ejercicios

24-1 Ya se verificó por sustitución directa que la forma (24-11) es una solución de (24-9). De manera similar, se utilizó la separación de las variables z y t para obtener la forma explícita (24-18). Otra manera de llegar a (24-9) es la siguiente. Definir un nuevo conjunto de variables por medio de $\xi = z + vt$ y $\eta = z - vt$, expresar después (24-9) en función de ξ y η. Si v está dada también aquí por (24-12), demostrar que la ecuación resultante tiene una solución de la forma $\psi = f(\eta) + g(\xi)$.

24-2 A menudo se suele utilizar el término *interferencia* para caracterizar los fenómenos que resultan del principio de superposición, es decir, que la suma de soluciones es también una solución. Por ejemplo, considerar dos ondas planas ψ_1 y ψ_2, ambas de la forma (24-19) con los mismos valores de k y ω, es decir, que viajan en la misma dirección y a la misma velocidad. Sin embargo, suponer que tienen amplitudes diferentes y fases diferentes también, de manera que $\psi_{01} = \psi_{1a} e^{i\vartheta_1}$ y $\psi_{02} = \psi_{2a} e^{i\vartheta_2}$. Encontrar su suma $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Encontrar las partes reales de ψ_1, ψ_2 y ψ. Para el caso especial en que sus amplitudes sean iguales ($\psi_{1a} = \psi_{2a} = \psi_a$), demostrar que $Re\ \psi = 2\psi_a \cos - (\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos [kz - \omega t + \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2)]$ e interpretar el resultado. Si $|\vartheta_1 - \vartheta_2| = \pi$, ¿cuánto vale $Re\ \psi$? Explicar cómo ocurrió esto considerando la relación entre las ondas individuales en la superposición.

24-3 Como otro ejemplo de interferencia, suponer que ψ_2 del ejercicio anterior se propaga ahora en la dirección negativa de z. Demostrar que si las ondas tienen amplitudes reales positivas e iguales, entonces $Re\ \psi = 2\psi_a \cos kz \cos \omega t$. Este es un ejemplo de una *onda estacionaria*. Graficar $Re\ \psi$ en función de z para una t conveniente y en función de t para una z conveniente.

24-4 Como se hizo notar después de (24-53), la superposición de ondas planas que viajan en un medio dispersivo generalmente cambia de forma a medida que avanza. Como ejemplo, extremo de esto, considerar dos ondas de amplitudes reales e iguales y con casi las mismas constantes de propagación y frecuencia, que viajan en la dirección positiva de z, de manera que su suma es igual a

$$\psi = \psi_0 e^{i[(k+dk)z - (\omega + d\omega)t]} + \psi_0 e^{i[(k-dk)z - (\omega - d\omega)t]}$$

Demostrar que

$$\begin{aligned} \text{Re}\,\psi &= 2\psi_0 \cos[(dk)z - (d\omega)t] \cos(kz - \omega t) \\ &= \psi_m \cos(kz - \omega t) \end{aligned} \tag{24-143}$$

donde ψ_m recibe el nombre de la "modulación". Así, (24-143) tiene la forma de una onda con constante de propagación promedio k y frecuencia promedio de ω. Su amplitud no es constante sino otra onda que viaja con una *velocidad de grupo* v_G

$$v_G = \frac{d\omega}{dk} \tag{24-144}$$

¿Cuál es el período espacial (longitud de onda) λ de la onda principal? ¿Cuál es la longitud de onda λ_m de ψ_m? Encontrar la relación λ_m/λ. Dibujar (24-143) en $t = 0$ y a un tiempo *muy poco* después para verificar así que la forma de *Re* ψ ha variado. Identificar qué característica física del dibujo viaja con la velocidad de fase $v = \omega/k$ y cuál con la velocidad de grupo v_G. ¿Por qué cree que se dio el nombre velocidad de "grupo" a la velocidad dada por (24-144)? (Este resultado específico es un ejemplo del fenómeno general conocido como *pulsaciones*).

24-5 Una onda electromagnética plana que viaja en el vacío está dada por $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}E_0 e^{i(kz} - \omega t$ donde E_0 es real. Una espira circular de radio *a, N* vueltas y resistencia R está situada con su centro en el origen. La espira está orientada de manera tal que uno de sus diámetros descansa sobre el eje z y su plano forma un ángulo θ con el eje y. Encontrar la fem inducida en la espira en función del tiempo. Suponer que $a \ll \lambda$. (¿Por qué?)

24-6 Una partícula con carga q y masa m viaja con una velocidad u en el campo de una onda electromagnética plana en el espacio libre, que a su vez está viajando en la dirección z. Encontrar la fuerza sobre la partícula. ¿Qué ocurre en el caso especial en el que la partícula se encuentra viajando en la misma dirección que la onda? ¿Cuál es la dirección de la fuerza? ¿Bajo qué condiciones, si las hay, se anulará la fuerza en este caso?

24-7 Un valor representativo para la conductividad del agua del mar es $\sigma = 4$ (ohm-metros)$^{-1}$. Tomar $\epsilon \simeq \epsilon_0$ y $\mu \simeq \mu_0$ y encontrar Q, v, δ, la magnitud de la relación E/cB y Ω para cada una de las siguientes frecuencias v dadas en hertzs: 10^2, 10^7, 10^{10}, y 10^{15}. (Aproximadamente corresponden a "potencia", "radio", "microondas" y "luz".) El resultado que se obtiene de esta manera para δ en el caso de la luz es obviamente ridículo. ¿Por qué? ¿Cuál es la razón probable de este resultado erróneo?

24-8 Encontrar el índice de refracción n de un conductor en tunción de Q. Demostrar que, en el límite de un buen conductor, el resultado se reduce a $n^2 = k_e k_m/2Q$.

24-9 La constante solar, que es el promedio de la tasa de incidencia de relación solar sobre la atmósfera terrestre, es de 1340 watts/(metro)^2. Suponer que esta radiación es una onda plana polarizada linealmente; encontrar las amplitudes de **E** y **B**.

24-10 Verificar (24-105) y (24-106).

24-11 Encontrar la relación $\langle u_m \rangle / \langle u_e \rangle$ para una onda plana en un medio conductor. Encontrar entonces las expresiones aproximadas para esta relación en los casos límite de un aislante y de un buen conductor.

24-12 Una onda plana viaja en la dirección z positiva en un conductor de conductividad real. (a) Encontrar la pérdida instantánea de potencia por unidad de volumen y su promedio en el tiempo, producida por calentamiento resistivo, para cualquier z. (b) Encontrar la pérdida total de potencia por unidad de superficie entre $z = 0$ y $z \to \infty$. (c) Encontrar el promedio en el tiempo del vector de Poynting en cualquier z. (d) Comparar el valor del resultado obtenido en (b) con la magnitud del resultado obtenido en (c) evaluado en $z = 0$. ¿Es razonable la respuesta? Explicar.

24-13 Considerar una onda plana que es una superposición de dos ondas planas perpendiculares e independientes y que tiene la forma $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_\alpha e^{i(kz - \omega t + \vartheta\alpha)} + \hat{\mathbf{y}}E\beta e^{i(kz - \omega t + \vartheta\beta)}$ donde k es real, Encontrar <S> y demostrar que es igual a la suma de los vectores de Poynting promedio de cada uná de las componentes.
24-14 Considerar una onda plana que es una superposición de dos ondas planas independientes con campos eléctricos paralelos, y que tiene la forma $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_\alpha e^{i(kz - \omega t + \vartheta\alpha)} + \hat{\mathbf{x}}E_\beta e^{i(kz - \omega t + \vartheta\beta)}$ donde k es real, Encontrar <S> y demostrar que *no* es igual a la suma de los vectores de Poynting promedio de cada una de las componentes. (Este es un resultado de "interferencia").
24-15 Considerar una superposición de ondas planas que viajan todas en la misma dirección en un medio no conductor. El campo real será, pues, una suma de términos como (24-35), es decir, $\mathbf{E} = \Sigma_k \mathbf{E}_{0k}\cos(kz - \omega_k t + \vartheta_k)$. Demostrar que el promedio en el tiempo de la densidad de energía eléctrica es la suma de las densidades promedio de energía asociadas con cada una de las componentes.
24-16 En el ejercicio 22-6 se encontró que en una región i.h.l. no conductora donde no existen cargas o corrientes libres, **E** y **B** se pueden calcular a partir de una potencia vectorial A exclusivamente, de modo que se puede tomar $\phi = 0$. (a) ¿Cuáles son las dos ecuaciones que A debe satisfacer? (En realidad hay cuatro ecuaciones escalares). (b) Encontrar la solución a estas ecuaciones para la que A es una onda plana que viaja en la dirección k. (c) Encontrar **E** y **B** a partir de este **A** y verificar que son los mismos que se encontraron en el texto, es decir, que satisfacen el conjunto de ecuaciones (24-91) con $\sigma = 0$.
24-17 Una onda plana tiene un vector de propagación $k = 314\hat{\mathbf{x}} + 314\hat{\mathbf{y}} + 444\hat{\mathbf{z}}$ (metros)$^{-1}$. Suponer que viaja en el vacío y encontrar la longitud de onda, la frecuencia y los ángulos que forma con los ejes xyz.
24-18 Dada la onda plana $\mathbf{E} = \gamma[(3 + 2i)\hat{\mathbf{x}} + (3\ _4 i)\hat{\mathbf{y}}]e^{i(kz - \omega t)}$ donde γ es una constante positiva y k es positiva y real, encontrar: E_1, E_2, ϑ_1, ϑ_2, Δ y el ángulo φ entre el eje mayor de la elipse y el eje x. ¿Es positiva o negativa la helicidad de la onda? ¿Es derecho o izquierdo su sentido de polarización?
24-19 Demostrar que el campo eléctrico de una onda circularmente polarizada a la derecha puede expresarse en la forma $\mathbf{E}_+ = E_0(\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})e^{i(kz - \omega t + \vartheta)}$. ¿Cuál sería la expresión correspondiente si fuera izquierda?
24-10 Demostrar que una onda polarizada linealmente puede expresarse como la superposición de ondas polarizadas circularmente a la derecha y a la izquierda de amplitudes iguales. Demostrar que <S> para la onda polarizada linealmente es igual a la suma de los vectores de Poynting promedio de cada una de las componentes polarizadas circularmente.
24-21 Demostrar que para un plasma para el que $\epsilon \simeq \epsilon_0$, la frecuencia de plasma en hertz puede encontrarse a partir de $\nu_p = 8{,}97\, n^{1/2}$. Como ejemplos de otros plasmas importantes, encontrar ν_p para (a) una descarga típica de un gas para el que $n \simeq 10^{18}$ (metro)$^{-3}$; y (b) la ionósfera, donde $n \simeq 10^{10}$ (metro)$^{-3}$.
24-22 En un gas ionizado existen iones móviles y electrones. ¿Por qué fue posible despreciar la contribución de los iones a la conductividad y, por lo tanto, a la frecuencia del plasma?
24-23 Si un material posee una conductividad que es un número imaginario puro, tal como en el caso de (24-136), demostrar que la rapidez promedio de disipación de energía por unidad de volumen, $\langle w \rangle$, es igual a cero. ¿Es este resultado compatible con la suposición de que, de hecho, se han despreciado las colisiones?
24-24 Para un sistema de conductividad dada por (24-136), encontrar la densidad total de corriente $\mathbf{J}_t = \sigma\mathbf{E} + (\partial\mathbf{D}/\partial t)$ y demostrar que es *menor* de lo que sería en la ausencia de electrones conductores. Explicar cómo ocurre esto.
24-25 En (24-138) se definió la frecuencia de plasma de una manera puramente formal, pero puede entendérsela como una frecuencia natural del sistema. Esta misma expresión puede derivarse también de estas dos maneras. (a) Demostrar que cuando una solución oscilante para ρ_f proporcional a $e^{-i\omega_p t}$ se combina con $\nabla \cdot \mathbf{J}_f + (\partial\rho_f/\partial t) = 0$, $\mathbf{J}_f = \sigma\,\mathbf{E}$ y $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f/\epsilon'$ el resultado vuelve a ser (24-138). (b) Suponer que igual número de iones

positivos y electrones se desplazan unos con respecto a otros una pequeña distancia x. Encontrar la fuerza sobre una de las densidades superficiales de carga resultantes producidas por la otra, y demostrar que la ecuación de movimiento correspondiente es la de un oscilador armónico simple de frecuencia ω_p dada por (24-138).

24-26 (a) Encontrar la velocidad de grupo v_G definida en (24-144), para un sistema con relación de dispersión (24-137). Graficar v_G en funciones de ω para $\omega > \omega_p$. Demostrar que el producto de las velocidades de fase y de grupo es $vv_G = (\mu\epsilon)^{-1}$. (b) Demostrar que si la relación de dispersión tiene la forma $k^2 = f(\omega^2)$, entonces el producto vv_G será constante siempre que f tenga la forma $f = A\omega^2 + B$ donde A y B son constantes.

24-27 Suponer que (24-137) describe un sistema y que $\omega > \omega_p$. Encontrar $\langle u_e \rangle$, $\langle u_m \rangle$, $\langle u_m \rangle / \langle u_e \rangle$, $\langle u \rangle$, $\langle \mathbf{S} \rangle$ y demostrar que $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u \rangle v_U \mathbf{k}$, donde v_U se puede interpretar como la rapidez del flujo de energía. Demostrar que $v_G < v_u < (\mu\epsilon)^{-1/2} < v$.

24-28 Considerar la posibilidad más general de que un medio tenga todos sus parámetros complejos, es decir, $\mu = \mu_R + i\mu_I$, $\epsilon = \epsilon_R + i\epsilon_I$ y $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$. Demostrar que todavía es posible expresar k en la forma (24-38) siendo α y β reales. Encontrar α y β. Considerar ahora un material estrictamente *no conductor* y demostrar que es todavía posible encontrar atenuación ($\beta \neq 0$ y que también seguirá habiendo una diferencia de fase entre **E** y **B** ($\beta/\alpha \neq 0$).

24-29 El símbolo Q se introdujo originalmente como una abreviación de "factor de calidad". Aunque en (24-66) se encontró una interpretación de Q muy útil, existen otras dos maneras de expresarlos, que resultan por demás interesantes. (a) Demostrar que Q mide la relación entre el tiempo de relajación de un medio conductor, según se da en (12-41), y el período temporal T de la oscilación, (b) Expresar δ/λ como una función exclusiva de Q y demostrar que cuando $Q \gg 1$ ésta se reduce a $Q = \pi\delta/\lambda$. (c) Utiliza este último resultado para justificar la siguiente manera conveniente de recordar el significado físico de Q: "El valor de Q es igual al número de ciclos que durará una oscilación (casi) libre."

24-30 Considerar dos campos electromagnéticos distintos descritos por los pares $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ y $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$. Suponer que el medio es i.h.l. en todas sus propiedades, que $\mathbf{J}_f' = 0$ y que estos dos campos son funciones sinusoidales del tiempo con la misma frecuencia, es decir, que son proporcionales a $e^{-i\omega t}$. Demostrar que $\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = 0$ se desprende de las ecuaciones de Maxwell. A este resultado se le conoce como el *lema de Lorentz* y demuestra que estos campos electromagnéticos, independientes en todos los demás aspectos, están en realidad ligados entre sí en este sentido.

Capítulo 25
Reflexión y refracción de ondas planas

En el último capítulo se estudiaron ondas planas de extensión infinita de modo que pudieran considerarse como viajando en un medio infinito. Sin embargo, en una situación real llegará el momento en que la onda se encuentre con otro medio que tenga propiedades electromagnéticas diferentes; por ejemplo, una onda de luz en el aire puede llegar a un cuerpo de vidrio. Por lo general, la onda incidente será capaz de penetrar en el segundo medio hasta cierto punto, y lo que aquí se investiga es cómo queda la situación general cuando se alcance un nuevo estado estacionario. Como se verá, resulta posible resolver este problema a través de las condiciones de frontera que la onda debe satisfacer en una superficie de discontinuidad de propiedades, recordándose que estas condiciones de frontera se obtuvieron directamente de la ecuaciones de Maxwell.

25-1 Las leyes de la reflexión y la refracción

Se supone que la superficie entre los dos medios es plana e infinita. Se supone también que no existen cargas o corrientes libres sobre la superficie limitante. En ese caso las condiciones de frontera dadas en (21-25) a (21-28) se reducen simplemente a (1) las componentes normales de **D** y **B** son continuas, y (2) las componentes tangenciales de **E** y **H** son continuas. Pronto se verá que para los objetivos presentes, únicamente se necesita la segunda de ellas; queda como ejercicio demostrar que se obtendrían los mismos resultados si se utilizara la primera condición relativa a las componentes normales.

Por lo tanto, la situación más general que se puede visualizar corresponde a una onda incidente que viaja en un medio 1 de parámetros electromagnéticos $(\mu_1, \epsilon_1, \sigma_1)$ que entra en otro medio 2 de parámetros $(\mu_2, \epsilon_2, \sigma_2)$. Aunque resulta bastante fácil encontrar una solución general cuando ambos medios son conductores, la complejidad de los resultados tiende a dificultar la cabal comprensión e interpretación de lo que está ocurriendo. En consecuencia, por ahora se toman ambos medios como no conductores, de modo que todos los vectores de propagación son reales; en la sección 25-6 se estudia brevemente el efecto de la conductividad. Aprovechando la experiencia ajena, se supone desde el principio que la única manera de satisfacer las ecuaciones de frontera es aceptando la existencia de *tres* ondas: la onda *incidente* en el medio 1, la onda *reflejada* también en 1 y la onda

transmitida en el medio 2; se utilizan los índices *i, r* y *t*, respectivamente, para marcar las cantidades que corresponden a cada una de estas ondas.

Por medio de (24-89) se pueden expresar los campos eléctricos de estas ondas como

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \qquad \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)}$$
$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)} \tag{25-1}$$

donde

$$k_i^2 = \left(\frac{\omega_i}{v_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1 \omega_i}{c}\right)^2 \qquad k_r^2 = \left(\frac{\omega_r}{v_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1 \omega_r}{c}\right)^2 \qquad k_t^2 = \left(\frac{\omega_t}{v_2}\right)^2 = \left(\frac{n_2 \omega_t}{c}\right)^2 \tag{25-2}$$

habiéndose introducido, por medio de (24-17) y (24-13), la velocidad de fase y el índice de refracción del medio correspondiente; nótese que no se han hecho suposiciones acerca de las frecuencias. Se pueden escribir ecuaciones similares para los campos magnéticos.

El origen del tiempo t en (25-1) es arbitrario; $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un punto dado con respecto al origen, también arbitrario. Sin embargo, por simplicidad, supóngase que el origen se encuentra situado sobre la superficie de separación, de modo que el vector de posición $\mathbf{r}_B$, de un punto sobre la superficie limitante queda también sobre la propia superficie. La figura 25-1 muestra todas estas cantidades, donde también se indica la normal $\hat{\mathbf{n}}$ a la frontera, dibujada del medio 1 al 2, siguiendo la convención estándar adoptada.

El campo eléctrico total en un punto dado del medio 1 será $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$, mientras que en un punto del medio 2 será $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$. En cualquier punto *sobre la frontera*, donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B$, se debe tener que $\mathbf{E}_{1\,\mathrm{tang}} = \mathbf{E}_{2\,\mathrm{tang}}$, o sea,

$$\left[\mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_B - \omega_i t)} + \mathbf{E}_{0r} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_B - \omega_r t)}\right]_{\mathrm{tang}}$$
$$= \left[\mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_B - \omega_t t)}\right]_{\mathrm{tang}} \tag{25-3}$$

debiendo esto ser cierto para todos los valores de t y todos los $\mathbf{r}_B$ posibles, donde t y $\mathbf{r}_B$ pueden variar de manera independiente. Sin importar los valores relativos de las amplitudes $\mathbf{E}_0$, resulta evidente que no se puede satisfacer (25-3) a menos que los valores de todos los exponentes sean iguales. Por lo tanto, se aprecia, en primer lugar, que $\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega$ de manera que las tres ondas deben tener todas la *misma frecuencia* ω; en este caso, (25-2) se simplifica a

$$k_i^2 = k_r^2 = \left(\frac{n_1 \omega}{c}\right)^2 = k_1^2 \qquad k_t^2 = \left(\frac{n_2 \omega}{c}\right)^2 = k_2^2 \tag{25-4}$$

De manera similar, se debe tener que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_B = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_B = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}_B$; resulta útil tomar la diferencia en pares de éstas para obtener las dos ecuaciones:

$$(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}_B = 0 \qquad (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r}_B = 0 \tag{25-5}$$

que demuestran que estas *diferencias* entre los vectores de propagación deben ser perpendiculares a $\mathbf{r}_B$ y, por lo tanto, a la superficie limitante; esto es cierto también para el par $\mathbf{k}_r$ y $\mathbf{k}_t$, dado que también tiene $(\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r}_B = 0$. La primera ecuación en (25-5) relaciona

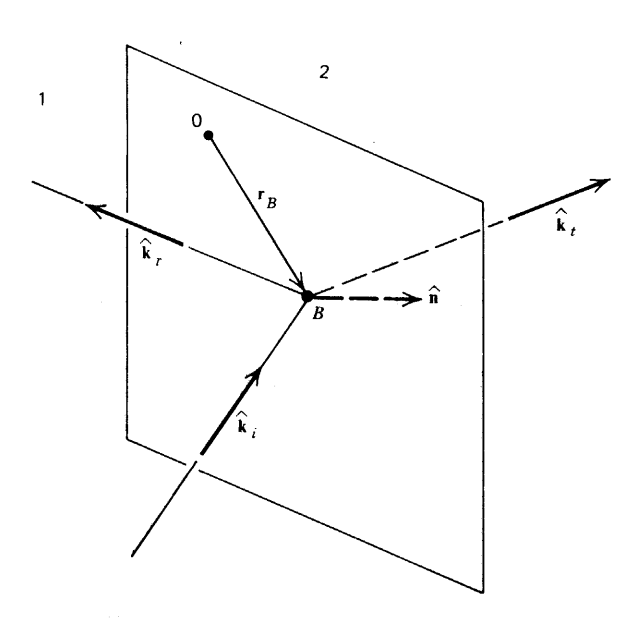


Figura 25-1 Relaciones en una superficie plana entre dos medios.

entre sí los vectores de propagación incidente y reflejada, por lo que puede llamársele la *ley de la reflexión*; de manera similar, la segunda es la *ley de la refracción* puesto que relaciona entre sí las ondas incidente y transmitida (refractada).

El plano definido por $\hat{\mathbf{n}}$ y el vector incidente $\mathbf{k}_i$ recibe el nombre de *plano de incidencia,* el cual está ilustrado en la figura 25-2. El ángulo θ_i formado entre $\mathbf{k}_i$ y la normal es el *ángulo de incidencia*. Se puede descomponer $\mathbf{k}_i$ en sus componentes normal y paralela a la superficie de discontinuidad si se define un vector tangencial unitario, τ , que es paralelo a la superficie y está sobre el plano de incidencia; así, se puede escribir

$$\mathbf{k}_i = k_{in}\hat{\mathbf{n}} + k_{i\tau}\hat{\boldsymbol{\tau}} \tag{25-6}$$

Se puede expresar en forma de componentes cualesquiera otros vectores que no necesariamente se encuentren sobre el plano de incidencia, si se introduce un tercer vector unitario, $\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\tau}$, que se encuentra también sobre la superficie entre 1 y 2 y es perpendicular tanto a $\hat{\mathbf{n}}$ como a $\hat{\tau}$, tal como se muestra en la figura 25-3. Se pueden, pues, expresar los otros dos vectores de propagación en la forma

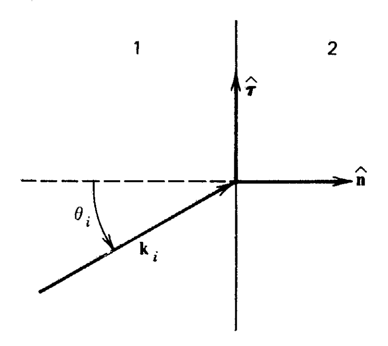


Figura 25-2 Este es el plano de incidencia.

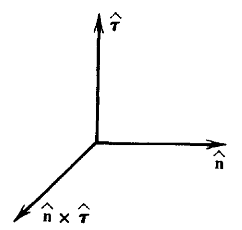


Figura 25-3 Los tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares.

$$\mathbf{k}_r = k_{rn}\hat{\mathbf{n}} + k_{r\tau}\hat{\tau} + k_{rc}\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\tau} \qquad \mathbf{k}_t = k_{tn}\hat{\mathbf{n}} + k_{t\tau}\hat{\tau} + k_{tc}\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\tau} \tag{25-7}$$

mientras que

$$\mathbf{r}_B = r_{B\tau}\hat{\tau} + r_{Bc}\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\tau} \tag{25-8}$$

ya que éste se encuentra enteramente en la superficie y por lo tanto no posee componente normal.

Sustituyendo de (25-6) a (25-8) en (25-5) y recordando que los vectores unitarios son mutuamente perpendiculares de modo que $\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\tau} = 0$. etc., se obtienen

$$(k_{i\tau} - k_{r\tau})r_{B\tau} - k_{rc}r_{Bc} = 0 \qquad (k_{i\tau} - k_{t\tau})r_{B\tau} - k_{tc}r_{Bc} = 0 \tag{25-9}$$

Puesto que $\mathbf{r}_B$ es arbitrario, (25-9) deber ser cierta también para el caso especial en que $r_{B\tau} = 0$, mientras que $r_{Bc} \neq 0$, resultando por (25-9) que $k_{rc} = k_{tc} = 0$, de modo que $\mathbf{k}_r$ y $\mathbf{k}_t$ no tienen componentes perpendiculares al plano de la figura 25-2. En otras palabras, los tres vectores de propagación se encuentran *sobre el mismo plano*, es decir, todos se encuentran sobre el plano de incidencia. Dado que $r_{B\tau}$ puede ser diferente de cero, a partir de (25-9) se observa que

$$k_{r\tau} = k_{i\tau} \qquad k_{t\tau} = k_{i\tau} \tag{25-10}$$

de modo que todos los k poseen las mismas componentes tangenciales. Se puede considerar que las ecuaciones en (25-10) son una segunda versión de las leyes de la reflexión y de la refracción. Se deben estudiar ahora las componentes normales.

Si se recuerda que $k_{rc} = 0$, de (25-7), (25-4), (25-10) y (25-6) se desprende que $k_{rn}^2 = k_r^2 - k_{r\tau}^2 = k_i^2 - k_{r\tau}^2 = k_{i\tau}^2 - k_{i\tau}^2 = k_{in}^2$ y por tanto, $k_{rn} = \pm k_{in}$. Si se tomara el signo positivo se vería que, según la figura 25-2, la onda reflejada se dirigiría hacia la superficie, como lo hace la onda incidente, mientras que lo lógico es que tienda a alejarse de ella, como se muestra en la figura 25-1. Por tanto, se debe tener que $k_{rn} = -k_{in}$. De manera similar, se encuentra que $k_{tn}^2 = k_t^2 - k_{t\tau}^2 = k_2^2 - k_{i\tau}^2$. Por lo tanto, la tercera versión de las leyes de reflexión y refracción debe ser

$$k_{rn} = -k_{in} \qquad k_{tn}^2 = k_2^2 - k_{i\tau}^2 \tag{25-11}$$

Según (25-4), $\mathbf{k}_i$ es un vector de magnitud k_1, y de la figura 25-2 se observa que

$$k_{in} = k_1 \cos\theta_i \qquad k_{i\tau} = k_1 \operatorname{sen}\theta_i \tag{25-12}$$

y, po lo tanto, $k_{rn} = -k_1 \cos \theta_i$, $k_{r\tau} = k_1$ sen θ_i, por (25-11) y (25-10). Puesto que también $\mathbf{k}_r$ tiene magnitud k_1, el ángulo de reflexión se define por

$$k_{rn} = -k_1 \cos\theta_r \qquad k_{r\tau} = k_1 \operatorname{sen}\theta_r \tag{25-13}$$

como se ilustra en la figura 25-4*a*. Al comparar estas diferentes expresiones de las componentes de $\mathbf{k}_r$ se concluye que

$$\theta_r = \theta_i \tag{25-14}$$

de modo que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Es así como esta antigua y bien conocida ley de óptica resulta ser una consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell.

En cuanto a la onda transmitida, de (25-10), (25-11), (25-12) y (25-4) se desprende que

$$k_{t\tau} = k_1 \operatorname{sen}\theta_i \tag{25-15}$$

$$k_{tn}^2 = k_2^2 - k_1^2 \operatorname{sen}^2\theta_i = k_2^2\left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i\right] \tag{25-16}$$

Estos valores son válidos para cualesquiera valores de la relación n_1/n_2 y del ángulo de incidencia.

En muchos casos resulta de gran utilidad *definir* un *ángulo de refracción* θ_t para $\mathbf{k}_t$ cuya magnitud es k_2 por medio de

$$k_{t\tau} = k_2 \operatorname{sen}\theta_t \qquad k_{tn} = k_2 \cos\theta_t \tag{25-17}$$

como también puede verse en la figura 25-4*b*. Cuando se combina (25-17) con la ley de refracción según está expresada en (25-15) y (25-16), y se usa también (25-4), se encuentra que se puede obtener

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t \tag{25-18}$$

$$\cos^2\theta_t = 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i \tag{25-19}$$

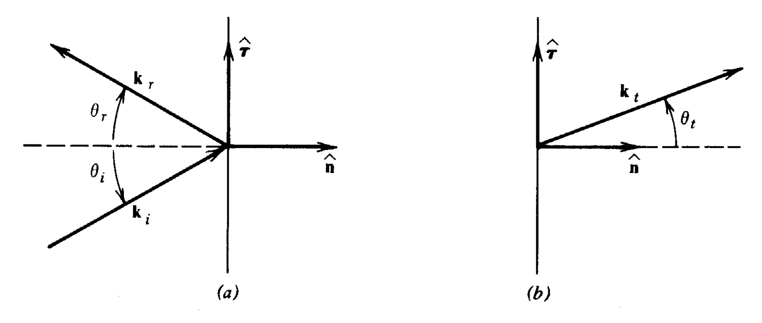


Figura 25-4 (*a*) θ_r es el ángulo de reflexión. (*b*) θ_t es el ángulo de refracción.

que tienen consistencia interna, puesto que $\cos^2 \theta_t = 1 - \text{sen}^2 \theta_t$. La primera ecuación (25-18) es conocida como la *ley de Snell* de la refracción, por haber sido descubierta experimentalmente por él; como se puede observar, esta ley relaciona los ángulos de incidencia y de refracción con los índices de refracción de los medios, resultando ser también una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell *vía* las condiciones de frontera que se obtuvieron de ellas.

Aún cuando (25-17) define dos cantidades sen θ_t y cos θ_t, éstas *no* siempre corresponden a un ángulo físico *real* θ_t. A continuación se estudia cómo ocurre esto y qué se puede hacer al respecto. De (25-18) se encuentra que sen $\theta_t = (n_1/n_2)$ sen θ_t. *Si* $n_1 < n_2$, entonces sen $\theta_t <$ sen $\theta_i \leqslant 1$ y $\cos^2 \theta_t = 1 - \text{sen}^2 \theta_t > 0$; por lo tanto, θ_t es un ángulo real y $\theta_t < \theta_i$. Este caso se encuentra ilustrado en la figura 25-5; nótese que $k_2/k_1 = n_2/n_1 > 1$. Si $n_1 > n_2$, entonces se sigue teniendo que sen $\theta_t = (n_1/n_2)$ sen $\theta_i >$ sen θ_i de modo que $\theta_t > \theta_i$, mientras que $k_2/k_1 < 1$. Sin embargo, debe ser cierto también que sen $\theta_t \leqslant 1$, de manera que θ_t será un ángulo real siempre que sen $\theta_i \leqslant n_2/n_1 < 1$. Resulta así útil definir el *ángulo crítico*, θ_c, por medio de

$$\text{sen}\,\theta_c = \frac{n_2}{n_1} \tag{25-20}$$

por lo que se puede expresar

$$\text{sen}\,\theta_t = \frac{\text{sen}\,\theta_i}{\text{sen}\,\theta_c} \qquad (n_1 > n_2) \tag{25-21}$$

Por lo tanto, para $\theta_i < \theta_c$, sen $\theta_t < 1$ y $\theta_t < \theta_i$. La figura 25-6 ilustra este caso. (Nótese que el más grande de los ángulos θ_i y θ_t se encuentra siempre en el medio de menor índice de refracción.) Si $\theta_i = \theta_c$, entonces sen $\theta_t = 1$ y $\theta_t = \frac{1}{2}\pi$, por lo que la onda refractada es paralela a frontera, como se ilustra en la figura 25-7; aquí se tiene que $k_2 < k_1$.

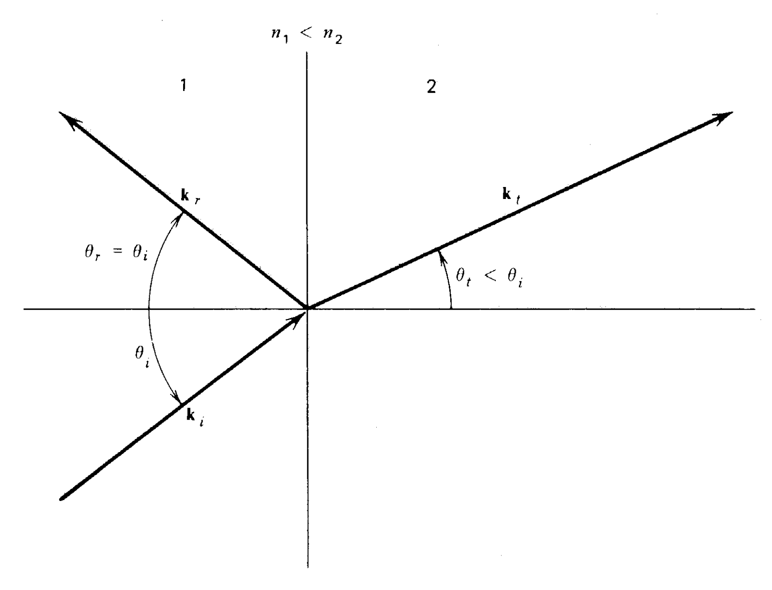


Figura 25-5 Los tres vectores de propagación relacionados entre sí por las leyes de la reflexión y de la refracción, cuando $n_1 < n_2$.

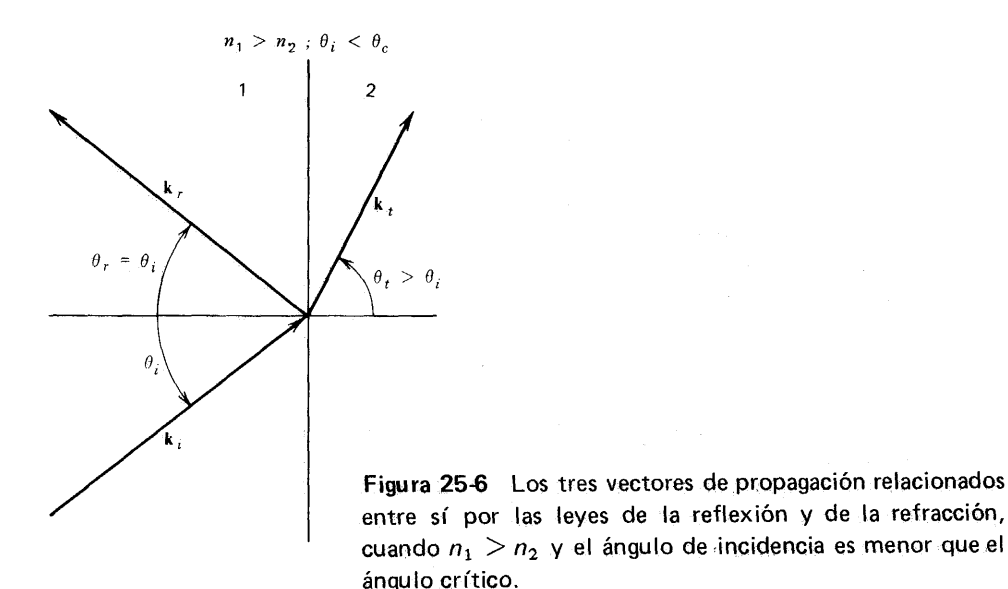


Figura 25-6 Los tres vectores de propagación relacionados entre sí por las leyes de la reflexión y de la refracción, cuando $n_1 > n_2$ y el ángulo de incidencia es menor que el ángulo crítico.

Puesto que se puede escoger θ_i libremente, es posible hacer que $\theta_i > \theta_c$. En ese caso, según (25-21), sen $\theta_t > 1$, mientras que $\cos^2\theta_t = 1 - \text{sen}^2\theta_t < 0$, lo que es posible para un ángulo real y por consiguiente no se puede dibujar una figura del tipo de las últimas tres. (Puede todavía interpretarse a θ_t como un ángulo, siempre que éste sea *complejo* y de la forma $\theta_t = \frac{1}{2}\pi + ix$. Para ver cómo ocurre esto, se utiliza (24-22) para evaluar el seno como sen $\theta_t = (e^{i\theta t} - e^{-i\theta t})/2i = [e^{i(\pi/2)-x} - e^{-i(\pi/2)+x}]/2i = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \cosh x \geqslant 1$, como se necesita.) Es por eso que ya no resulta conveniente seguir con θ_t; sin embargo, se puede volver a analizar las componentes de $\mathbf{k}_t$ en función de θ_i por medio de (25-15) y (25-16), ya que éstas son *siempre* válidas. Por lo tanto, en principio no hay problema para manejar este caso. Sería conveniente estudiar estas dos clases tan amplias por separado, dejando para la sección 25-4 el tratamiento detallado del caso ($n_1 > n_2$; $\theta_i > \theta_c$).

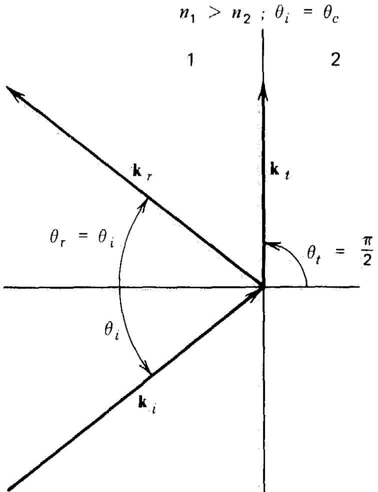


Figura 25-7 Los tres vectores de propagación cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo crítico.

Todos los resultados obtenidos hasta aquí se han derivado solamente de los términos exponenciales de propagación en la condición única de frontera (25-3), siendo todavía necesario encontrar las relaciones entre los propios campos. $\mathbf{E}_i$ debe estar sobre el plano perpendicular a $\mathbf{k}_i$, pero no se requiere que tenga una orientación particular con respecto al plano de incidencia de la figura 25-2. La figura 25-8 muestra la situación general de una orientación arbitraria de $\mathbf{E}_i$ para un ángulo de incidencia arbitrario. El plano sombreado es perpendicular a $\mathbf{k}_i$ y por lo tanto contiene a $\mathbf{E}_i$; este plano es también perpendicular al plano de incidencia definido por $\mathbf{k}_i$ y $\hat{\mathbf{n}}$. Puede verse que es posible expresar $\mathbf{E}_i$ como la suma vectorial

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i\perp} + \mathbf{E}_{i\parallel} \tag{25-22}$$

donde $\mathbf{E}_{i\perp}$ es la componente perpendicular al plano de incidencia y $\mathbf{E}_{i\parallel}$ es la componente paralela al (en el) plano de incidencia. Resulta que estas dos componentes se comportan de diferente manera en el plano de separación entre los dos medios, de modo que se

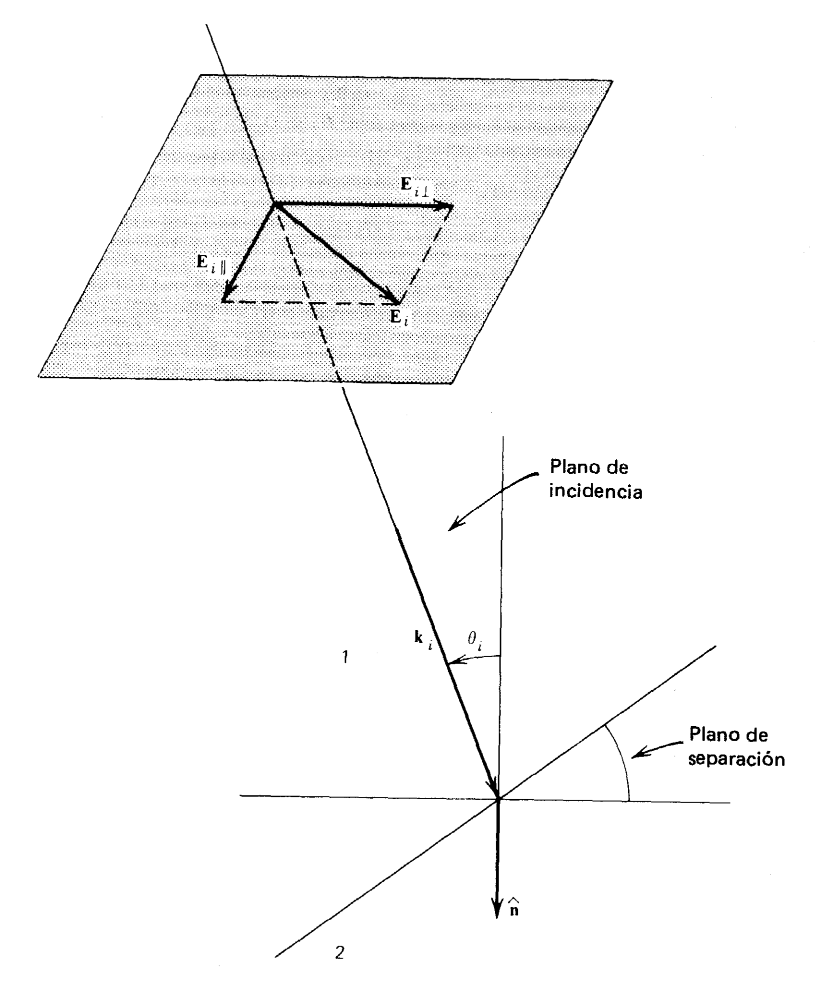


Figura 25-8 Definición de las componentes de $\mathbf{E}_i$ paralela y perpendicular al plano de incidencia.

han de considerar los dos casos por separado. Una vez que se encuentre cómo resulta afectada cada una de ellas, se pueden volver a combinar los resultados para encontrar los campos reflejado y transmitido totales, es decir, será posible expresar

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r\perp} + \mathbf{E}_{r\parallel} \qquad \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t\perp} + \mathbf{E}_{t\parallel} \tag{25-23}$$

25-2 E perpendicular al plano de incidencia

Puesto que no se cuenta con conocimientos *a priori* acerca de las relaciones existentes entre los diversos campos eléctricos, supóngase que todos ellos se dirigen *hacia afuera* de la página en cierto instante y en cierta localización particulares sobre la superficie de frontera; si esta suposición acerca de las direcciones relativas fuera incorrecta, el resultado final lo indicaría por medio de su signo. Las direcciones que corresponden a **H** pueden encontrarse a partir de la condición en que **E** × **H** se encuentra en la dirección de propagación $\hat{\mathbf{k}}$. Así se obtiene la situación que se muestra en la figura 25-9; por claridad, se han dibujado las **E** y **H** a cierta distancia de la superficie de separación entre los dos medios, pero debe recordarse que en realidad se desea que representen la situación *en* la superficie en la que se aplican las condiciones de frontera.

Puesto que los campos eléctricos son todos ellos paralelos entre sí y a la superficie, son componentes tangenciales, de modo que $\mathbf{E}_{1\,\mathrm{tang}} = \mathbf{E}_{2\,\mathrm{tang}}$ se vuelve simplemente

$$E_i + E_r = E_t \tag{25-24}$$

Todos los campos magnéticos están sobre el plano de incidencia, para el que $\hat{\tau}$ es el vector unitario tangencial, y así la otra condición de frontera $\mathbf{H}_{1\,\mathrm{tang}} = \mathbf{H}_{2\,\mathrm{tang}}$ se vuelve

$$(\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r)\cdot\hat{\tau} = \mathbf{H}_t\cdot\hat{\tau} \tag{25-25}$$

Este último resultado puede expresarse en función de los campos eléctricos por medio de

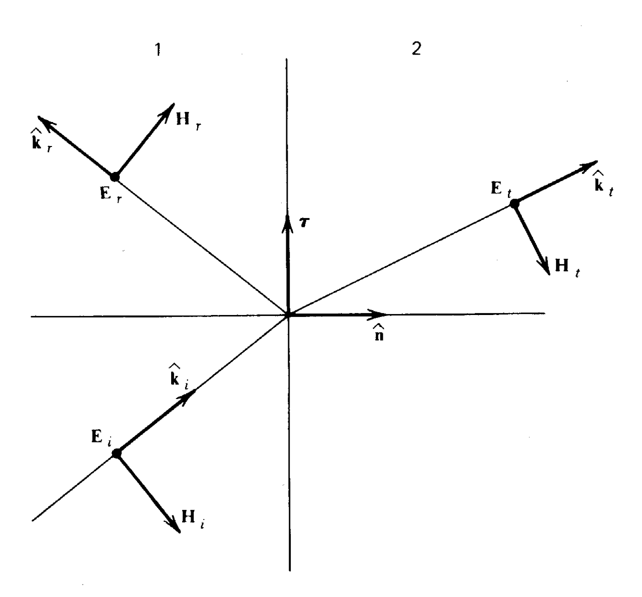


Figura 25-9 E_i es perpendicular al plano de incidencia.

$$\mathbf{H} = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}}{Z} \quad \text{y} \quad \hat{\tau} = \frac{\mathbf{E}_i \times \hat{\mathbf{n}}}{E_i} \tag{25-26}$$

según (24-94) y una inspección de la figura 25-9, si se recuerda que $\mathbf{E}_i$ está dirigido hacia afuera de la página. Por lo tanto, la componente tangencial de cualquiera de los campos magnéticos tiene la forma

$$\mathbf{H} \cdot \hat{\tau} = \frac{1}{ZE_i}(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{E}_i \times \hat{\mathbf{n}}) = -\frac{E}{Z}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \tag{25-27}$$

según (1-109), $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_i = 0$ (son perpendiculares) y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_i = EE_i$ (son paralelos). El valor apropiado para la impedancia es $Z_1 = (\mu_1/\epsilon_1)^{1/2}$ para las ondas incidente y reflejada en el medio 1, mientras que es $Z_2 = (\mu_2/\epsilon_2)^{1/2}$ para $\mathbf{H}_t$. Tomando todo esto en consideración y sustituyendo (25-27) en (25-25) se obtienen

$$\frac{1}{Z_1}\left[E_i(\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) + E_r(\hat{\mathbf{k}}_r \cdot \hat{\mathbf{n}})\right] = \frac{E_t}{Z_2}(\hat{\mathbf{k}}_t \cdot \hat{\mathbf{n}}) \tag{25-28}$$

Puesto que E_i es arbitrario, las cantidades significativas son las relacionadas E_r/E_i y E_t/E_i, pudiéndose ya calcular a partir de las dos ecuaciones (25-24) y (25-28). Los resultados son

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{Z_2(\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) - Z_1(\hat{\mathbf{k}}_t \cdot \hat{\mathbf{n}})}{Z_2(\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) + Z_1(\hat{\mathbf{k}}_t \cdot \hat{\mathbf{n}})} \tag{25-29}$$

$$\left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2Z_2(\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}})}{Z_2(\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) + Z_1(\hat{\mathbf{k}}_t \cdot \hat{\mathbf{n}})} \tag{25-30}$$

habiéndose hecho uso de $\hat{\mathbf{k}}_r \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$ según se encontró en (25-4), y de la ley de la reflexión dada en (25-11). Estas relaciones son la solución *general* para este caso y son válidas para cualesquiera valores de n_1/n_2 y θ_i. Para dejar esto bien claro, se les puede expresar completamente en función de θ_i por medio de $\mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} = k_{in}/k_1 = \cos\theta_i$, según (25-12), y de $\hat{\mathbf{k}}_t \cdot \hat{\mathbf{n}} = k_{tn}/k_2$ como se vio en (25-16), con lo que

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{Z_2\cos\theta_i - Z_1\left[1 - (n_1/n_2)^2\operatorname{sen}^2\theta_i\right]^{1/2}}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\left[1 - (n_1/n_2)^2\operatorname{sen}^2\theta_i\right]^{1/2}} \tag{25-31}$$

$$\left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_2\cos\theta_i + Z_1\left[1 - (n_1/n_2)^2\operatorname{sen}^2\theta_i\right]^{1/2}} \tag{25-32}$$

En el caso especial de una incidencia normal ($\theta_i = 0$), se reducen a

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \qquad \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \tag{25-33}$$

Resulta muy común también encontrar estos resultados expresados en función tanto del ángulo de incidencia θ_i como del ángulo de refracción θ_t. Puesto que θ_i es real únicamente para $n_1 < n_2$ o para $n_1 > n_2$ y $\theta_i \leqslant \theta_c$, las expresiones que siguen se restringen a esos casos. Así, (25-29) y (25-30) se vuelven

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t} \qquad \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2Z_2 \cos\theta_i}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t} \tag{25-34}$$

A menudo se suelen expresar en otras formas por medio de

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}\right)^{1/2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} = \frac{\mu_1 \operatorname{sen}\theta_i}{\mu_2 \operatorname{sen}\theta_t} \tag{25-35}$$

que se desprende de (24-95), (24-12), (24-13) y (25-18). Al dividir numerador y denominador de cada una de las expresiones (25-34) entre z_2 y después usar (25-35), se encuentra que las relaciones pueden también expresarse como

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{\mu_2 \tan\theta_t - \mu_1 \tan\theta_i}{\mu_2 \tan\theta_t + \mu_1 \tan\theta_i} \qquad \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2\mu_2 \tan\theta_t}{\mu_2 \tan\theta_t + \mu_1 \tan\theta_i} \tag{25-36}$$

De (25-33) se obtienen los resultados para incidencia normal:

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{\mu_2 n_1 - \mu_1 n_2}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2} \qquad \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2\mu_2 n_1}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2} \tag{25-37}$$

Se puede observar que estos resultados son compatibles con (25-36) pues, a medida que θ_i y θ_t se aproximan a cero, la ley de Snell (25-18) se vuelven aproximadamente

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{\operatorname{sen}\theta_i} \simeq \frac{\theta_t}{\theta_i} \simeq \frac{\tan\theta_t}{\tan\theta_i} \tag{25-38}$$

En el caso muy importante en que $\mu_1 = \mu_2$, que incluye los medios no magnéticos, las relaciones se pueden también escribir en general como

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = -\frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)} \qquad \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{(n_1/n_2)\operatorname{sen}2\theta_i}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)} \tag{25-39}$$

mientras que, para incidencia normal se reducen a

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = -\left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right) \qquad \left(\frac{E_t}{E_i}\right)_\perp = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} \tag{25-40}$$

A las ecuaciones en (25-39) se les suele llamar *ecuaciones de Fresnell*; él las desarrolló a partir de una teoría elástica de la luz mucho antes del desarrollo de la ecuaciones de Maxwell y de la teoría electromagnética de la luz. (Quizá no resulte tan sorprendente que lo haya podido hacer, puesto que si una onda elástica en un medio incide sobre otro

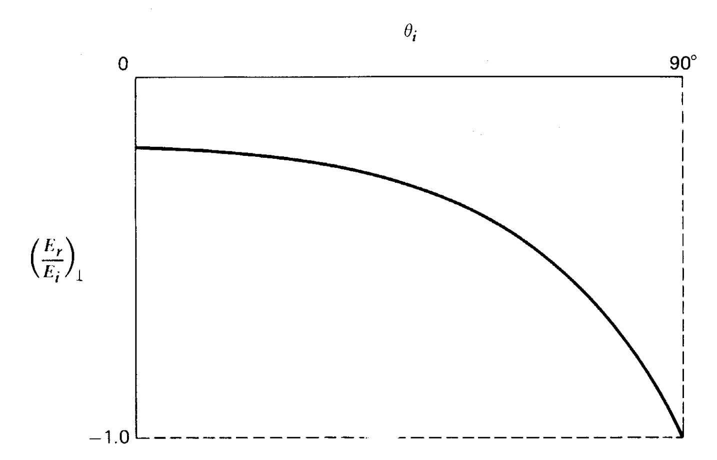


Figura 25-10 Relación de los campos eléctricos reflejado e incidente según las ecuaciones de Fresnel para $n_1 < n_2$.

medio de propiedades diferentes, también habrá que satisfacer algunas condiciones de frontera. Por ejemplo, si una onda viajara en una cuerda estirada, sería necesario que el desplazamiento fuera continuo en la unión, pues de otra manera la cuerda se soltaría.)

La forma general de los resultados obtenidos a partir de la ecuaciones de Fresnel, en función de θ_i, se ilustra en las figuras 25-10 y 25-11 para el caso $n_1 < n_2$. Nótese que la relación $(E_r/E_i)\perp$ es negativa para todos los valores de θ_i; esto puede también observarse en (25-39) ya que cuando $n_1 < n_2$, entonces $\theta_i > \theta_t$ de modo que sen $(\theta_i - \theta_t) > 0$. Esto significa que $\mathbf{E}_r$ es en realidad *opuesto* a la dirección que se había supuesto; en otras palabras, la onda reflejada ha cambiado su fase en 180° durante la reflexión en un medio de índice de refracción mayor. Por otro lado, $(E_t/E_i)\perp$ es siempre positiva, de manera que la onda transmitida no sufre cambio de fase (así, para representar la situación real, la dirección de $\mathbf{H}_r$ debe invertirse en la figura 25-9, mientras que $\mathbf{E}_r$ se dirige hacia adentro de la página; el resto de la figura no se altera).

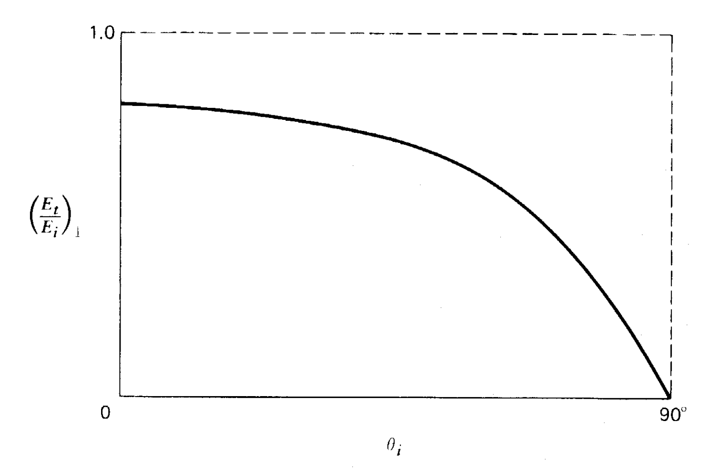


Figura 25-11 Relación de los campos eléctricos transmitido e incidente según las ecuaciones de Fresnel para $n_1 < n_2$.

Si $n_1 > n_2$ pero $\theta_1 \leqslant \theta_c$, entonces $\theta_i < \theta_t$, como se muestra en la figura 25-6; por tanto, sen $(\theta_i - \theta_t)$ será negativo, por lo que $(E_r/E_i)_\perp$ en (25-39) será siempre positiva, lo mismo que $(E_t/E_i)_\perp$, como antes. Esto quiere decir que no existe cambio de fase por reflexión en un medio de índice menor siempre que el ángulo de incidencia sea menor que el ángulo crítico.

Se desprende de (25-29), como se muestra en la figura 25-11, que la onda transmitida es siempre igual a cero para una incidencia rasante ($\theta_i = 90°$).

25-3 E paralelo al plano de incidencia

Se procede aquí de una manera muy similar a la de la sección anterior. Supóngase que todos los campos magnéticos se dirigen *hacia adentro* de la página; la figura 25-12 muestra la situación resultante. Según $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}/Z$ y $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0$, y tras un breve análisis de la figura, se puede observar que la análoga de (25-26) es

$$\mathbf{E} = Z\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{k}} \qquad \text{y} \qquad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_i}{H_i} \tag{25-41}$$

de manera que

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = -ZH(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = -E(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \tag{25-42}$$

puesto que $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{H}_i = 0$ (son perpendiculares) y los valores de E y H se encuentran relacionados entre sí por el factor Z.

En consecuencia, la continuidad de las componentes tangenciales de **E** (es decir, $\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\tau} = \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\tau}$) conduce a

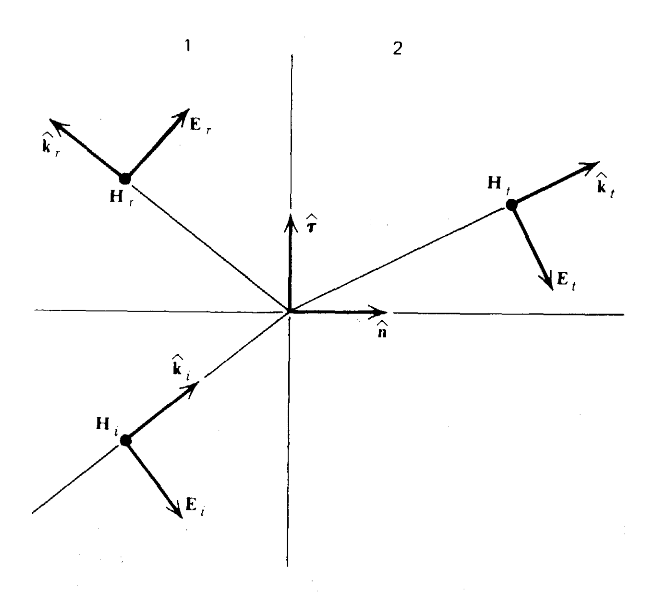


Figura 25-12 $\mathbf{E}_i$ es paralelo al plano de incidencia.

$$E_i(\hat{\mathbf{k}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}})+E_r(\hat{\mathbf{k}}_r\cdot\hat{\mathbf{n}})=(E_i-E_r)(\hat{\mathbf{k}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}})=E_t(\hat{\mathbf{k}}_t\cdot\hat{\mathbf{n}}) \tag{25-43}$$

por medio de (25-11) y (25-4). Puesto que los **H** son siempre componentes tangenciales y paralelas, $\mathbf{H}_{1\,\mathrm{tang}}=\mathbf{H}_{2\,\mathrm{tang}}$ conduce a

$$H_i+H_r=H_t=\frac{E_i+E_r}{Z_1}=\frac{E_t}{Z_2} \tag{25-44}$$

Pueden ya resolverse las ecuaciones 25-43 y 25-44 para obtener las relaciones E_r/E_i y E_t/E_i. Al hacerlo, y después de utilizar bastante álgebra y trigonometría, se pueden obtener todos los siguientes resultados de la misma manera que en la sección anterior.

Las soluciones *generales* aplicables a todos los valores de n_1/n_2 y θ_i son:

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{\parallel}=\frac{Z_1(\hat{\mathbf{k}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}})-Z_2(\hat{\mathbf{k}}_t\cdot\hat{\mathbf{n}})}{Z_1(\hat{\mathbf{k}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}})+Z_2(\hat{\mathbf{k}}_t\cdot\hat{\mathbf{n}})}=\frac{Z_1\cos\theta_i-Z_2\left[1-(n_1/n_2)^2\mathrm{sen}^2\theta_i\right]^{1/2}}{Z_1\cos\theta_i+Z_2\left[1-(n_1/n_2)^2\mathrm{sen}^2\theta_i\right]^{1/2}} \tag{25-45}$$

$$\left(\frac{E_t}{E_i}\right)_{\parallel}=\frac{2Z_2(\hat{\mathbf{k}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}})}{Z_1(\hat{\mathbf{k}}_i\cdot\hat{\mathbf{n}})+Z_2(\hat{\mathbf{k}}_t\cdot\hat{\mathbf{n}})}=\frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_1\cos\theta_i+Z_2\left[1-(n_1/n_2)^2\mathrm{sen}^2\theta_i\right]^{1/2}} \tag{25-46}$$

Cuando θ_t es un ángulo real ($n_1<n_2$ ó $n_1>n_2$ y $\theta_i\leqslant\theta_c$), las relaciones se vuelven

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{\parallel}=\frac{Z_1\cos\theta_i-Z_2\cos\theta_t}{Z_1\cos\theta_i+Z_2\cos\theta_t}=\frac{\mu_1\,\mathrm{sen}\,2\theta_i-\mu_2\,\mathrm{sen}\,2\theta_t}{\mu_1\,\mathrm{sen}\,2\theta_i+\mu_2\,\mathrm{sen}\,2\theta_t} \tag{25-47}$$

$$\left(\frac{E_t}{E_i}\right)_{\parallel}=\frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_1\cos\theta_i+Z_2\cos\theta_t}=\frac{4\mu_2\cos\theta_i\,\mathrm{sen}\,\theta_t}{\mu_1\,\mathrm{sen}\,2\theta_i+\mu_2\,\mathrm{sen}\,2\theta_t} \tag{25-48}$$

y, además, cuando $\mu_1=\mu_2$, se obtienen las otras dos *ecuaciones de Fresnel*

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{\parallel}=\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}\qquad\left(\frac{E_t}{E_i}\right)_{\parallel}=\frac{2\cos\theta_i\,\mathrm{sen}\,\theta_t}{\mathrm{sen}(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)} \tag{25-49}$$

Las diversas expresiones para incidencia normal son

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_{\parallel}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{\mu_1n_2-\mu_2n_1}{\mu_1n_2+\mu_2n_1}\quad\text{y}\quad\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\quad(\mu_1=\mu_2) \tag{25-50}$$

$$\left(\frac{E_t}{E_i}\right)_{\parallel}=\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{2\mu_2n_1}{\mu_1n_2+\mu_2n_1}\quad\text{y}\quad\frac{2n_1}{n_2+n_1}\quad(\mu_1=\mu_2) \tag{25-51}$$

En estos últimos resultados se tiene una aparente contradicción de signos. Si se observan de nuevo las figuras 25-2 y 25-8 se observa que para incidencia normal, cuando $\hat{\mathbf{k}}_i$ y $\hat{\mathbf{n}}$ están en la misma dirección, no existe un plano de incidencia definido, de modo que no se puede hacer distinción alguna en cuanto a si **E** es perpendicular o paralelo al plano de inci-

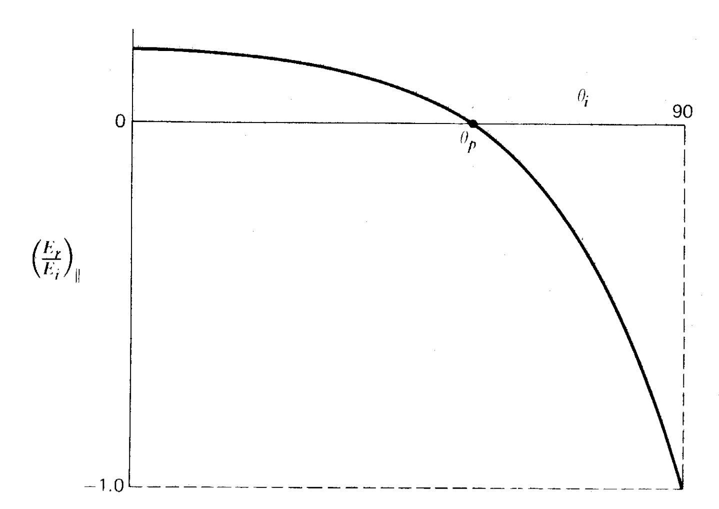


Figura 25-13 Relación de los campos eléctricos reflejado e incidente según las ecuaciones de Fresnel para $n_1 < n_2$.

dencia, por lo que los resultados de ambos casos deben reducirse a los mismos. Si bien (25-51) concuerda con las expresiones correspondientes de (25-33), (25-37) y (25-40), las diversas formas de (E_r/E_i) difieren por un signo menos. Esto resulta de la elección inicial de signos en ambos casos. En la figura 25-9 se supuso que $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_i$ eran paralelos, por lo que se consideró a E_r/E_i como un número positivo; pero para $n_1 < n_2$ resultó ser en realidad negativo, como ya se vio arriba. Por otro lado, las direcciones opuestas de $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_i$ se tomaron en consideración desde un inicio en la figura 25-12, de manera que la relación E_r/E_i se consideró también positiva. En otras palabras, la diferencia de signos refleja una diferencia en el tratamiento a los dos, pero cada uno de los casos es consistente internamente y por lo tanto deben ser consistentes entre sí.

Las figuras 25-13 y 25-14 muestran gráficas de las relaciones según están dadas por las ecuaciones de Fresnel (25-49), para $n_1 < n_2$. Analizando la figura 25-14 primero, se observa que es similar a la figura 25-11 en cuanto a la falta de un cambio de fase en la onda

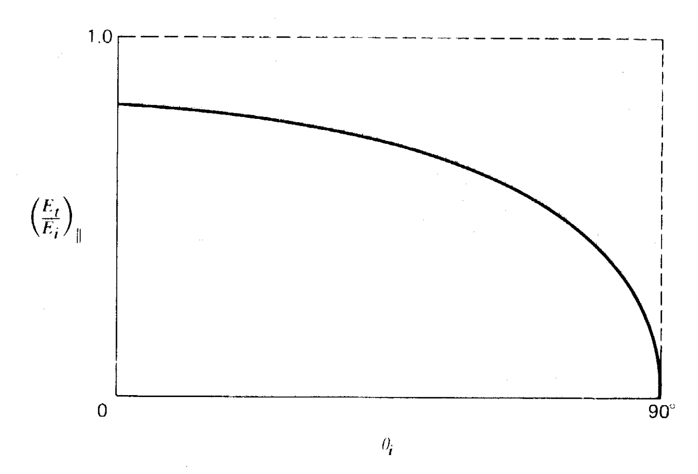


Figura 25-14 Relación de los campos eléctricos transmitido e incidente según las ecuaciones de Fresnel para $n_1 < n_2$.

transmitida, desapareciéndose éste también en el caso de incidencia rasante. Puesto que esto mismo ocurrió en el caso anterior, se puede concluir que la radiación electromagnética *siempre* se refleja completamente en la superficie de un dieléctrico en el caso de incidencia rasante. (Se podría verificar esto ahora mismo si se observa una fuente luminosa por reflexión contra una hoja de papel áspero y se va aumentando gradualmente el ángulo de incidencia hasta llegar a 90°.)

Adicionalmente, en la figura 25-13 se observa que no ocurrió aquí lo mismo que en el caso anterior, pues se presenta ahora un ángulo θ_p para el que la onda reflejada es igual a *cero*. De (25-49) se desprende que la condición para esto es que el denominador de $(E_r/E_i)\parallel$ sea infinito, es decir que $\theta_p + \theta_{tp} = 90°$, donde θ_{tp} es el ángulo de refracción correspondiente. En ese caso la ley de refracción (25-18) se vuelve $n_1 \operatorname{sen}\theta_p = n_2 \operatorname{sen}\theta_{tp} = n_2 \operatorname{sen}(90° - \theta_p) = n_2 \cos\theta_p$, de modo que

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1} \tag{25-52}$$

un resultado que se conoce como la *ley de Brewster*. Al ángulo θ_p se le da el nombre de *ángulo de polarización* por la siguiente razón. Considérese una onda incidente que no está polarizada, en el sentido de que su campo eléctrico posee componentes $\mathbf{E}_\perp$ y $\mathbf{E}_\parallel$ ambas diferentes de cero. Si esta onda incide con el ángulo de polarización θ_p, entonces sólo la componente $\mathbf{E}_\perp$ se reflejará, de modo que la onda reflejada sólo tendrá esa componente y por lo tanto se habrá *polarizado*. La polarización de la luz por reflexión fue descubierta experimentalmente por Malus, quien se encontraba observando la luz del sol reflejada en las ventanas del Palacio de Luxemburgo en París, resultando así una evidencia adicional de la naturaleza de onda electromagnética de la luz.

En la figura 25-13 se observa también que cuando $\theta_i > \theta_p$, la relación $(E_r/E_i)\parallel$ es negativa. Esto significa que la fase de la onda reflejada ha sido invertida repentinamente, es decir, que ha cambiado por 180° al pasar el ángulo de incidencia por el valor del ángulo de polarización.

25-4 Reflexión total ($n_1 > n_2$, $\theta_i > \theta_c$)

En breve se verá la razón para este título. En este caso θ_t no es un ángulo real, pero como ya se tienen resultados expresados completamente en función de θ_i éstos se pueden utilizar directamente. Resultaría conveniente, para facilitar la interpretación del resultado, el ser más específico en cuanto al sistema de coordenadas. Tómese el plano xy como la superficie de separación y el plano xz como el plano de incidencia. La figura 25-15 muestra esta situación, donde el eje y apunta hacia afuera de la página. Se puede observar que con esta elección $k_T = k_x$ y $k_n = k_z$, de modo que el campo eléctrico incidente tiene la forma

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_{0i} e^{i[k_1(x \operatorname{sen}\theta_i + z\cos\theta_i) - \omega t]} \tag{25-53}$$

según (25-12). La onda transmitida estará dada por

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_{0t} e^{i(k_{tx}x + k_{tz}z - \omega t)} \tag{25-54}$$

y según (25-15) se tiene que $k_{tx} = k_{tT} = k_1 \operatorname{sen}\theta_i$. La cantidad entre corchetes en (25-16) es ahora negativa, por lo que es preferible escribir k_{tn}^2 en la forma

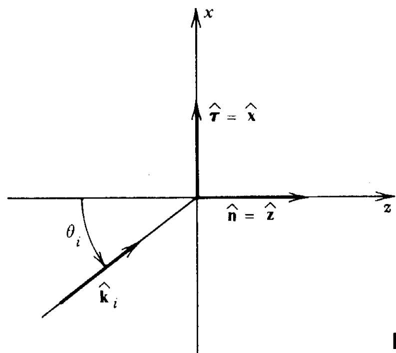


Figura 25-15 Sistema coordenado utilizado para el estudio de la reflexión total.

$$k_{tn}^2 = k_{tz}^2 = -k_2^2\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i - 1\right] = -k_2^2\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_c}\right)^2 - 1\right] = -K^2 \qquad (25\text{-}55)$$

por medio de (25-20). Por lo tanto, $k_{tz} = \pm\, iK$, haciendo que $e^{ik_{tz}z} = e^{\mp Kz}$. El signo positivo en el exponente daría una onda que se aumentaría indefinidamente a medida que viajara en la dirección z positiva, por lo que se le descarta y se escribe $z_{tz} = iK$, donde

$$K = k_2\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i - 1\right]^{1/2} = \left(\frac{n_2\omega}{c}\right)\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_c}\right)^2 - 1\right]^{1/2} \qquad (25\text{-}56)$$

con el empleo de (25-4). Si se sustituyen estos diversos resultados en (25-54), se obtiene la expresión para el campo eléctrico transmitido en el medio de menor índice de refracción:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t}\, e^{-Kz} e^{i(k_1 x \operatorname{sen}\theta_i - \omega t)} \qquad (25\text{-}57)$$

Esta es una onda que viaja en la dirección x, es decir, *paralela* a la superficie de separación, pero cuya amplitud disminuye en la dirección z, *perpendicular* a la dirección de propagación. La velocidad de la onda es

$$v_{2x} = \frac{\omega}{k_1 \operatorname{sen}\theta_i} = \frac{c}{n_1 \operatorname{sen}\theta_i} = \frac{(c/n_2)}{(n_1/n_2)\operatorname{sen}\theta_i} = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta_c}{\operatorname{sen}\theta_i}\right) v_2 \qquad (25\text{-}58)$$

donde v_2 es la velocidad normal de una onda en este medio. Puesto que $\theta_i > \theta_c$, resulta $v_{2x} < v_2$, por lo que esta onda viaja más lentamente que una onda plana usual; (25-57) *no* es una onda plana, en el sentido de que su valor no es constante en un plano perpendicular a la dirección de propagación. Más aún, la velocidad de onda v_{2x} no es una constante que dependa exclusivamente de las propiedades del medio, sino que también depende del ángulo de incidencia.

La amplitud decrece exponencialmente con el aumento de la profundidad de penetración, disminuyendo por un factor $1/e$ en una profundidad de penetración δ_z, dada por

$$\delta_z = \frac{1}{K} = \frac{(\lambda_2/2\pi)}{\left[(n_1/n_2)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i - 1\right]^{1/2}} \qquad (25\text{-}59)$$

donde $\lambda_2 = 2\pi/k_2 = 2\pi c/n_2\omega$ es la longitud de una onda plana normal en este medio. A esta onda recién descrita se le suele llamar *onda evanescente* y la figura 25-16 ilustra muy esquemáticamente sus propiedades. Aunque no se indica en la figura, se puede también caracterizar esta onda diciendo que los planos de amplitud constante son perpendiculares a los planos de fase constante. Considérese ahora el campo eléctrico reflejado.

Por medio de (25-56) se encuentra que (25-31) y (25-45) se pueden expresar como

$$\left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\perp = \frac{Z_2\cos\theta_i - iZ_1(K/k_2)}{Z_2\cos\theta_i + iZ_1(K/k_2)} \qquad \left(\frac{E_r}{E_i}\right)_\parallel = \frac{Z_1\cos\theta_i - iZ_2(K/k_2)}{Z_1\cos\theta_i + iZ_2(K/k_2)} \tag{25-60}$$

Nótese que *ambas* tienen la misma forma general:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{A-iB}{A+iB} = \frac{(A^2+B^2)^{1/2}e^{-i\varphi}}{(A^2+B^2)^{1/2}e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi} \tag{25-61}$$

donde $\tan\varphi = B/A$. Por lo tanto, en ambos casos $|E_r/E_i| = 1$, de modo que la onda reflejada tiene la misma amplitud que la onda incidente. Como se verá en la siguiente sección, la energía reflejada es también igual a la energía incidente; de ahí el nombre *reflexión total* que se aplica a este caso.

Sin embargo, la aparición del factor $e^{-2i\varphi}$ en la relación significa que existe un cambio relativo de fase de 2φ de la onda reflejada con respecto a la incidente. Los ángulos φ que se calculan a partir de (25-60), (25-56) y (25-35) están dados por

$$\tan\varphi_\perp = \frac{Z_1(K/k_2)}{Z_2\cos\theta_i} = \left(\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\right)\frac{\left[(n_1/n_2)^2\operatorname{sen}^2\theta_i - 1\right]^{1/2}}{\cos\theta_i} \tag{25-62}$$

$$\tan\varphi_\parallel = \frac{Z_2(K/k_2)}{Z_1\cos\theta_i} = \left(\frac{\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2}\right)\frac{\left[(n_1/n_2)^2\operatorname{sen}^2\theta_i - 1\right]^{1/2}}{\cos\theta_i} \tag{25-63}$$

Puede notarse que estos dos ángulos son diferentes y que, de hecho,

$$\tan\varphi_\perp = \left(\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\right)^2 \tan\varphi_\parallel \tag{25-64}$$

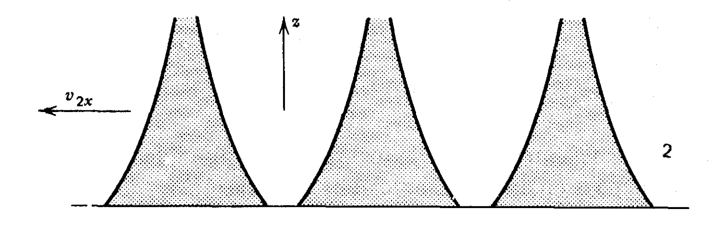


Figura 25-16 Comportamiento esquemático de una onda evanescente.

Así, para el caso en que $\mu_1 = \mu_2$, resulta que tan $\varphi\perp <$ tan $\varphi\|$ puesto que $n_2 < n_1$ y por ello $\varphi_\perp < \varphi_\|$. Debido a la similitud entre el plano que contiene a $\mathbf{E}_i$ en la figura 25-8 y el plano que se muestra en la figura 24-7, se puede concluir que si una onda polarizada linealmente incide con el ángulo superior al ángulo crítico, sus componentes perpendicular y paralela se reflejarán con distintos corrimientos de fase, por lo que la onda reflejada resultante estará *polarizada elípticamente,* pudiento ser analizada por los métodos utilizados en la sección 24-7.

25-5 Relaciones energéticas

Se puede ya estudiar cómo se divide el flujo incidente de energía entre las ondas reflejada y transmitida. El flujo promedio de potencia incidente está dado por $< S_i >$, teniendo una componente normal a la superficie limitante y otra paralela a ella. Lo que evidentemente resulta de interés físico es saber qué pasa con la componente normal, puesto que es la que da lo que se refleja en el medio original. Por lo tanto, se define un *coeficiente de reflexión* para la potencia, R, como la magnitud de la relación de las componentes normales:

$$R = \left| \frac{\langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right| \qquad (25\text{-}65)$$

De (25-107) resulta que

$$\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} = \tfrac{1}{2}(\epsilon/\mu)^{1/2}|\mathbf{E}|^2(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \qquad (25\text{-}66)$$

Puesto que las ondas incidente y reflejada se encuentran en el mismo medio, $(\epsilon/\mu)^{1/2}$ tienen el mismo valor $(\epsilon_1/\mu_1)^{1/2}$ para cada una de ellas; además, $|\hat{\mathbf{k}}_r \cdot \hat{\mathbf{n}}| = |\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \cos\theta_r = \cos\theta_i$, según la ley de la reflexión (25-11) y (25-14). Tomando todo esto en consideración, de (25-65) y (25-66) se desprende que

$$R = \left| \frac{E_r}{E_i} \right|^2 \qquad (25\text{-}67)$$

y, puesto que ya se cuenta con estas relaciones, resulta sencillo calcular R.

Así, de (25-34) y (25-47), por ejemplo, se encuentra que

$$R_\perp = \left(\frac{Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t} \right)^2 \qquad (25\text{-}68)$$

$$R_\| = \left(\frac{Z_1 \cos\theta_i - Z_2 \cos\theta_t}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t} \right)^2 \qquad (25\text{-}69)$$

pudiéndose encontrar expresiones similares para todas las diversas maneras en que se expresaron las relaciones de los campos. Por ejemplo, en el caso de incidencia normal y $\mu_1 = \mu_2$, tanto (25-40) como (25-50) dan

$$R_{\text{normal}} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \qquad (\mu_1 = \mu_2) \qquad (25\text{-}70)$$

Si se considera el caso específico para el que $n_2/n_1 = 1.5$, que es el valor típico para el vidrio y el aire, se encuentra que (25-70) da $R_{\text{normal}} = 0.04$, de modo que aproximadamente el 4 por ciento del flujo de energía incidente se refleja en el caso de incidencia normal.

De manera similar, se puede también definir un *coeficiente de transmisión* para la potencia, T, por medio de

$$T = \left| \frac{\langle \mathbf{S}_t \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right| = \frac{Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i} \left| \frac{E_t}{E_i} \right|^2 \qquad (25\text{-}71)$$

donde se han utilizado (25-66), (25-12), (25-17) y (25-95), Por ejemplo, de (25-34) y (25-48) se puede encontrar que los casos que corresponden a (25-68) y (25-69) son

$$T_\perp = \frac{4 Z_1 Z_2 \cos\theta_i \cos\theta_t}{(Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t)^2} \qquad (25\text{-}72)$$

$$T_\parallel = \frac{4 Z_1 Z_2 \cos\theta_i \cos\theta_t}{(Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t)^2} \qquad (25\text{-}73)$$

mientras que, para incidencia normal ($\theta_i = \theta_t = 0$), de (25-51) y (25-71) resulta que

$$T_{\text{normal}} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2} \qquad (\mu_1 = \mu_2) \qquad (25\text{-}74)$$

puesto que $Z_1/Z_2 = n_2/n_1$ en este caso, según (25-35).

Resulta sencillo comprobar que estos tres pares satisfacen la relación

$$R + T = 1 \qquad (25\text{-}75)$$

que también es válida para los casos más generales descritos por (25-29), (25-30), (25-45) y (25-46). Es evidente que este resultado (25-75) expresa la conservación de la energía, puesto que esencialmente enuncia que toda la energía incidente vuelve a aparecer ya sea en la onda reflejada o en la onda transmitida, de modo que no se pierde nada de esta energía en el proceso.

En el caso particular de la reflexión total, la relación (25-61) muestra de inmediato que $R = |E_r/E_i|^2 = 1$, de modo que toda la energía incidente es reflejada, como ya se había apuntado antes. Por lo tanto, T debe ser igual a cero en este caso, quedando como un ejercicio derivar la demostración detallada de este hecho. Desde cierto punto de vista, esto parece ser una paradoja. Definitivamente los campos transmitidos no son iguales a cero, de modo que las densidades promedio de energía $< u_e >$ y $< u_m >$ deben ser diferentes de cero, resultando extraño que pudiera haber energía en el segundo medio, puesto que no se le puede transmitir nada. El estudio de este caso se ha restringido en realidad a un *estado estacionario*, en el que ninguna de las ondas cambia su carácter con el tiempo, de manera que las cantidades como R y T son constantes. Si se imagina cómo es que se inició la operación de este sistema, por ejemplo, encendiendo un haz de ondas, se ve que el comportamiento transitorio inicial debe haber sido diferente del estado estacionario final al que el sistema llegó finalmente. Es justamente en estos procesos iniciales

en los que reside el origen de la energía inicialmente transmitida al segundo medio; pero no se está aquí en posibilidad de considerar este hecho en detalle.

25-6 Reflexión en la superficie de un conductor

Surge una situación muy importante cuando una onda que viaja en un dieléctrico incide sobre un medio conductor tal como un metal. Por lo estudiado en la sección 24-3 se sabe que la onda transmitida sufrirá una atenuación provocada por las pérdidas de calor debidas a la resistividad, pero todavía no se conoce qué proporción de la energía incidente penetrará en el conductor.

Para el propósito presente bastará considerar únicamente la incidencia normal; en este caso, no se requiere distinguir entre campos incidentes paralelos o perpendiculares al plano de incidencia. Tómese otra vez un sistema coordenado como el de la figura 25-15 en el que el plano xy coincide con la superficie de separación. Supóngase que todos los campos eléctricos se dan a lo largo del eje x, con lo que se tendrá una situación como la de la figura 25-17. Los vectores de propagación unitarios son

$$\hat{\mathbf{k}}_i = -\hat{\mathbf{k}}_r = \hat{\mathbf{k}}_t = \hat{\mathbf{z}} \tag{25-76}$$

y, por lo tanto, los campos eléctricos deberán tener la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \hat{\mathbf{x}} E_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \qquad \mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{x}} E_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \\ \mathbf{E}_t &= \hat{\mathbf{x}} E_{0t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \end{aligned} \tag{25-77}$$

donde

$$k_1 = \frac{n_1 \omega}{c} \qquad k_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = \frac{N_2 \omega}{c} \tag{25-78}$$

de acuerdo con (25-4), (24-38) y (25-57); α_2 y β_2 para el segundo medio pueden calcularse a partir de (24-42) y (24-43) o de (24-45) y (24-46). Los campos magnéticos se pueden

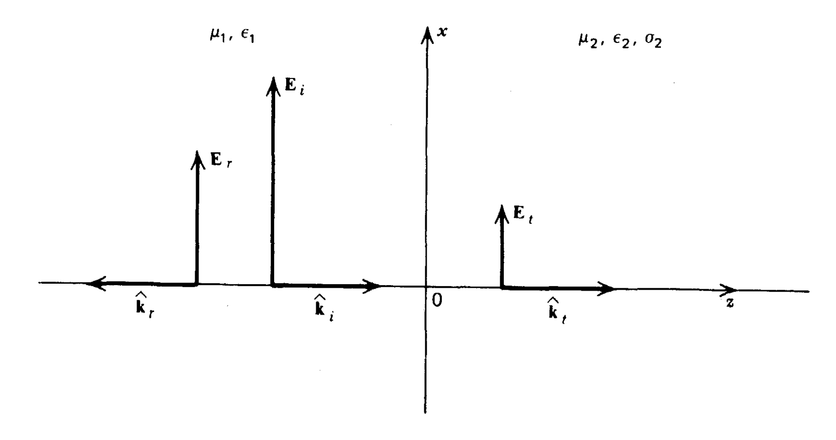


Figura 25-17 Sistema coordenado utilizado en el estudio de la reflexión sobre la superficie de un conductor.

obtener a partir de la relación general $\mathbf{H} = (k/\mu\omega)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$ dada en (24-93) y, al usar (25-76), se encuentra que

$$\mathbf{H}_i = \hat{\mathbf{y}}\frac{k_1}{\mu_1\omega}E_i \qquad \mathbf{H}_r = -\hat{\mathbf{y}}\frac{k_1}{\mu_1\omega}E_r \qquad \mathbf{H}_t = \hat{\mathbf{y}}\frac{k_2}{\mu_2\omega}E_t \tag{25-79}$$

Las condiciones de frontera que dan la igualdad de las componentes tangenciales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son válidas para $z = 0$ y todos los valores de t. Cuando se cancela el factor común $e^{-i\omega t}$ en ambos miembros del resultado obtenido usando (25-77) y (25-79), se llega a las siguientes dos ecuaciones:

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \qquad \frac{k_1}{\mu_1\omega}(E_{0i} - E_{0r}) = \frac{k_2}{\mu_2\omega}E_{0t} \tag{25-80}$$

que, cuando se resuelven para obtener las dos relaciones, conduce a

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{1-(\mu_1/\mu_2)(k_2/k_1)}{1+(\mu_1/\mu_2)(k_2/k_1)} = \frac{1-(\mu_1/\mu_2)(c/n_1\omega)(\alpha_2+i\beta_2)}{1+(\mu_1/\mu_2)(c/n_1\omega)(\alpha_2+i\beta_2)} \tag{25-81}$$

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2}{1+(\mu_1/\mu_2)(k_2/k_1)} = \frac{2}{1+(\mu_1/\mu_2)(c/n_1\omega)(\alpha_2+i\beta_2)} \tag{25-82}$$

Dado que ambas relaciones son complejas, tanto el campo eléctrico reflejado como el transmitido presentan un corrimiento de fase con respecto al campo incidente.

Esas relaciones se pueden expresar de una forma muy interesante si se introduce el índice de refracción complejo N_2 por medio de (25-78), encontrándose que

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1-(\mu_1/\mu_2)N_2}{n_1+(\mu_1/\mu_2)N_2} \qquad \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1+(\mu_1/\mu_2)N_2} \tag{25-83}$$

los que son exactamente de la misma forma que se encontró antes en (25-37), así mostrando que el índice de refracción complejo sí puede utilizarse de una manera que tiene significado físico. Se suelen encontrar a menudo estas relaciones expresadas en función de los índices de refracción reales; escribiendo $N_2 = n_2 + i(c\beta_2/\omega)$, como en (24-57), se obtiene

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{[n_1-(\mu_1/\mu_2)n_2] - i(\mu_1/\mu_2)(c\beta_2/\omega)}{[n_1+(\mu_1/\mu_2)n_2] + i(\mu_1/\mu_2)(c\beta_2/\omega)} \tag{25-84}$$

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{[n_1+(\mu_1/\mu_2)n_2] + i(\mu_1/\mu_2)(c\beta_2/\omega)} \tag{25-85}$$

En muchos casos interesantes, éstas se pueden simplificar todavía más si se toma $\mu_1 \simeq \mu_2$.

Se puede ahora encontrar el coeficiente de reflexión para la potencia a partir de (25-67) y (25-84), resultando

$$R = \frac{[n_1-(\mu_1/\mu_2)n_2]^2 + (\mu_1/\mu_2)^2(c\beta_2/\omega)^2}{[n_1+(\mu_1/\mu_2)n_2]^2 + (\mu_1/\mu_2)^2(c\beta_2/\omega)^2} \tag{25-86}$$

Como un caso especial, se ve que a medida que $\beta_2 \to \infty$, $R \to 1$. Este comportamiento límite indica que las ondas que son fuertemente absorbidas son también fuertemente reflejadas. Un ejemplo excelente de este comportamiento se encuentra en las propiedades ópticas del oro. Este metal se ve de color amarillento bajo reflexión, de modo que si se ilumina con luz blanca una lámina de oro lo *suficientemente delgada*, las porciones de color amarillo hasta rojo se absorberán prácticamente en forma total. Como resultado de esto, la luz transmitida únicamente contendrá las porciones del espectro desde verde hasta azul, de modo que la misma lámina se verá de color verdoso al observarse por transmisión. Se puede obtener un efecto similar con el cobre.

Hasta aquí, todos los resultados obtenidos en esta sección son exactos, pero puede ser muy interesante aproximar R para un caso límite muy importante.

Ejemplo

"Buenos conductores" (por ejemplo, metales). En (24-75) se encontró que en este caso $\alpha_2 \simeq \beta_2 \simeq (\frac{1}{2}\mu_2\sigma_2\omega)^{1/2}$, por lo que $N_2 = c\alpha_2/\omega \simeq c\beta_2/\omega \simeq c(\mu_2\sigma_2/2\omega)^{1/2} = (k_{m2}k_{e2}\sigma_2/2\omega\epsilon_2)^{1/2} = (k_{m2}k_{e2}/2Q_2)^{1/2} \gg 1$, puesto que $Q \ll 1$ en el caso de un buen conductor. Por lo tanto, se puede escribir

$$R \simeq \frac{[n_1 - (\mu_1/\mu_2)n_2]^2 + (\mu_1/\mu_2)^2 n_2^2}{[n_1 + (\mu_1/\mu_2)n_2]^2 + (\mu_1/\mu_2)^2 n_2^2} = \frac{1 + [1 - (\mu_2 n_1/\mu_1 n_2)]^2}{1 + [1 + (\mu_2 n_1/\mu_1 n_2)]^2} \tag{25-87}$$

Dado que $n_1 \approx 1$ para un dieléctrico típico, y si μ_2/μ_1 es también del orden de la unidad, se puede tomar $\mu_2 n_1/\mu_1 n_2 = x \ll 1$ y desarrollar (25-87) en una serie de potencias en x; conservando únicamente el primer término en x que no desaparece, se obtiene $R = [1 + (1-x)^2]/[1 + (1+x)^2] \simeq (2 - 2x)/(2 + 2x) = (1-x)/(1+x) \simeq (1-x)(1-x) \simeq 1 - 2x$, de modo que, para un buen conductor,

$$R \simeq 1 - \frac{2\mu_2 n_1}{\mu_1 n_2} = 1 - 2\left(\frac{\kappa_{e1}\kappa_{m2}}{\kappa_{m1}}\right)^{1/2}\left(\frac{2\omega\epsilon_0}{\sigma_2}\right)^{1/2} \tag{25-88}$$

donde también se ha usado (24-14) para simplificar el resultado. Esta expresión medianamente complicada tiene la forma general $R = 1 -$ (una pequeña cantidad), de modo que R será muy próxima a la unidad para el caso de buenos conductores. Por lo tanto, esencialmente toda la energía se refleja, como suele ser el caso para los metales. La poca energía que se llega a transmitir al conductor se disipa muy rápidamente por la pérdida calorífica asociada con las corrientes inducidas.

Se pueden encontrar los resultados para un ángulo similar a la utilizada para la incidencia normal. Resultan ser bastante más complicados, pero se encuentra que para un *buen conductor* la onda transmitida viaja casi perpendicularmente a la superficie limitante. En el límite $\sigma \to \infty$ su trayectoria *es* normal a la superficie, de modo que el efecto es el mismo que si hubiera habido incidencia normal.

25-7 Indice de refracción continuamente variante

Se ha supuesto que los dos medios considerados son uniformes, de modo que sus propiedades son independientes de la posición. Pueden ocurrir otras posibilidades. Por ejemplo, la onda incidente puede llegar a un sistema formado por una serie de placas paralelas,

teniendo cada una de ellas sus propias características. En este caso se deberán satisfacer las condiciones de frontera en cada una de las uniones; uno de los ejercicios ilustra un ejemplo típico de esta situación. Otra posibilidad consiste en que el segundo medio tenga un índice de refracción que varía continuamente con la posición, siendo interesante estudiar aquí brevemente algunas consecuencias de esta situación.

Como un ejemplo específico, considérese el caso de un plasma donde el índice de refracción se puede calcular de (24-140), (24-139) y (24-13), resultando

$$n_P = \left(1 - \frac{n_e e^2}{m\epsilon_0 \omega^2}\right)^{1/2} \tag{25-89}$$

en el cual ahora está escrita la densidad numérica de electrones como n_e. Se puede observar que en el caso de propagación verdadera ($\omega > \omega_p$), se tendrá $n_p < 1$. Supóngase ahora que n_e no es constante, sino que varía con la posición.

Se puede encontrar un ejemplo de esta situación en la ionosfera. La ionosfera es una porción de la atmósfera terrestre en la que las moléculas se encuentran ionizadas por la radiación del sol. Hablando en términos generales, la densidad de electrones aumenta con la altura de modo que n_p disminuye con la altura. La ionosfera no es una característica estable de la atmósfera terrestre ya que su espesor, cantidad de ionización y localización del límite inferior puede variar en forma considerable con el tiempo, a menudo en cuestión de horas. En consecuencia, aquí sólo se considera un caso simplificado que, sin embargo, es suficiente para ilustrar los efectos principales de esta situación.

Supóngase que existe una frontera definida entre la plasma y un medio no ionizado; tómese otra vez la superficie limitante como el plano xy, con el eje z apuntando hacia arriba como se aprecia en la figura 25-18. (No se dibuja la onda reflejada). Supóngase que n_e aumenta con z cuando $z > 0$, por lo que n_p decrece con z, permaneciendo menor a la unidad.

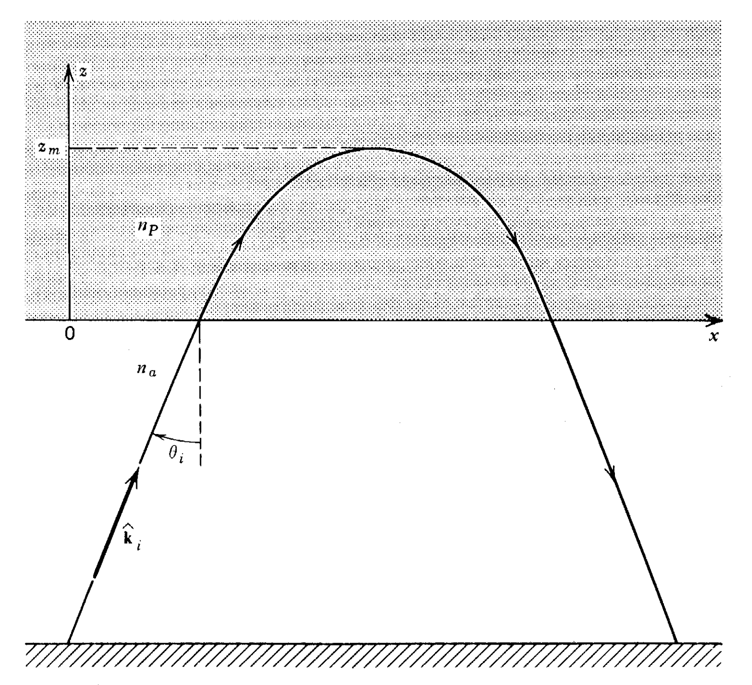


Figura 25-18 Propagación de una onda en la ionosfera.

Una onda en la dirección $\mathbf{k}_i$ viaja en el aire de índice n_a e incide sobre la frontera con un ángulo de incidencia θ_i. La ley de Snell (25-18) dice que, en esencia, si se sigue a la onda transmitida, la cantidad n sen θ = const., es decir, se "conserva." Por lo tanto, si θ_p (z) es el ángulo que la onda transmitida forma junto con el eje z a una distancia z en el interior del plasma, se tiene que

$$n_a \operatorname{sen} \theta_i = n_P(z) \operatorname{sen} \theta_P(z) = \text{const.} \tag{25-90}$$

Puesto que $n_a > 1 > n_p(z)$ y n_p es decreciente, de esta ecuación se desprende que θ_p (z) aumenta con la distancia de penetración. En otras palabras, la dirección de $\hat{\mathbf{k}}_t$ se acerca constantemente a la horizontal y la onda transmitida sigue la trayectoria que se indica. Llega al punto en que alcanza una altura máxima, z_m, donde $\hat{\mathbf{k}}_t$ es horizontal y donde se invierte para seguir una trayectoria simétrica como la que se muestra, volviendo al aire con el mismo ángulo θ_i y regresando después a la Tierra. (En transmisiones de radio, a la distancia desde el punto de origen hasta el punto de retorno se le denomina "distancia de salto" y puede llegar a ser de varios cientos de kilómetros.) De hecho, la onda incidente ha sido "reflejada" por el plasma.

A la distancia z_m, θ_p $(z_m) = 90^\circ$, de modo que (25-90) se vuelve n_a sen $\theta_i = n_p$ (z_m). Al combinar esto con (25-89) se encuentra que

$$n_e(z_m) = \frac{m\epsilon_0\omega^2}{e^2}\left(1 - n_a^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i\right) \tag{25-91}$$

que puede usarse para evaluar n_e para este valor z_m en particular.

25-8 Presión de radiación

En la sección 21-5 se vio que es posible asociar una cantidad de movimiento a un campo electromagnético en el vacío, resultando que, según (21-75), la densidad de cantidad de movimiento es $\mathbf{g} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S}$. Si se aplica esto a las ondas planas, el interés principal se centrará en el promedio temporal de esta cantidad, que estará dado por

$$\langle \mathbf{g} \rangle = \mu_0\epsilon_0 \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{c^2} \tag{25-92}$$

Del ejemplo de la sección 24-6 se sabe que $\langle \mathbf{S} \rangle$ es diferente de cero para una onda plana y que se encuentra en la dirección de propagación; por lo tanto, $\langle \mathbf{g} \rangle$ tampoco será igual a cero y su dirección será la de propagación.

En las situaciones que involucran reflexión, la onda incidente traerá consigo una cantidad de movimiento hacia la superficie limitante con una cierta rapidez, mientras que la onda reflejada se la estará llevando con otra rapidez dada. Como resultado de esto, la cantidad de movimiento en el medio 1 habrá cambiado, y se sabe de la mecánica que esto significa que el medio 2 ha "ejercido" una fuerza sobre él. Pero, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza *sobre* el medio 2 deberá ser igual y opuesta a ésta; se concluye por tanto que un campo electromagnético incidente ejerce una fuerza sobre el medio por el cual es reflejado. A este efecto se le suele dar el nombre de *presión de radiación* y resulta sencillo de calcular a partir de los resultados ya obtenidos. (Este origen de la presión

de radiación trae claras reminiscencias) de la presión ejercida por un gas sobre las paredes de su recipiente en la teoría cinética de los gases y, como se verá, el presente cálculo se podrá reconocer como muy similar al utilizado en la teoría cinética.)

Tal como se muestra en la figura 25-19*a*, considérese que los campos incidentes se encuentran dentro de un cilindro oblicuo de sección ΔA y lados $c\Delta t$, donde Δt es un pequeño intervalo de tiempo. El volumen del cilindro es $\Delta_T = c\Delta t \Delta A \cos\theta_i$. Durante este intervalo, toda la cantidad de movimiento acarreada por los campos que se encuentra dentro de este volumen incidirá sobre la superficie limitante. Dado que es interesante conocer la componente normal de la cantidad de movimiento para poder calcular la fuerza normal, se puede ver que, durante el intervalo de tiempo, la cantidad de movimiento normal inicial es, según (25-92)

$$G_{in} = \langle \mathbf{g}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta\tau = \frac{\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \Delta A \cos\theta_i}{c} \tag{25-93}$$

En la figura 25-19*b* se tiene una imagen similar para la radiación reflejada y dado que la distancia de recorridos $c\Delta t$ es la misma, la cantidad de movimientos de los campos en este volumen es aquélla asociada con los mismos campos incidentes. Así, la cantidad de movimiento normal neta de los campos en el medio 1 es

$$G_{fn} = \frac{\langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t \Delta A \cos\theta_i}{c} \tag{25-94}$$

que resulta ser una cantidad negativa, puesto que el ángulo entre $< \mathbf{S}_r >$ y $\hat{\mathbf{n}}$ es mayor de 90° . El *cambio* en la cantidad de movimiento normal de los campos en el medio 1 es entonces $\Delta G_{1n} = G_{fn} - G_{in} = (\Delta t \Delta A \cos\theta_i / c)[< \mathbf{S}_r > \cdot \mathbf{n} - < \mathbf{S}_i > \cdot \mathbf{n}]$ que, si se toman los signos en consideración de manera explícita, se vuelve

$$\Delta G_{1n} = -\frac{\Delta t \Delta A \cos\theta_i}{c} [|\langle \mathbf{S}_r \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}| + |\langle \mathbf{S}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}|] \tag{25-95}$$

Si $\mathbf{F}_{em}$ es la fuerza promedio sobre los campos en el medio 1 y $\mathbf{F}_2$ es la fuerza sobre el medio 2, entonces $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_{em}$. Lo que es más, de la mecánica se sabe que el cambio en la cantidad de movimiento normal durante el intervalo de tiempo Δt es $\Delta G_{1n} = \mathbf{F}_{em} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t = -\mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta t = -F_{2n} \Delta t$, y por lo tanto,

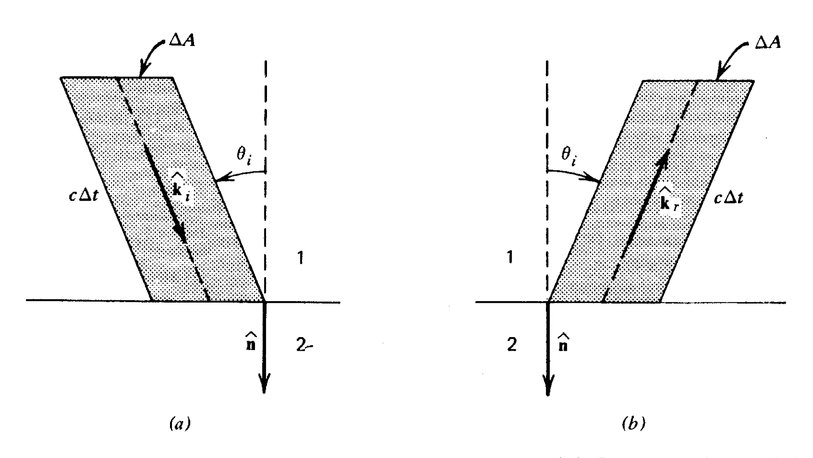


Figura 25-19 Cálculo de la presión de radiación. (*a*) Onda incidente. (b) Onda reflejada.

$$F_{2n}=\frac{\Delta A\cos\theta_i}{c}\left[|\langle \mathbf{S}_r\rangle\cdot\hat{\mathbf{n}}|+|\langle \mathbf{S}_i\rangle\cdot\hat{\mathbf{n}}|\right] \tag{25-96}$$

Esta es una cantidad positiva y es por tanto una fuerza *sobre* el medio 2, es decir, en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$. Puesto que es proporcional a la superficie ΔA, se puede definir una *presión* $P(\theta_i)$ como $F_{2n}/\Delta A$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} P(\theta_i)&=\frac{\cos\theta_i}{c}\left[|\langle \mathbf{S}_r\rangle\cdot\hat{\mathbf{n}}|+|\langle \mathbf{S}_i\rangle\cdot\hat{\mathbf{n}}|\right]\\ &=\frac{(1+R)\cos\theta_i}{c}|\langle \mathbf{S}_i\rangle\cdot\hat{\mathbf{n}}|=(1+R)\cos^2\theta_i\frac{|\langle \mathbf{S}_i\rangle|}{c} \end{aligned} \tag{25-97}$$

por medio de (25-65) y (1-15). Esto suele escribirse de una forma más conveniente en función de la densidad promedio de energía, puesto que $|<\mathbf{S}_i>|=<u_i>c$ según (24-111) para una onda incidente en el vacío; así, (25-97) queda como

$$P(\theta_i)=(1+R)\cos^2\theta_i\langle u_i\rangle \tag{25-98}$$

El valor máximo de P corresponde a $\theta_i=0$ y $R=1$, es decir, a incidencia normal sobre un conductor perfecto ($\sigma\to\infty$), con lo que se observa que

$$P_{máx}=2\frac{|\langle \mathbf{S}_i\rangle|}{c}=2\langle u_i\rangle \tag{25-99}$$

Considérese, por otro lado, un material absorbente total de radiación para el que $R=0$; éste *no* es un conductor, sino más bien un cuerpo "negro" idealizado. Así, a incidencia normal, $P_{\text{negro}}=|<\mathbf{S}_i>|/c=<u_i>=\frac{1}{2}P_{máx}$.

Los valores numéricos para la presión de radiación son en realidad muy pequeños para las situaciones que normalmente se presentan. Por ejemplo, el valor de la radiación solar que llega a la Tierra, que se estudia en el ejercicio 24-9, es de 1340 watts/ (metro)^2. Si se sustituye este valor en (25-99) se encuentra que la correspondiente presión de radiación máxima es de 8.9×10^{-6} newtons/ (metro)^2 = 8.8×10^{-11} atmósferas. A pesar de su valor tan pequeño, la presión de radiación ha sido medida para la luz y, de hecho, así se comprobó a (25-99) en 1903; el hecho de que las caudas de los cometas apuntan siempre en dirección opuesta al sol se atribuía antes completamente a la presión de radiación solar, pero ahora se piensa que ésta sólo contribuye parcialmente a ese efecto.

Ejercicios

25-1 Demostrar que usar el hecho de que las componentes normales de **D** y **B** son continuas no proporciona ninguna información adicional en el caso en que **E** es perpendicular al plano de incidencia. Repetir la demostración para el caso en que **E** es paralelo al plano de incidencia.

25-2 Encontrar las expresiones análogas a (25-29), (25-30), (25-45) y (25-46) para las relaciones H_r/H_i y H_t/H_i.

25-3 Demostrar que el ángulo de polarización es menor que el ángulo crítico para el caso $n_1>n_2$.

25-4 La expresión $\tan\theta_p = n_2/n_1$ para el ángulo de polarización, que se encontró en (25-52), suponía que $\mu_1 = \mu_2$. Considerar el caso general en el que los medios 1 y 2 son no conductores y de propiedades arbitrarias. (*a*) Demostrar que $(E_r/E_i)\parallel = 0$ cuando θ_i es tal que $\tan^2\theta_i = n_2^2(\mu_1^2 n_2^2 - \mu_2^2 n_1^2)[\mu_2^2 n_1^2(n_2^2 - n_1^2)]^{-1}$ (*b*). Encontrar la expresión correspondiente para $\tan^2\theta_i$ de modo que $(E_r/E_i)\perp = 0$. (*c*) Supóngase ahora que el medio 1 es el vacío y demostrar que únicamente puede darse un ángulo de polarización para el caso paralelo cuando $k_{ez} > k_{m2}$. (*d*) Encontrar el requisito correspondiente para el caso perpendicular cuando el medio 1 es el vacío.

25-5 Encontrar las relaciones $(E_t/E_i)\perp$ y $(E_t/E_i)\parallel$ para el caso de reflexión total y expresarlo en función del ángulo de incidencia. Demostrar que se puede escribir cada una de ellas en la forma general $A_t e^{-i\varphi t}$ y encontrar la relación $(\tan\varphi_t\perp/\tan\varphi_t\parallel)$. Si la onda incidente está polarizada linealmente, ¿qué clase de polarización en general tendrá el campo eléctrico transmitido?

25-6 Evaluar $\langle \mathbf{S}_t \rangle$ para el caso de reflexión total y demostrar entonces que $\langle \mathbf{S}_t \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$, como debe ocurrir para que T sea igual a cero.

25-7 (*a*) Demostrar que para el caso de reflexión total

$$\tan(\varphi_\parallel - \varphi_\perp) = \frac{(\mu_1 n_2/\mu_2 n_1)\left[(\mu_2 n_1/\mu_1 n_2)^2 - 1\right]\cos\theta_i\left[(n_1/n_2)^2 \operatorname{sen}^2\theta_i - 1\right]^{1/2}}{\left[(n_1/n_2)^2 - 1\right]\operatorname{sen}^2\theta_i}$$

(*b*) Una onda incidente viaja en un medio no magnético con índice de refracción igual a 4.5. El segundo medio consiste en vidrio no magnético de índice 1.5. La onda incidente se encuentra polarizada linealmente de modo que las componentes de $\mathbf{E}_{0i}$ perpendiculares y paralelas al plano de incidencia son iguales entre sí. Encontrar el θ_i tal que la onda totalmente reflejada posea polarización circular. (*c*) Encontrar el valor mínimo del índice de refracción del medio incidente para el que sería posible obtener una onda circularmente polarizada por medio de una reflexión total contra este vidrio, y encontrar el correspondiente ángulo de incidencia.

25-8 Comprobar que los pares (25-29), (25-30) y (25-45), (25-46) conducen a expresiones de R y T que satisfacen (25-75).

25-9 En la figura 25-20 se muestra un haz de sección rectangular $a \times b$ incidiendo sobre superficie plana que separa dos medios. (No se trata de una onda plana, pero si la longitud de onda es muy pequeña en comparación con a y b, podría ser una buena aproximación para tratarla como si tuviera las propiedades de onda plana.) (*a*) ¿Qué dimensiones tendrá el haz transmitido? (*b*) ¿Cuánto vale la potencia incidente total P_i en función de $\langle \mathbf{S}_i \rangle$? ¿La potencia transmitida P_t en función de $\langle \mathbf{S}_t \rangle$? (*c*) Si se define un

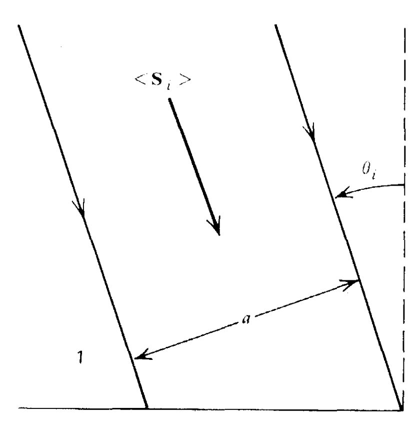


Figura 25-20 El haz incidente del ejercicio 25-9.

coeficiente de transmisión $T' = P_t/P_i$, ¿cómo se compara con la definición de T dada en el texto?

25-10 Demostrar que $E_{0r}/E_{0i} \simeq -1[1 - 2\pi(\mu_2/\mu_1)(\delta_2/\lambda_1)(1 - i)]$ para un buen conductor, donde δ_2 es la profundidad de penetración en el conductor y λ_1 es la longitud de onda en el medio incidente. Para el resto del ejercicio, suponer que se trata de un conductor perfecto ($\sigma_2 \to \infty$). Suponer también que E_{0i} es real, por simplicidad, y encontrar $\mathbf{E}_{1\,\mathrm{real}}$, es decir, el campo eléctrico físico total en el medio incidente; demostrar que resulta ser una onda estacionaria, uno de cuyos nodos se encuentra en la superficie conductora. De manera similar, demostrar que $\mathbf{H}_{1\,\mathrm{real}}$ es una onda estacionaria, uno de cuyos antinodos se encuentra en la superficie. ¿Se atrasa o adelanta en el tiempo $\mathbf{H}_{1\,\mathrm{real}}$ con respecto a $\mathbf{E}_{1\,\mathrm{real}}$, y cuánto? Encontrar $\langle u_e \rangle$ y $\langle u_m \rangle$ y demostrar que la densidad total de energía, $\langle u \rangle$, es independiente de la posición. Encontrar $\mathbf{S}$ y demostrar que también es una onda estacionaria con uno de sus nodos en la superficie. Encontrar $\langle \mathbf{S}_1 \rangle$ e interpretar el resultado obtenido. Demostrar que debe existir una densidad superficial de corriente $\mathbf{K}_f$ y evaluarla.

25-11 Encontrar la aproximación de menor orden para la relación E_{0t}/E_{0i} en el caso de un buen conductor. Si existe una diferencia de fase entre $\mathbf{E}_t$ y $\mathbf{E}_i$, evaluarla y decir si $\mathbf{E}_t$ sigue a $\mathbf{E}_i$ o va adelante de él en el tiempo.

25-12 Demostrar que para un buen conductor el coeficiente de reflexión puede también expresarse en forma aproximada por $\mathbf{R} \simeq 1 - 4\pi(\mu_2/\mu_1)(\delta_2/\lambda_1)$, donde δ_2 es la profundidad de penetración en el conductor y λ_1 es la longitud de onda en el medio incidente.

25-13 Evaluar T para incidencia normal sobre un buen conductor usando la definición básica dada en (25-71), y demostrar que el resultado concuerda con (25-75) y con el resultado del ejercicio anterior.

25-14 Observar la figura 25-21. Una onda plana que viaja en un medio de impedancia Z_1 incide normalmente en $z = 0$ sobre un segundo medio de impedancia Z_2. El segundo medio tiene un espesor L y detrás de él existe otro medio de impedancia Z_3 que ocupa el resto del espacio. (a) Demostrar que la relación de las amplitudes de los campos eléctricos reflejado e incidente en el medio incidente está dada por

$$\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{Z_2(Z_3 - Z_1)\cos k_2 L - i(Z_2^2 - Z_1 Z_3)\operatorname{sen} k_2 L}{Z_2(Z_3 + Z_1)\cos k_2 L - i(Z_2^2 + Z_1 Z_3)\operatorname{sen} k_2 L}$$

(Se necesitarán las cinco ondas *resultantes* que se indican; es decir la situación se encuentra en su estado estacionario final. Recordar que las condiciones de frontera deben satisfacerse en

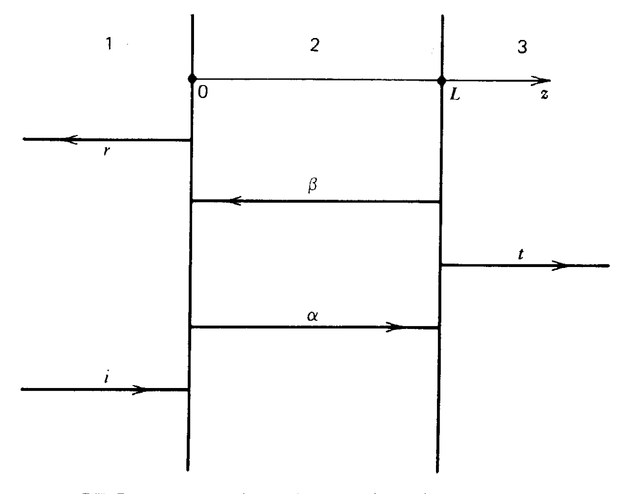


Figura 25-21 Las ondas y los medios del ejercicio 25-14.

ambas fronteras en forma simultánea.) (*b*) Demostrar que si $Z_1 \neq Z_3$, la onda reflejada será igual a cero cuando L sea igual a un múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda en el medio 2 y $Z_2 = (Z_1 Z_3)^{1/2}$. (*c*) Encontrar las condiciones correspondientes para obtener una onda reflejada nula cuando $Z_1 = Z_3 \neq Z_2$. (*d*) Luz cuya longitud de onda es de 5×10^{-7} metros incide normalmente desde el vacío sobre una gran placa de vidrio no magnético cuyo índice de refracción es de 1.5. Si el vidrio se recubre con una película de material no magnético para que la luz no se refleje, encontrar el índice de refracción y el espesor mínimo del recubrimiento.

25-15 Una curva que sea tangente a la dirección de $\hat{\mathbf{k}}$ en todos los puntos recibe el nombre de *rayo*; la figura 25-18 muestra una curva de ese tipo. (*a*) Si la distancia medida a lo largo del rayo es s, demostrar que de (25-90) se desprende que $d\,\theta_p/ds = -(\tan\theta_p/n_p)(dn_p/ds) = -(\text{sen}\,\theta_p/n_p)(dn_p/dz)$. (*b*) Demostrar que este resultado es consistente con la apariencia general del rayo tal como se muestra en la figura 25-18. (*c*) ¿Por qué, cuando θ_p es 90°, el rayo no sigue una trayectoria horizontal, sino que se dobla hacia abajo como se indica? (*d*) Encontrar la dependencia de n_p con respecto a z daría como resultado que la trayectoria en el plasma fuera un arco de círculo de radio a.

25-16 Suponer que la Tierra absorbe toda la energía solar que incide sobre ella y encontrar la relación entre la fuerza total debida a la presión de radiación y la fuerza de gravedad del sol. (La masa de la Tierra es de 5.98×10^{24} kilogramos, su radio es de 6.37×10^6 metros y la distancia promedio entre la Tierra y el sol es de 1.49×10^{11} metros.)

25-17 La presión de radiación en una frontera perfectamente reflectante para cualquier ángulo de incidencia θ_i es $p(\theta_i) = 2\cos^2\theta_i \langle u_i \rangle$ según (25-98). Suponer que *uno* de los lados de la superficie se irradia isotrópicamente por medio de ondas incidentes de la misma frecuencia y con valores iguales de $\langle u_i \rangle$. "Isotrópicamente" significa que *todos* los ángulos de incidencia θ_i se dan con iguales probabilidades, es decir, que la probabilidad de que $\hat{\mathbf{k}}_i$ esté en el elemento de ángulo sólido $d\,\Omega_i$ es proporcional a $d\,\Omega_i$. Encontrar la presión de radiación total sobre la superficie y expresarla en función de la densidad total de energía $\langle u \rangle_{tot}$ en la superficie; es decir, $\langle u \rangle_{tot}$ incluye las ondas tanto incidentes como reflejadas.

25-18 Al desarrollar el concepto de presión de radiación se utilizaron únicamente los conceptos muy generales de cantidad de movimiento y del significado de un cambio en la cantidad de movimiento. Resulta también posible un tratamiento desde un punto de vista microscópico si se investigan las fuerzas ejercidas por el campo electromagnético transmitido sobre las partículas cargadas presentes en el segundo medio. Es difícil realizar esto excepto para casos especiales, pero cuando al fin so logra se llega a la conclusión de que la presión de radiación surge de la *fuerza magnética* ejercida sobre las cargas que se mueven bajo la influencia del campo eléctrico. Un enunciado tan general como éste debe ser independiente del modelo particular utilizado. Revisar lo expuesto con respecto a la cantidad de movimiento electromagnético en la sección 21-5 y convencerse de que la conclusión enunciada arriba es esencialmente correcta.

Capítulo

26

Campos en regiones confinadas

En los dos capítulos anteriores se estudiaron soluciones dependientes del tiempo para las ecuaciones de Maxwell, en la forma de ondas planas de extensión infinita, por lo que necesariamente existen en regiones sin límites. En casos un poco más realistas, es de esperarse que existan fronteras (paredes) de algún tipo alrededor de una región en la que se desea estudiar los campos. Resulta bastante claro que para tales situaciones las soluciones no podrán, por lo general, ser ondas planas con valores específicos de los campos sobre un plano infinito, pues deberán satisfacer condiciones de frontera en los límites de la región, además de satisfacer las ecuaciones de Maxwell.

Tan pronto se empiezan a considerar regiones confinadas o limitadas, resulta evidente que existe una infinidad de posibilidades, tanto en lo que toca a la configuración de la región como en cuanto a los materiales de que están constituidas las fronteras de la misma. Por lo tanto, resulta lógico restringir este estudio a unos cuantos casos típicos. Se hace la suposición de que todas las superficies limitantes son superfices de conductores perfectos, con el fin de simplificar considerablemente las condiciones de frontera. (Esta suposición es análoga a la que se utiliza en mecánica para estudiar cuerdas y membranas vibrantes, donde se supone que las regiones limitantes son perfectamente rígidas.) Los primeros problemas que se estudian son los relativos a la posible transferencia de energía electromagnética a lo largo de una *guía de ondas*, es decir, un tubo de extremos abiertos. (De la experiencia diaria ya se sabe que esto es posible por el simple hecho de que se puede ver a través de tubos largos y rectos.) También se considera una *cavidad resonante,* es decir, una caja de una configuración dada cuyas paredes son perfectamente conductoras.

26-1 Condiciones de frontera en la superficie de un conductor perfecto

Con el término *conductor perfecto* se designa aquí al que posee $\sigma \to \infty$, o más específicamente, cualquiera que cumpla la relación $Q = \epsilon\omega / \sigma \to 0$. En el párrafo que siguió a (24-78) ya se vio que $Q \ll 1$ para los metales comunes aún a muy altas frecuencias, de modo que $Q = 0$ sería una muy buena primera aproximación para las fronteras metálicas. Puesto que aquí sólo se considerarán campos que varían con el tiempo en forma armónica, es decir, que son proporcionales a $e^{i\omega t}$, de la forma de la superposición general dada en (24-18) se desprende que es posible estudiar los campos en el conductor si se estudia el comportamiento de sus ondas planas componentes. En la sección 26-6 se cubrió el caso en que el

campo incide normalmente sobre el conductor. Al final de esa sección se puntualizó que en el límite de conductividad infinita la onda en el conductor viaja en dirección normal a la superficie, sin importar el ángulo de incidencia. Si se combinan estos resultados con (24-61), (24-54) y (24-84) se puede ver que una de las componentes de la superposición del campo eléctrico en el conductor tendrá la forma general

$$\mathbf{E}_\tau = \mathbf{E}_{0\tau} e^{-\zeta/\delta} e^{i(\alpha\zeta - \omega t + \vartheta)} \tag{26-1}$$

donde ζ es la distancia recorrida en el conductor y δ es la profundidad pelicular o profundidad de penetración. El índice τ indica que $\mathbf{E}_\tau$ es paralelo a la superficie del conductor, puesto que es transversal a la dirección de propagación $\hat{\mathbf{n}}$ en la figura 25-3. Así, en la superficie, $\mathbf{E}_\tau$ es una componente tangencial. En (24-78) se encontró que $\delta = (2/\mu\sigma\omega)^{1/2}$ para un buen conductor, de modo que $\delta \to 0$ a medida que $\sigma \to \infty$. Por lo tanto, de (26-1) se desprende que $\mathbf{E}_\tau \to 0$ a medida que $\sigma \to \infty$ para cualquier valor de $\zeta \neq 0$, es decir que el campo eléctrico es igual a cero en cualquier punto en un conductor perfecto. Dado que las componentes tangenciales de **E** son siempre continuas, según (21-26), se ve que $\mathbf{E}_{tang} = 0$ justamente fuera de la superficie. En otras palabras, **E** no tiene componentes tangenciales en la superficie de un conductor perfecto, por lo que **E** debe ser normal a dicha superficie.

El valor de **B** dentro del conductor está dado por (24-92) como $\mathbf{B} = (k/\omega)\, \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_\tau$, de modo que también **B** será transversal y $\sim e^{-\zeta/\delta}$, puesto que aquí $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}$. En consecuencia, la componente transversal de **B** en el interior también se anulará a medida que $\sigma \to \infty$. Como **B** no tiene una componente normal, la continuidad de las componentes normales según está dada en (32-37) indica que $\mathbf{B}_{norm} = 0$ justo fuera del conductor. Así, en la superficie y en el exterior de un conductor perfecto **B** no posee componentes normales, es decir, que debe ser tangencial a la superficie. De manera similar, todas las componentes de **D** y de **H** en el interior del conductor deberán ser $\sim e^{-\zeta/\delta}$ y desaparecerán a medida que $\sigma \to \infty$.

Dado que estas conclusiones son válidas para cada una de las componentes de las superposición de (24-18), se puede ver que *todos* los vectores de campo serán iguales a cero en el interior del conductor perfecto. Esto permite simplificar las condiciones de frontera dadas en (21-25) a (21-28). Si se supone que el conductor es el medio 1 y que la región adyacente a éste es el medio 2, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{H}_1$ son todos iguales a cero y, si se omite el índice 2, las condiciones de frontera se pueden expresar como

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D} = \sigma_f \qquad \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0 \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \mathbf{K}_f \tag{26-2}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario que apunta *hacia afuera* de la superficie del conductor (dado que la convención adoptada requiere que la normal apunte del medio 1 al 2). Para repetirlo una vez más: en la superficie de un conductor perfecto **E** es normal a dicha superficie y **B** es tangencial a ella. De otra manera, **E** no tiene componente tangencial y **B** no tiene componente normal. Es posible que exista una densidad superficial de corriente K_f finita aún cuando $E_{tang} = 0$, porque la conductividad es infinita. De hecho, son precisamente estas corrientes superficiales las que impiden que $\mathbf{H}_{tang}$ sea igual a cero en la superficie, aun cuando sí sea nula en el interior. De manera similar, la densidad superficial de carga σ_f surge porque $\mathbf{D}_{norm}$ puede ser diferente de cero en la superficie aunque en el interior del conductor sí sea igual a cero.

26-2 Características de propagación de las guías de ondas

La figura 26-1 muestra una guía de ondas que se extiende indefinidamente en la dirección z, siendo de sección arbitraria, constante y sobre el plano xy. Se hace la suposición

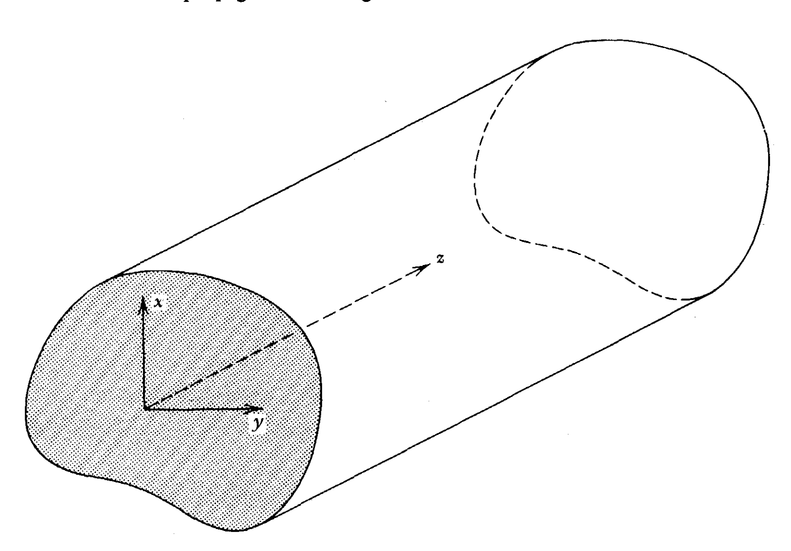


Figura 26-1 Una guía de ondas de sección arbitraria y constante.

de que las paredes limitantes son conductores perfectos y que el interior se encuentra lleno de un medio i.h.l. no conductor, descrito por y ϵ. Si Ψ es cualquier componente de **E** o de **B**, de (24-7) y (24-12) se sabe que satisface la ecuación

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{26-3}$$

donde $v^2 = 1/\delta\epsilon$ y v sería la velocidad de una onda plana en el medio. Se trata de encontrar una solución de (26-3) en la forma de una onda que viaje en la dirección z, es decir, a lo largo del eje de la guía; se hace la suposición de que Ψ posee la forma

$$\psi(x,y,z,t) = \psi_0(x,y)e^{i(k_g z - \omega t)} \tag{26-4}$$

Nótese que ésta *no* es una onda plana porque la amplitud Ψ_0 no es constante, sino que varía en toda la sección. La cantidad $\mathbf{k}_g$ es la *constante de propagación de la guía* y puede escribirse como

$$k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} \tag{26-5}$$

donde λ g es la *longitud de onda de la guía*, es decir, el período especial a lo largo de la guía.

Si se sustituye (26-4) en (26-3) y se cancela el exponente común, se encuentra que la amplitud satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2} + k_c^2\psi_0 = 0 \tag{26-6}$$

donde

$$k_c^2 = k_0^2 - k_g^2 \tag{26-7}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \tag{26-8}$$

De (24-17) y (24-27) se observa que si Ψ_0 fuera una onda plana de frecuencua circular ω, entonces k_0 y λ^0 serían la constante de propagación y la longitud de onda, respectivamente; es por ello que muy a menudo a λ_0 se le suele llamar la longitud de onda del espacio libre cuando existe un vacío dentro de la guía. A veces resulta útil escribir k_c en la forma

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \tag{26-9}$$

de modo que (26-7) se exprese también como

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_g^2} \tag{26-10}$$

No es suficiente resolver (26-6) porque la o las correspondientes componentes deben también satisfacer (26-2). Por lo general, no resulta posible satisfacer simultáneamente estas condiciones de frontera para cualquier valor de k_c, sino para valores específicos de k_c y sus correspondientes valores definidos de λ_c. Así, antes de considerar un problema específico se puede prever que se encontrarán solamente ciertos valores de k_c permitidos, o de otra manera, los *eigenvalores* del sistema. ¿Cuál es el significado físico de estos valores permitidos que seguramente se han de encontrar?

Supóngase que se considera un *modo* definido de la guía, es decir, un valor particular de k_c. Si se asume también una frecuencia dada ω, k_g estará entonces dada por (27-7) como $k_g^2 = k_0^2 - k_c^2$. Existen dos posibilidades de interés. Si $k_0 > k_c$, de modo que $\lambda_0 > \lambda_c$ según (26-10), entonces $kg^2 > 0$ y k_g será real, existiendo propagación a lo largo de la guía. Por otro lado, si $k_0 > k_c$, y por ello $\lambda_0 > \lambda_c$, entonces $k_g^2 > 0$ k_g será imaginario puro, pudiéndose expresar como $k_g = i\,|k_g|$. Al sustituir esto en (26-4) se encuentra que Ψ tendrá la forma $\Psi = \Psi_0\, e^{-|k_g|z}\, e^{-i\omega t}$, que no es una onda sino una "perturbación" que oscila armónicamente y cuya amplitud decrece monótonamente a medida que viaja a lo largo de la guía en el sentido creciente de z. Por lo tanto, se ha encontrado que habrá propagación de ondas en una guía de ondas *solamente* si $k_0 > k_c$, o sea, $\lambda_0 < \lambda_c$. Por esta razón, a λ_c se le da el nombre de *longitud de onda de corte* para este modo particular.

Este resultado también se puede enunciar en función de una *frecuencia de corte*, ω_c, definida por

$$k_c = \frac{\omega_c}{v} \tag{26-11}$$

de modo que (26-7) puede expresarse también como

$$k_g^2 = \frac{1}{v^2}\left(\omega^2 - \omega_c^2\right) \tag{26-12}$$

Así, la propagación de ondas es posible sólo cuando $\omega > \omega_c$, es decir, si la frecuencia aplicada es más alta que la frecuencia de corte. Por lo tanto, una guía de ondas también actúa como un filtro de paso alto, tal como ocurrió con el plasma tras (24-139). De hecho, al comparar (26-12) con (24-137) se puede observar que la relación de dispersión para una guía de ondas es de forma idéntica a la de un plasma, correspondiendo la frecuencia de corte para un modo específico a la frecuencia del plasma ωp.

26-3 Campos en una guía de ondas

Para seguir adelante se deben utilizar las ecuaciones de Maxwell. Se supone que no existen cargas o corrientes libres en el interior de la guía, de modo que (21-48) a (21-51) se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{E}&=0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{H}=0 \\ \nabla\times\mathbf{E}&=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{H}=\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{26-13}$$

Dado que se ha supuesto que cada una de las componentes de **E** y de **H** tienen la forma general de (26-4), se tendrá que

$$\mathbf{E}=\boldsymbol{\mathcal{E}}(x,y)e^{i(k_g z-\omega t)} \tag{26-14}$$

$$\mathbf{H}=\boldsymbol{\mathcal{H}}(x,y)e^{i(k_g z-\omega t)} \tag{26-15}$$

de modo que, si E_α es una componente cualquiera de **E**, se tendrá $\partial E_\alpha/\partial z = ik_g E_\alpha$ y $\partial E_\alpha/\partial t = -i\omega E_\alpha$, con expresiones similares para las componentes de **H**. Es importante recordar que aunque las amplitudes $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ dependen únicamente de x y de y, *no* se ha supuesto que los campos sean transversales, es decir, que no tengan componentes z. En otras palabras, $\mathcal{E}$ tiene la forma general

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(x,y)=\mathcal{E}_x(x,y)\hat{\mathbf{x}}+\mathcal{E}_y(x,y)\hat{\mathbf{y}}+\mathcal{E}_z(x,y)\hat{\mathbf{z}} \tag{26-16}$$

donde las distintas componentes $\mathcal{E}\ x$, $\mathcal{E}\ y$ y $\mathcal{E}\ z$ pueden depender de x y de y de diferentes maneras.

Al sustituir (26-14) y (26-15) en (26-13) y tras cancelar el factor exponencial común se obtienen ocho ecuaciones escalares:

$$\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial y}+ik_g\mathcal{E}_z=0 \tag{26-17}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{H}_y}{\partial y}+ik_g\mathcal{H}_z=0 \tag{26-18}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial y}-ik_g\mathcal{E}_y=i\omega\mu\mathcal{H}_x \tag{26-19}$$

$$ik_g\mathcal{E}_x-\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial x}=i\omega\mu\mathcal{H}_y \tag{26-20}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}=i\omega\mu\mathcal{H}_z \tag{26-21}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial y}-ik_g\mathcal{H}_y=-i\omega\epsilon\mathcal{E}_x \tag{26-22}$$

$$ik_g\mathcal{H}_x-\frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial x}=-i\omega\epsilon\mathcal{E}_y \tag{26-23}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = -i\omega\epsilon \mathcal{E}_z \tag{26-24}$$

Despejando $\mathcal{E}_x$ al eliminar $\mathcal{H}_y$ entre (26-20) y (26-22), y utilizando después (26-7) y (26-8), se encuentra que

$$\mathcal{E}_x = \frac{i}{k_c^2}\left(k_g \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y}\right) \tag{26-25}$$

De manera similar, de (26-19) y (26-23) se encuentra que

$$\mathcal{E}_y = \frac{i}{k_c^2}\left(k_g \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \omega\mu \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}\right) \tag{26-26}$$

y que

$$\mathcal{H}_x = \frac{i}{k_c^2}\left(-\omega\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} + k_g \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}\right) \tag{26-27}$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{i}{k_c^2}\left(\omega\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} + k_g \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y}\right) \tag{26-28}$$

que se siguen de los pares (26-19) - (26-23) y (26-20) - (26-22), respectivamente. Estos resultados demuestran que las cuatro componentes transversales de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ son independientes entre sí y que se pueden calcular a partir de las derivadas de las dos componentes longitudinales; esto simplifica el trabajo.

Sin embargo, al obtener (26-25) a (26-28) solamente se usaron cuatro de las ocho ecuaciones de Maxwell. Si se sustituyen (26-25) y (26-26) en (26-17) se encuentra que para satisfacerla es necesario que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \mathcal{E}_z = 0 \tag{26-29}$$

lo que, según (26-6), debe ser así. Se puede obtener el mismo resultado a partir de (26-24). De manera similar se podrán satisfacer si

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial y^2} + k_c^2 \mathcal{H}_z = 0 \tag{26-30}$$

lo que de nuevo está de acuerdo con (26-6).

Puesto que cada una de las expresiones (26-25) a (26-28) tiene la forma de una suma, pueden interpretarse las componentes transversales generales como una superposición de dos ondas independientes, una que corresponde a $\mathcal{E}_z \neq 0$ y $\mathcal{H}_z = 0$, y la otra $\mathcal{E}_z = 0$ y $\mathcal{H}_z \neq 0$. De acuerdo con esto, resulta conveniente separar las soluciones en estos dos grupos y considerarlas por separado. Si $\mathcal{E}_z = 0$, entonces descansa completamente sobre el plano xy y es perpendicular a la dirección de propagación. Una onda de este tipo recibe el nombre de modo *eléctrico transversal o ET*. De manera similar, el caso $\mathcal{H}_z = 0$

corresponde al modo *magnético transversal* o *MT*. (Si tanto $\mathcal{E}_z$ como $\mathcal{H}_z$ son iguales a cero, el modo correspondiente se llama *electromagnético transversal* o *ETM*; este caso requiere de un estudio por separado que se difiere hasta otra sección.)

Se pueden resumir todos estos resultados de una manera muy útil en la forma de un procedimiento paso a paso para resolver los problemas de guías de ondas. Para un ET: (1) sea $\mathcal{E}_z = 0$ y encuéntrese $\mathcal{H}_z$ como la solución general de (26-30) o su equivalente si se expresa en otro sistema coordenado apropiado, como el de coordenadas cilíndricas, por ejemplo; (2) sustitúyase esta expresión de $\mathcal{H}_z$ en (26-25) a (26-28) para encontrar las componentes transversales de las amplitudes; (3) sustitúyanse estos resultados en (26-14) y (26-15) para encontrar los campos **E** y **H**; (4) asegúrese que las expresiones de **E** y **H** (o lo que es equivalente, $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$) satisfacen las dos condiciones de frontera (26-2) que dan $E_{tang} = 0$ y **H** normal = 0 (nótese que la componente tangencial E_z ya es igual a cero en este caso); (5) tómense las partes reales de las expresiones de **E** y **H** resultantes si se desean obtener los campos físicos; y (6) si se desea, se pueden encontrar la densidad superficial de carga y la densidad superficial de corriente a partir de las condiciones de frontera restantes, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D} = \sigma_f$ y $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \mathbf{K}_f$, tomando en cuenta, desde luego, que se deben evaluar *en* la superficie limitante. [Como se verá más adelante, a veces resulta más conveniente realizar el paso (4) antes que el (2).]

Para un modo MT se sigue el mismo procedimiento básico, encontrando $\mathcal{E}_z$ a partir de (26-29) y tomando $\mathcal{H}_z = 0$. En este caso, por lo general $\mathcal{E}_z$ será diferente de cero en guía, pero como es una componente tangencial en la superficie debe anularse ahí.

Cuando se siguen estos procedimientos los campos obtenidos satisfacen automáticamente las ecuaciones de Maxwell, puesto que éstas fueron usadas para obtener los resultados básicos. Lo que es más, los eigenvalores k_c que caracterizan los diversos modos se obtendrán también durante el procedimiento debido a las razones siguientes. Cuando se obtiene la solución general de (26-29) o (26-30) se incluyen algunas constantes de integración. Se encuentra después que la única manera de satisfacier las condiciones de frontera es dando ciertos valores a algunas de estas constantes, los que a su vez determinan los valores permitidos de k_c. (Como se verá en detalle más adelante, la manera de encontrar los k_c recuerda lo que ocurrió al resolver la ecuación de Laplace en la sección 11-4.)

En los ejercicios se demostrará que los resultados de esta sección pueden expresarse de una manera todavía más compacta y elegante, antes de que se requiera especificar la configuración de la sección de la guía. Sin embargo, para el propósito buscado aquí es conveniente proceder ya a la consideración de un ejemplo específico e importante.

26-4 Guías rectangulares

Estas guías tienen una sección rectangular de lados a y b que, como se muestra en la figura 26-2, se encuentra situada en el plano xy. De (26-29) y (26-30) se puede observar que para cualquiera de los dos modos se tiene que resolver una ecuación de la forma (26-6). Utilizando el método de separación de variables y expresando $\Psi_0(x,y) = X(x)Y(y)$, con

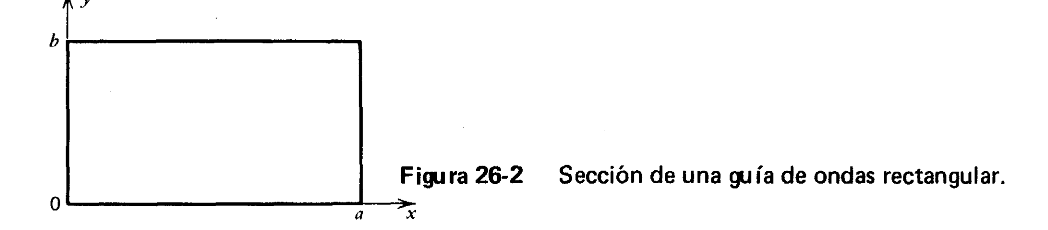


Figura 26-2 Sección de una guía de ondas rectangular.

los mismos argumentos usados en la sección 11-4 para obtener dos ecuaciones separadas, se encuentra

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - k_c^2 = \text{const.} = -k_1^2 \tag{26-31}$$

de modo que $(d^2X/dx^2) + K_1^2X = 0$ y $(d^2Y/dy^2) + K_2^2Y = 0$, donde

$$k_1^2 + k_2^2 = k_c^2 \tag{26-32}$$

y k_2^2 es también una constante. Resolviendo en términos de las funciones trigonométricas, se tiene que

$$\psi_0(x,y) = (C_1 \operatorname{sen} k_1x + C_2 \cos k_1x)(C_3 \operatorname{sen} k_2y + C_4 \cos k_2y) \tag{26-33}$$

donde las C son constantes de integración. Esta expresión de Ψ_0 contiene un total de seis constantes y, dependiendo del modo particular de que se trate, se identifica (26-33) con $\mathcal{H}_z$ o con $\mathcal{E}_z$.

Ejemplo

Modos Et. Se toma aquí $\mathcal{E}_z = 0$ y se escribe

$$\mathcal{H}_z = (C_1 \operatorname{sen} k_1x + C_2 \cos k_1x)(C_3 \operatorname{sen} k_2y + C_4 \cos k_2y) \tag{26-34}$$

Puesto que $\mathcal{H}$ es una componente tangencial, no necesita anularse en la frontera, de modo que (26-34) no es muy útil en sí. Por otro lado, $\mathcal{E}_x$ y $\mathcal{E}_y$ son componentes tangenciales en los lugares adecuados de la frontera, debiendo anularse ahí por lo que sí pueden resultar de interés. (Desde luego, $\mathcal{E}_x$ y $\mathcal{E}_y$ serán componentes normales en algunas partes de la frontera, anulándose ahí de modo que se podrían elegir en vez de los otros componentes. Sin embargo, como se verá después, se llega a los mismos resultados.)
Siendo $\mathcal{E}_z = 0$, se encuentra que cuando se sustituye (26-34) en (26-25) y (26-36) se obtienen

$$\mathcal{E}_x = \frac{i\omega\mu k_2}{k_c^2}(C_1 \operatorname{sen} k_1x + C_2 \cos k_1x)(C_3 \cos k_2y - C_4 \operatorname{sen} k_2y) \tag{26-35}$$

$$\mathcal{E}_y = -\frac{i\omega\mu k_1}{k_c^2}(C_1 \cos k_1x - C_2 \operatorname{sen} k_1x)(C_3 \operatorname{sen} k_2y + C_4 \cos k_2y) \tag{26-36}$$

De la figura 26-2 se ve que en $y =$ y $y = b$ $\mathcal{E}_x$ será componente tangencial, por lo que debe ser igual a cero ahí. De manera similar, $\mathcal{E}_y$ debe ser cero en $x = 0$ y $x = a$. Tomando primero los valores cero de x y y se obtienen

$$\mathcal{E}_x(x,0) = 0 = \frac{i\omega\mu k_2 C_3}{k_c^2}(C_1 \operatorname{sen} k_1x + C_2 \cos k_1x) \tag{26-37}$$

$$\mathcal{E}_y(0,y) = 0 = -\frac{i\omega\mu k_1 C_1}{k_c^2}(C_3 \operatorname{sen} k_2y + C_4 \cos k_2y) \tag{26-38}$$

de modo que $C_3 = 0$ y $C_1 = 0$. Por tanto, hasta aquí, (26-34), (26-35) y (26-36) se han simplificado convirtiéndose en

$$\mathcal{H}_z = C_2 C_4 \cos k_1 x \cos k_2 y \tag{26-39}$$

$$\mathcal{E}_x = -\frac{i\omega\mu k_2}{k_c^2} C_2 C_4 \cos k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \tag{26-40}$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{i\omega\mu k_1}{k_c^2} C_2 C_4 \operatorname{sen} k_1 x \cos k_2 y \tag{26-41}$$

Todavía falta satisfacer las ecuaciones de frontera en las dos caras restantes. De (26-40) se observa que el requisito $\mathcal{E}_x\ (x,b) = 0$ conduce a sen $k_2 b = 0$, de modo que $k_2 b = n\pi$ donde n es un entero. De manera similar, $\mathcal{E}_y\ (a,y) = 0$, de la condición $k_1 a = m\pi$ siendo m un entero. Se ha encontrado así que

$$k_1 = \frac{m\pi}{a} \qquad k_2 = \frac{n\pi}{b} \tag{26-42}$$

de manera que de (26-32) se pueden encontrar los valores permitdos de k_c^2 que son

$$k_c^2 = k_{c\ mn}^2 = \pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \tag{26-43}$$

de manera que de (26-32) se pueden encontrar las longitudes de onda y las frecuencias de corte usando (26-43) en (26-9) y (26-11). Las constantes de propagación de la guía y sus longitudes de onda correspondientes se obtienen de (26-7) y (26-5):

$$k_g^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = k_0^2 - \pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \tag{26-44}$$

La única cantidad que no se ha obtenido es la amplitud arbitraria $C_2 C_4$ de $\mathcal{E}_z$. Si se toma $C_2 C_4 = \mathbf{H}_0$, se puede utilizar (26-42) para expresar (26-39) a (26-41) de una manera más explícita. Además, se puede usar (26-39) en (26-27) y (26-28) para encontrar el resto de las amplitudes. Cuando se hace esto se encuentra que las amplitudes de un modo ET general en una guía rectangular son

$$\mathcal{E}_x = -\frac{i\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{26-45}$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{i\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{26-46}$$

$$\mathcal{E}_z = 0 \tag{26-47}$$

$$\mathcal{H}_x = -\frac{ik_g}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{26-48}$$

$$\mathcal{H}_y = -\frac{ik_g}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{26-49}$$

$$\mathcal{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{26-50}$$

donde k_c y k_g se encuentran por medio de (26-43) y (26-44).

Para verificar los resultados obtienidos, de la figura 26-2 se puede ver que $\mathcal{H}_x$ será una componente normal en $x = 0$ y $x = a$, debiendo anularse ahí; de (26-48) se deduce que así es en efecto. De manera similar, (26-49) indica que $\mathcal{H}_y = 0$ en $y = 0$ y $y = b$, como debe ser. [En realidad esto no debe sorprender porque el resultado de uno de los ejercicios es que las componentes transversales de un modo ET se relacionan entre sí por medio de $\mathcal{H}_{trans} = (k_g/\omega\mu)\hat{z} \times \mathcal{E}_{trans}$ y, por lo tanto, son perpendiculares. Así, si $\mathcal{E}_{trans}$ se toma normal a la superficie, $\mathcal{H}_{trans}$ será automáticamente tangencial, como se vio arriba. Se obtiene un resultado similar para modos MT.]

Recuérdese que todavía se tiene que multiplicar cada uno de estos factores de amplitud por el término de propagación y tomar la parte real para obtener los campos físicos. Por ejemplo, cuando (26-45) y (26-14) se combinan entre sí se obtiene

$$E_x = -\frac{i\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{i(k_g z - \omega t)} \tag{26-51}$$

Dado que $-i = e^{-i(\frac{1}{2})\pi}$, el factor exponencial puede expresarse como $\exp i[k_g z - (\omega t + \frac{1}{2}\pi)]$ lo que, cuando se compara con (26-50), demuestra que E_x va adelante de H_z en el tiempo por una diferencia de 90°. De manera similar, (26-48) y (26-49) demuestran que H_x y H_y van adelante de H_z por 90°, mientras que E_y sigue a H_z por la misma diferencia, según (26-46).

Hasta ahora no se ha especificado n y m, excepto en cuanto a que son enteros. Antes que nada , de (26-45) a (26-50) se observa que si m y/o n fueran negativos ninguna amplitud de campo cambiaría. Por lo tanto, se puede imponer la restricción de que m y n sean positivos o cero. Si *tanto m como n* son iguales a cero, (26-50) da $\mathcal{H}_z = \mathbf{H}_0 =$ const., mientras que las otras componentes son aparentemente cero en tanto que (26-44) da $k_g = k_0 = \omega/v$. Así, el campo sería de la forma $H_z = H_0 e^{i(k_0 z - \omega t)}$, que corresponde a un campo *longitudinal* con una sola componente y viajando en la dirección del eje de la guía con una velocidad v característica de una onda plana. Sin embargo, de acuerdo con (26-43), $k_c^2 = 0$ y, dado que se dividió entre k_c^2 para obtener (26-25) a (26-28), no es posible usar estos resultados aquí, debiéndose regresar a las ecuaciones de Maxwell (26-13). En este caso se obtendría $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 = \partial H_z/\partial_z = ik_0 H_z$, de manera que $k_0 = 0$ y, por lo tanto, $\omega = 0$; esto hace que $H_z =$ const., lo que guarda consistencia con el resto de (26-13) con $\mathbf{E} = 0$. Así, para $m = n = 0$ la solución resulta ser simplemente un campo magnético constante a lo largo del eje de la guía; si bien esto es ciertamente posible, no es de interés por el momento.

En resumen, m y n deben restringirse a $m \geqslant 0$ y $n \geqslant 0$, pero sin que $m = n = 0$. Por lo tanto, un modo de propagación ET dado puede caracterizarse por el par de enteros m y n asignados independientemente. Es costumbre describirlo como el modo ET_{mn}.

Puesto que el caso general ET es bastantes complicado, se considera en detalle únicamente un caso particular simple.

Ejemplo

Modo ET_{10}. Supóngase que $a \triangle b$ y encuéntrese el modo con el k_c más pequeño y, por lo tanto, la máxima longitud de onda de corte λ_c. De (26-43) se aprecia que esto corresponde a $m = 1$ y $n = 0$, es decir, al modo ET_{10}. En este caso, $k_{c10} = x\pi/a$, de modo que $\lambda_c = 2a$ y $\omega_c = \pi v/a$, según (26-9) y 26-11). Por lo tanto, la longitud de onda de corte es dos veces la dimensión más grande la sección; en otras palabras, no es posible "comprimir" una onda "más grande" en la guía. La constante de propagación de la guía se encuentra a partir de (26-44) y (26-8), resultando

$$k_g = \left[\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right]^{1/2} \tag{26-52}$$

Las amplitudes del campo que se obtienen de (26-45) a (26-50) son

$$\mathcal{E}_y = i\omega\mu\left(\frac{a}{\pi}\right)H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \tag{26-53}$$

$$\mathcal{H}_x = -ik_g\left(\frac{a}{\pi}\right)H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \tag{26-54}$$

$$\mathcal{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \tag{26-55}$$

mientras que $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0$ y $\mathcal{H}_y = 0$. Al sustituirlas en (26-14) y (26-15), suponiendo por simplicidad que H_0 es real y tomando después las partes reales de las expresiones que resultan, se encuentra que las únicas componentes de campo no son iguales a cero son

$$E_y = -H_0\omega\mu\left(\frac{a}{\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}(k_g z - \omega t) \tag{26-56}$$

$$H_x = H_0 k_g\left(\frac{a}{\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\operatorname{sen}(k_g z - \omega t) \tag{26-57}$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(k_g z - \omega t) \tag{26-58}$$

Se puede observar que los valores de E_y son independientes de y; por tanto, los campos eléctricos son líneas rectas de magnitud constante para un valor dado de x, pero la magnitud sí varía con x y es máxima en el centro, donde $x = \frac{1}{2} a$. Las líneas de H_x son rectas con su valor máximo en el centro también. Por otro lado, el valor de H_z es igual a cero en el centro y tiene signos opuestos a ambos lados del mismo. La figura 26-3 muestra E_y y H_x sobre el plano *xy en un instante dado,* suponiéndose también que H_0 y sen $(k_g z - \omega t)$ son positivos ambos. Las líneas llenas indican E_y, mientras que H_x está representado por líneas punteadas; las flechas en la parte inferior de la figura indican la variación de H_x con la posición. Si se toma una posición z donde también cos $(k_g z - \omega t)$ sea positivo, como se aprecia en la figura, las líneas de H_z según (26-58), se dirigirán hacia afuera de la página en la mitad izquierda de la figura y hacia la página en su mitad derecha, puesto que el eje z se dirige hacia afuera de la página. A una distancia igual a media longitud $k_g z - \omega t = (2\pi/\lambda_g)(\lambda_g/2) = \pi$, de modo que las direcciones de todos los campos que se indican en la figura 26-3 se habrán invertido, como se aprecia en (26-56) a (26-58).

Puesto que tanto E_y como H_x son proporcionales a sen$(k_g z - \omega t)$, mientras que H_z varía según cos$(k_g z - \omega t)$, E_y y H_x serán iguales a cero cuando $|H_z|$ sea máxima. De ma-

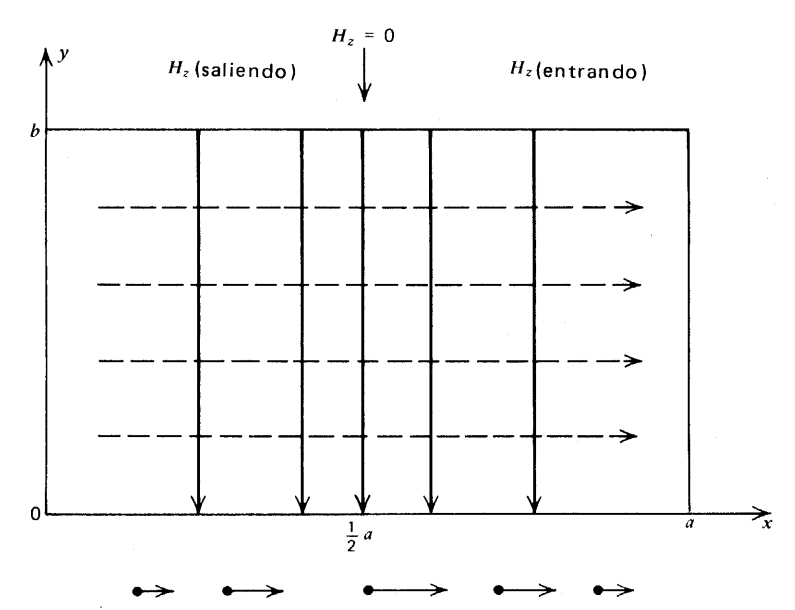


Figura 26-3 Campos de un modo ET_{10} en la sección, en un instante dado.

nera similar, $|E_y|$ y $|H_x|$ serán máximas cuando $H_z = 0$. La figura 26-4 muestra también las relaciones entre los campos en un momento dado, presentando un corte de la guía paralelo al plano xz; el eje y se dirige hacia afuera de la página. En este caso las líneas punteadas representan el vector **H** resultante en este plano; la situación de la figura 26-3 correspondería aquí a un plano perpendicular al eje z, en la posición indicada por las flechas A, por ejemplo.

Dado que estos campos son en realidad ondas, su comportamiento en el tiempo puede visualizarse si se imagina un observador en una posición dada y las imágenes que ve se mueven en la dirección positiva de z. Se deberán mover con la velocidad de la guía v_g dada en (26-52) como

$$v_g = \frac{\omega}{k_g} = \frac{v}{\left[1-(\pi v/a\omega)^2\right]^{1/2}} \tag{26-59}$$

de la que se sigue que $v_g > v$, que es la velocidad de una onda plana en el material del interior de la guía; para el vacío se tendría que $v_g > c$.

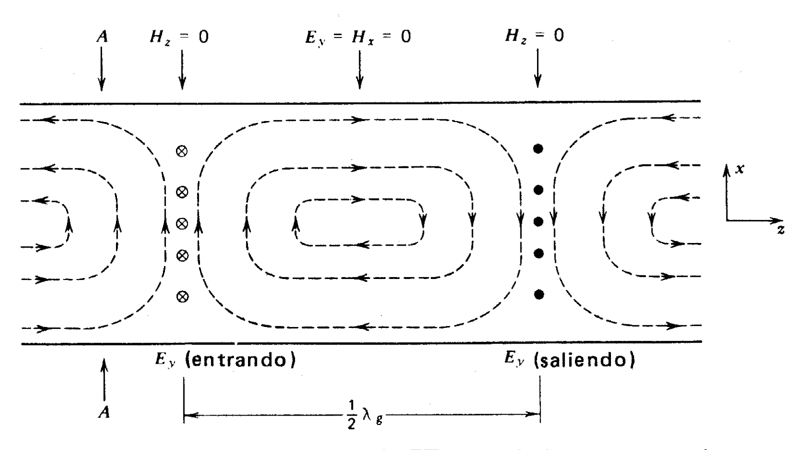


Figura 26-4 Campos de un modo ET_{10} en el plano xz, en un instante dado.

Las ecuaciones 26-57 y 26-58 demuestran que, por lo general, H_x y H_z tendrán amplitudes diferentes para una posición dada en la guía. Si se recuerda lo visto en la sección 24-7, se ve que esto significa que el campo magnético total **H** está polarizado elípticamente cuando se le considera una función del tiempo.

Puesto que existen componentes normales de **D** y componentes tangenciales de **H** que no son iguales a cero, deben existir ciertas cargas y corrientes superficiales en las paredes de la guía, de acuerdo con (26-2), que pueden calcularse a partir de estas relaciones. Por ejemplo, sobre la cara $y=0$, la normal exterior del conductor es $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$, encontrándose que

$$\sigma_f = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{D} = \epsilon E_y = -H_0\omega\mu\epsilon\left(\frac{a}{\pi}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)\text{sen}(k_g z - \omega t) \tag{26-60}$$

mientras que en la cara $y = b$, donde $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{y}}$, σ_f tiene el mismo valor, pero con signo opuesto. No existen cargas superficiales sobre las caras perpendiculares al eje x porque $E_x = 0$. De (26-60) se desprende que σ_f oscila con el tiempo y que, en particular, su signo cambia. Desde el punto de vista físico, esto ocurre debido al flujo de cargas libres sobre las superficies, es decir, la existencia de corrientes superficiales. Estas pueden calcularse de manera parecida a partir de

$$\mathbf{K_f} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \text{ y (26-57) y (26-58).}$$

Ejemplo

Modos MT. En este caso se toma $\mathcal{H}_z = 0$ y $\mathcal{E}_z$ igual a la expresión de Ψ, dada en (26-33); así, (26-32) vuelve a ser aplicable. Este caso es una realidad más simple porque $\mathcal{E}_z$ puede ser una componente tangencial, desapareciendo en $x = 0$ y a en $y = 0$ y b. Siguiendo el mismo procedimiento que antes, se observa que ahora se debe tener que $C_2 = C_4 = 0$, mientras que k_1, k_2 y k_c están otra vez dadas por (26-42) y (26-43). Así, los modos ET y MT de una guía de ondas rectangular tienen el mismo conjunto de longitudes de onda de corte; las configuraciones de los campos deben ser diferentes, sin embargo. Tomando C_1 $C_3 = E_0$, (26-33) es el punto de partida para cálculo del modo MT, siendo éste

$$\mathcal{E}_z = E_0\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{26-61}$$

que puede ahora utilizarse para calcular el resto de las amplitudes de campo por medio de (26-25) a (26-28). Nótese que $m = n = 0$ hace que $\mathcal{E}_z$ y todos los demás componentes de los campos sean iguales a cero; por lo tanto, no existe un modo MT_{00}. Además, si $m = 0$ ó $n = 0$, $\mathcal{E}_z = 0$ y todos los campos son también iguales a cero. Así, resulta que no es posible tener modos MT_{m0} ó MT_{0n}, a diferencia del caso ET.

Desde luego, es posible que existan guías de onda cuyas secciones no sean rectangulares; por ejemplo, podría haber circulares. Tales casos pueden ser estudiados de la misma manera sistemática que se ha utilizado aquí para el caso rectangular. Los detalles matemáticos son diferentes (y por lo general más difíciles), pero los *principios* involucrados son los mismos exactamente. Sin embargo, aquí no se desarrolla ningún otro tipo de guía aunque sí se considerará un tipo distinto de modo.

26-5 Ondas EMT

Como se hizo notar en el párrafo que siguió a (26-30), un modo EMT es aquél para que el que tanto $\mathcal{E}_z$ como $\mathcal{H}_z$ son iguales a cero. Al observar (26-25) a (26-28) se podría estar

tentado a concluir que todas las componentes son también iguales a cero, de manera que no podría existir dicho modo. Sin embargo, se dividió entre k_c^2 para obtener estas expresiones, de modo que es más seguro regresar a las propias ecuaciones de Maxwell dadas en (26-17) a (26-24). Haciendo $\mathcal{E}_z = 0$ y $\mathcal{H}_z = 0$, en ellos se reducen a

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = 0 \tag{26-62}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} = 0 \tag{26-63}$$

$$\mathcal{H}_x = -\frac{k_g}{\omega\mu}\mathcal{E}_y = -\frac{\omega\epsilon}{k_g}\mathcal{E}_y \tag{26-64}$$

$$\mathcal{H}_y = \frac{k_g}{\omega\mu}\mathcal{E}_x = \frac{\omega\epsilon}{k_g}\mathcal{E}_x \tag{26-65}$$

Tanto de (26-54) como de (26-65) se desprende que $k_g/\omega\mu = \omega\epsilon/k_g$, de manera que

$$k_g^2 = \omega^2\mu\epsilon = \frac{\omega^2}{v^2} = k_0^2 \tag{26-66}$$

según (26-8) y (24-12); entonces, de acuerdo con (26-7), $k_c^2 = 0$. Dado que $k_g = k_0$, la onda EMT se propagará a lo largo de la guía con la misma velocidad Ψ que tendría una onda plana; puesto que $k_c = 0$, la longitud de onda de corte es infinita, por lo que una onda EMT puede tener cualquier frecuencia o longitud de onda.

Puesto que $\mathcal{E}$ solamente tiene componentes transversales a la dirección de propagación, debe tener la forma $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{y}}$, debiendo existir una expresion similar para $\mathcal{H}$; así, es posible expresar (26-64) y (26-65) muy simplemente como

$$\mathcal{H} = \frac{k_g}{\omega\mu}\hat{\mathbf{z}} \times \mathcal{E} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathcal{E}}{Z} \tag{26-67}$$

donde $Z = (\mu/\epsilon)^{1/2}$ es la impedancia de la onda plana. Si se comparan (26-67) y (24-94) se puede observar que una onda EMT tiene características similares a las de una onda plana no confinada. Por estas razones, a las ondas EMT también se las conoce como *modos principales.*

Si se sustituyen (26-64) y (26-65) en la primera ecuación de (26-63), se encuentra que de ello resulta la primera ecuación de (26-62); lo mismo resulta ser verdad también para la segunda ecuación de cada conjunto. En otras palabras, (26-63) quedará satisfecha si se satisface (26-62). Al recordar que $\mathcal{E}_x$ y $\mathcal{E}_y$ son funciones únicamente de x y y, de acuerdo con (26-14), se puede introducir una función escalar, $\phi(x,y)$, y definir $\mathcal{E}_x = -\delta\phi/\delta =$ y $\mathcal{E}_y = -\delta\phi/\delta y$, es decir,

$$\mathcal{E} = -\nabla\phi \tag{26-68}$$

Se encuentra entonces que la segunda ecuación de (26-62) se satisface debido a que $\delta^2\phi/\delta y\,\delta x = \delta^2\phi/\delta x\,\delta y$, mientras que la primera queda como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{26-69}$$

que es justamente la forma bidimensional de la ecuación de Laplace, de acuerdo con (11-55). Por lo tanto, si primero se toma *cualquier* solución del "problema de potencial *electrostático* bidimensional" apropiado, que dé un campo eléctrico normal a la superficie de frontera perfectamente conductora, se le designa por $\mathcal{E}$, después se encuentra $\mathcal{H}$ a partir de (26-67), se pueden utilizar los resultados de (26-14) y (26-15) para obtener un posible modo EMT para el sistema. El patrón de campo bidimensional que se obtiene de esta manera viajará por la guía con la velocidad v de una onda plana característica del medio.

Sin embargo, las cosas son un poco más complicadas. Si $\mathcal{E}$ es normal a la superficie el gradiente del potencial escalar ϕ lo es también, según (26-68), y, como se vio en la sección 1-9, ϕ debe entonces ser constante sobre la superficie, como se puede apreciar en la figura 1-18. En otras palabras, la superficie conductora debe ser una superficie equipotencial. Pero en la sección 11-1 se encontró que una solución de la ecuación de Laplace que tiene el mismo valor en *todos* los puntos de la frontera debe también tener el mismo valor *constante* en cualquier punto de la región. Si éste es el caso, $\nabla \phi = 0$, de modo que $\mathcal{E} = 0$ y $\mathcal{H} = 0$, de acuerdo con (26-68) y (26-67), por lo que después de todo no podrá existir una onda EMT. Por lo tanto, una guía de ondas del tipo de un tubo hueco como el que se ilustra en la figura 26-1 no puede presentar un modo EMT.

Sin embargo, sí puede existir un modo EMT si la guía consiste de por lo menos *dos* conductores como los dos cables paralelos de la figura 11-10, o los cilindros coaxiales de la figura 6-12. La razón es que, habiendo más de una parte en la superficie limitante, el potencial ϕ puede tener un valor constante en una parte de la superficie y otro valor constante *distinto* en la otra porción o en las otras porciones de la superficie. En tal caso ϕ no necesita ser constante en la región entre los conductores, por lo que ahora $\mathcal{E} = -\nabla\phi$ puede ya ser diferente de cero, haciendo posible la existencia de un modo EMT.

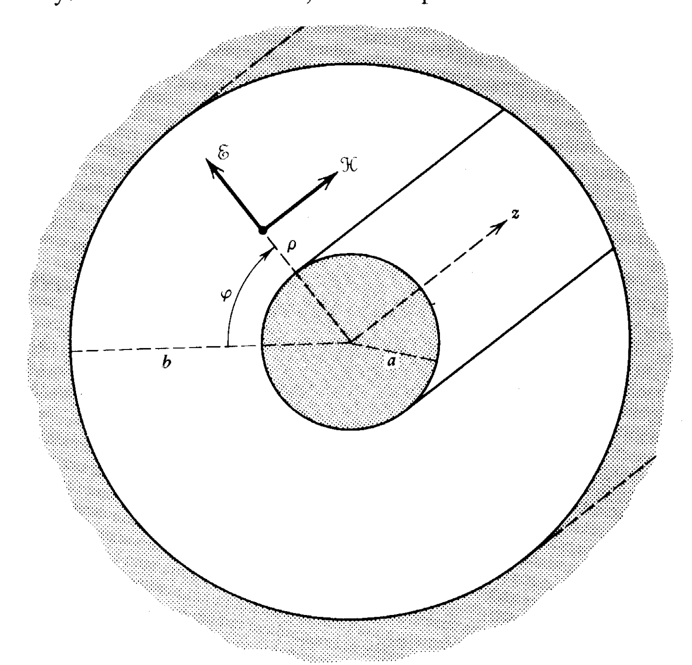


Figura 26-5 Campos en el modo principal de un cable coaxial.

Para ilustrar estas ideas, considérese el modo EMT más simple posible de un tipo muy importante de guía.

Ejemplo

Cable coaxial. Este consiste de dos cilindros coaxiales de diferentes radios, a y b, como se ilustra en la figura 6-5. Se utilizan coordenadas polares planas ρ y φ sobre el plano perpendicular al eje de los cilindros. La solución general de (26-69) en estas coordenadas está dada por (11-141). Aquí se considera únicamente el caso en que ϕ es independiente del ángulo, resultando entonces que

$$\phi = A + B \ln \rho \tag{26-70}$$

donde A y B son constantes. Al sustituir esto en (26-68) y después utilizar (1-85), (26-67) y (1-76), se obtiene

$$\mathcal{E} = -\frac{B}{\rho}\hat{\rho} \qquad \mathcal{H} = -\frac{B}{Z\rho}\hat{\varphi} \tag{26-71}$$

de modo que $\mathcal{E}$ solamente tiene una componente radial y $\mathcal{H}$ solamente tiene una componente, como se muestra en la figura. Si se sustituyen estos resultados en (26-14) y (26-15), y se utiliza (26-66), se
encuentra que los campos de la onda están dados por

$$\mathbf{E} = -\frac{B}{\rho}\hat{\rho}e^{i\omega[(z/v)-t]} \qquad \mathbf{H} = -\frac{B}{Z\rho}\hat{\varphi}e^{i\omega[(z/v)-t]} \tag{26-72}$$

La diferencia potencial entre los dos conductores se puede encontrar a partir de (5-11) y resulta

$$\Delta\phi = \int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -B\ln\left(\frac{b}{a}\right)e^{i\omega[(z/v)-t]} = \Delta\phi_0 e^{i\omega[(z/v)-t]} \tag{26-73}$$

cuyo valor máximo es $\Delta\phi_0 = -B \ln(b/a)$, de manera que (26-72) se puede expresar también como

$$\mathbf{E} = \frac{\Delta\phi_0 e^{i\omega[(z/v)-t]}}{\rho\ln(b/a)}\hat{\rho} \tag{26-74}$$

De (21-39) se puede calcular la corriente en el conductor interior, si se observa que cuando se elige la trayectoria de integración sobre el plano de la sección entonces $(\delta\,\mathbf{D}/\delta t)\cdot d\mathbf{a} = 0$, de manera que

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{2\pi B}{Z}e^{i\omega[(z/v)-t]} = I_f = I_{f0}e^{i\omega[(z/v)-t]} \tag{26-75}$$

donde el valor máximo de la corriente es $I_{f0} = -2\pi\, B/Z$. (Habrá una corriente igual y opuesta sobre la superficie en $\rho = b$ puesto que, si se toma la trayectoria C sobre el conductor cuando $\rho > b$, la integral de línea de $\mathbf{H}$ debe desaparecer, ya que $\mathbf{H} = 0$ en el interior del conductor perfecto, por lo que la trayectoria no puede encerrar ninguna corriente

libre neta.) Si se usa (26-75) se puede expresar el campo magnético en función de la corriente como

$$\mathbf{H} = \frac{I_{f0} e^{i\omega[(z/v) - t]}}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{26-76}$$

De (26-73) y (26-75) se observa que la corriente y la diferencia de potencial se encuentran en fase, de modo que su relación es constante y dada por

$$\frac{\Delta\phi}{I_f} = \frac{\Delta\phi_0}{I_{f0}} = \frac{Z}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = Z_c \tag{26-77}$$

donde Z_c recibe el nombre de impedancia característica del cable coaxial.

26-6 Cavidades resonantes

Supóngase que se toma una porción de longitud L de la guía de ondas de la figura 26-1 y se tapan los extremos con conductores perfectos. Se obtendría así un volumen totalmente encerrado por paredes perfectamente conductoras. Ya no es posible suponer que habrá campos en forma de ondas viajeras porque se han introducido nuevas condiciones de frontera y, cuando menos, existirán reflexiones en las nuevas paredes, provocadas a su vez por la necesidad de satisfacer las nuevas condiciones de frontera. Si se recuerdan los resultados en los ejercicios 25-10 y 24-3, sería lógico esperar que los campos tengan la forma de ondas estacionarias que correspondan a valores característicos y específicos de las frecuencias de oscilación. Se pueden entonces considerar los campos resultantes como la superposición de estos modos normales. (Esto resulta ser muy parecido al caso mecánico de una cuerda que vibra. La introducción de soportes perfectamente rígidos en sus extremos y la necesidad de una longitud específica de la cuerda hace que los modos normales tomen la forma de ondas estacionarias, que resultan de la superposición de ondas viajeras incidentes y reflejadas. Un desplazamiento arbitrario de la cuerda se puede calcular como la superposición adecuada de estas ondas estacionarias.)

A los sistemas de este tipo se les conoce como *cavidades resonantes* o resonadores de cavidad. Es evidente que los puede haber de una gran variedad de formas y dimensiones, pero los principios generales que se deben utilizar para encontrar los campos son exactamente los mismos, aunque resulta mucho más fácil ilustrarlos por medio de un ejemplo específico.

Considérese una región cerrada por medio de paredes rectangulares perfectamente conductoras de lados a, b y c, con el origen en uno de sus vértices, tal como se muestra en la figura 26-6. La cavidad se encuentra llena de un material i.h.1. no conductor, descrito por μ y ϵ. Cada componente de campo satisface todavía la ecuación de onda (26-3), pero no puede tomarse aquí una solución de la forma (26-4). Sin embargo, por el tratamiento que condujo a (24-1), resulta evidente que se puede separar la variación respecto al tiempo en la forma $e^{-i\omega t}$. Por lo tanto, en lugar de (26-4) se debe suponer que **W** puede expresarse como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \tag{26-78}$$

que, al ser sustituida en (26-3) conduce a la ecuación que Ψ_0 debe satisfacer:

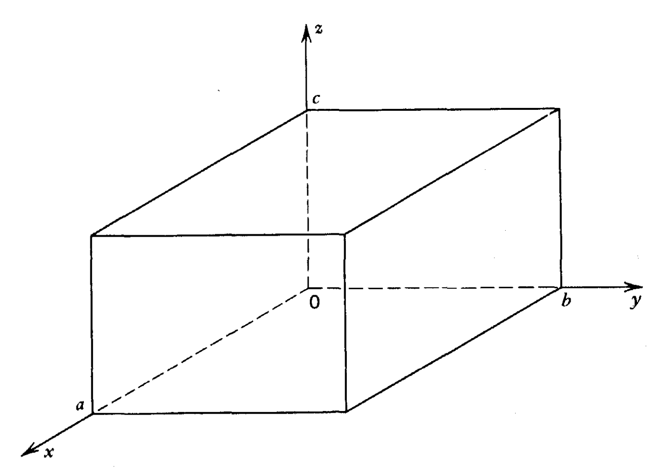


Figura 26-6 Una cavidad resonante rectangular.

$$\nabla^2\psi_0 + k_0^2\psi_0 = 0 \tag{26-79}$$

donde $k_0^2 = (\omega/v)^2$ otra vez. (En realidad este resultado es válido para cualquier clase de sistema corrdenado que se utilice, y se le suele llamar la ecuación de onda sin el tiempo.)

Se puede resolver (26-79) en coordenadas rectangulares por el método de separación de variables. Si se escribe $\Psi_0 = X(x)Y(y)Z(z)$ y se procede de la misma manera en que se llegó de (26-6) a (26-33), se encuentra que

$$\psi_0(\mathbf{r}) = (C_1 \operatorname{sen} k_1 x + C_2 \cos k_1 x)(C_3 \operatorname{sen} k_2 y + C_4 \cos k_2 y) \times (C_5 \operatorname{sen} k_3 z + C_6 \cos k_3 z) \tag{26-80}$$

donde

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k_0^2 \tag{26-81}$$

y donde las C son constantes. Esto se puede comprobar por sustitución directa de (26-80) en (26-79). Si se combina esta forma con (26-78)

$$E_x = (C_1 \operatorname{sen} k_1 x + C_2 \cos k_1 x)(C_3 \operatorname{sen} k_2 y + C_4 \cos k_2 y) \times (C_5 \operatorname{sen} k_3 z + C_6 \cos k_3 z) e^{-i\omega t} \tag{26-82}$$

Se tiene ahora que E_x será una componente tangencial y debe por lo tanto desaparecer en las caras $y = 0$ y b y $z =$ y c. Esto requiere que $C_4 = C_6 = 0$ y que;

$$k_2 = \frac{n\pi}{b} \qquad k_3 = \frac{p\pi}{c} \tag{26-83}$$

donde n y p son enteros. Por lo tanto, en este punto se tiene

$$E_x = (C_1' \operatorname{sen} k_1 x + C_2' \cos k_1 x) \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} k_3 z e^{-i\omega t} \tag{26-84}$$

donde $C_1 = C_1\ C_3\ C_5$ y $C_2\ ' = C_2\ C_3\ C_5$. De manera similar, se encuentra que,

$$E_y = \operatorname{sen} k_1 x (C_3' \operatorname{sen} k_2 y + C_4' \cos k_2 y) \operatorname{sen} k_3 z e^{-i\omega t} \tag{26-85}$$

$$E_z = \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y (C_5' \operatorname{sen} k_3 z + C_6' \cos k_3 z) e^{-i\omega t} \tag{26-86}$$

y que

$$k_1 = \frac{m\pi}{a} \tag{26-87}$$

Al sustituir (26-83) y (26-87) en (26-81) y utilizando (26-8), se encuentra que las posibles frecuencias de oscilación en esta cavidad están dadas por

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2\right] \tag{26-88}$$

Nótese que si cualesquiera de los enteros m, n ó p son iguales a cero, todas las componentes de **E** serán también iguales a cero, así como también todas las componentes de **H**.

El campo eléctrico debe todavía satisfacer las ecuaciones de Maxwell y, en particular, se debe tener que $\Delta \cdot \mathbf{E} = 0$,. Cuando en ésta se sustituyen (26-84) a (26-86), se obtiene

$$\begin{aligned}
&-(k_1 C_2' + k_2 C_4' + k_3 C_6') \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} k_3 z \\
&+ \left[(k_1 C_1' \cos k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} k_3 z) + (k_2 C_3' \operatorname{sen} k_1 x \cos k_2 y \operatorname{sen} k_3 z) \right. \\
&\qquad \left. + (k_3 C_5' \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \cos k_3 z) \right] = 0
\end{aligned} \tag{26-89}$$

Un poco de análisis llevará a la conclusión de que no es posible que esta expresión sea siempre igual a cero para *todos* los valores de x, y y z (que pueden tomarse independientemente) a menos que $C_1\ ' = C_3\ ' = C_5\ ' = 0$ y que $k_1\ C_2\ ' + k_2\ C_4\ ' + k_3\ C_6\ ' = 0$. Si se toma ahora $C_2\ ' = E_1$, $C_4 = E_2$ y $C_6\ ' = E_3$, se encuentra que la última condición se puede expresar como

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0 \tag{26-90}$$

mientras que las expresiones para las componentes de campo quedan finalmente como

$$E_x = E_1 \cos k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \operatorname{sen} k_3 z e^{-i\omega t} \tag{26-91}$$

$$E_y = E_2 \operatorname{sen} k_1 x \cos k_2 y \operatorname{sen} k_3 z e^{-i\omega t} \tag{26-92}$$

$$E_z = E_3 \operatorname{sen} k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \cos k_3 z e^{-i\omega t} \tag{26-93}$$

de manera que E_1, E_2 y E_3 son los valores máximos de las componentes respectivas.

Si se define un vector **k** con las componentes k_1, k_2 y k_3 y un vector E_0 con las componentes E_1, E_2, E_3, se puede expresar (26-90) como

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \tag{26-94}$$

que es muy parecida al resultado que se obtuvo para una onda plana en (26-91). Así, para un modo dado, $\mathbf{E}_0$ debe ser perpendicular el vector $\mathbf{k} = (m\pi/a)\hat{\mathbf{x}} + (n\,\pi/b)\hat{\mathbf{y}} + (p\,\pi/c)\hat{\mathbf{z}}$.

El campo magnético se puede calcular de $\Delta \times \mathbf{E} = -\mu(\partial \mathbf{H}/\partial t) = i\omega\mu\mathbf{H}$. Por ejemplo, se obtiene

$$i\omega\mu H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = (k_2 E_3 - k_3 E_2)\operatorname{sen} k_1 x \cos k_2 y \cos k_3 z e^{-i\omega t} \qquad (26\text{-}95)$$

Dado que $k_2\ E_3 - k_3\ E_2$ es la componente de $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$, resulta deseable definir un vector $\mathbf{H}_0$ como

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \qquad (26\text{-}96)$$

pues, si se designan sus componentes rectangulares por H_1, H_2 y H_3, se puede expresar (26-95) como

$$H_x = -\,iH_1 \operatorname{sen} k_1 x \cos k_2 y \cos k_3 z e^{-i\omega t} \qquad (26\text{-}97)$$

Nótese otra vez la similitud entre (26-96) y el resultado para onda plana dado por la primera expresión de (24-93). Así, se puede asociar un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ con cada modo de onda estacionaria en la cavidad.

De manera similar, se encuentra que las otras dos componenetes de **H** son

$$H_y = -\,iH_2 \cos k_1 x \operatorname{sen} k_2 y \cos k_3 z e^{-i\omega t} \qquad (26\text{-}98)$$

$$H_z = -\,iH_3 \cos k_1 x \cos k_2 y \operatorname{sen} k_3 z e^{-i\omega t} \qquad (26\text{-}99)$$

Se observa que $H_x = 0$ en $x = 0$ y $x = a$, es decir, en las paredes en las que es componente normal; igualmente, H_y y H_z desaparecen respectivamente en $y = 0$ y b y $z = 0$ y c. Por lo tanto, las condiciones de frontera para **H** se han satisfecho automáticamente una vez satisfechas las condiciones de frontera para **E**. Además, es fácil comprobar que las dos ecuaciones de Maxwell restantes que no se han usado todavía quedan también satisfechas, es decir $\Delta \cdot \mathbf{H} = 0$ y que $\Delta \times \mathbf{H} = \epsilon\,(\partial \mathbf{E}/\partial t)$. [Para ello se necesita usar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 = 0$, (26-96), (26-94) y (26-81), la última de las cuales se puede también escribir como $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k_0^2 = \omega^2/v^2 = \omega^2\mu\epsilon$.]

Cada componente de **E** varía como $e^{-i\omega t}$, mientras que las componentes de **H** son proporcionales a $-ie^{-i\omega t} = e^{-i[\omega t + (1/2)\pi]}$. Por lo tanto, los campos eléctrico y magnético no están en fase en estas ondas estacionarias, sino que **H** va 90° por delante de **E**.

Un **k** dado corresponde a un modo dado, es decir, a un conjunto dado de enteros *m, n,* y *p,* de acuerdo con (26-83) y (26-87). De (26-94) se concluye que el vector $\mathbf{E}_0$ debe escogerse perpendicular a **k**. Sin embargo, existen dos direcciones mutuamente perpendiculares e *independientes* en la que se puede tomar $\mathbf{E}_0$ de manera que sea perpendicular a **k**. Por lo tanto, para cada valor de **k** hay dos posibles direcciones independientes de polarización de $\mathbf{E}_0$, de modo que debe haber dos modos para cada frecuencia permitida por (26-88). A esta propiedad se le conoce como *degeneración* y es una característica fundamental e importante de las ondas electromagnéticas estacionarias. Si *a, b* y *c* son todas diferentes, entonces las diversas frecuencias dadas por (26-88) serán por lo general diferentes. Sin embargo, si existen relaciones simples entre las dimensiones es posible que

elecciones diferentes de los enteros den la misma frecuencia, de modo que también existirá degeneración, pero como resultado de algo diferente. Como ejemplo extremo, considérese un cubo para el que $a = b = c$, de modo que (26-88) se reduce a

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (m^2 + n^2 + p^2) \qquad (26\text{-}100)$$

Así todas las combinaciones posibles de los enteros que den el mismo valor $m_2 + n_2 + p^2$ tendrán la misma frecuencia, por lo que los modos serán degenerados.

Ejercicios

26-1 Sea $\mathcal{E}_T = \mathcal{E}_x \hat{\mathbf{x}} + \mathcal{E}_y \hat{\mathbf{y}}$ la componente transversal de $\mathcal{E}$, con una expresión similar para $\mathcal{H}_T$. Para un modo ET, demostrar que $\mathcal{H}_T = (ik_g/k_c^2)\nabla\mathcal{H}_z, \mathcal{H}_T = (\hat{\mathbf{z}} \times \mathcal{E}_T)/Z_e$ donde $Z_e = (k_0/k_g)Z = (\lambda_g/\lambda_0)Z$. Encontrar relaciones correspondientes para un modo MT -
26-2 Uilizando los resultados del ejercicio anterior, demostrar que cualquier solución de (26-6) que se anule en la frontera de la guía conducirá a un modo MT. De manera similar, demostrar que una solución de (26-6) para la que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_0 = 0$ en la frontera conducirá a un modo ET.
26-3 Suponer que se define una velocidad de grupo, v_G para propagación a lo largo de una guía de ondas por medio de $v_G = d\omega/dk_g$, como en (24-144). Encontrar v_G en función de ω y compararla con v Demostrar que $v_G v_g = v^2 = 1/\mu\epsilon$ y comparar con los resultados del ejercicio 24-26.
26-4 Una guía de ondas rectangular con vacío en su interior tiene $a = 8$ centímetros y $b = 6$ centímetros. Si dentro de la guía se propaga una onda cuya frecuencia es $\nu = 4 \times 10^9$ hertz, ¿cuáles son los modos posibles?
26-5 Considerar una guía de ondas de sección cuadrada. ¿Qué condiciones debe satisfacer el lado a para que sea posible que se propague un modo ET_{10} pero no uno ET_{11}, MT_{11} o cualquiera de orden superior?
26-6 El interior de una guía de ondas rectangular hueca se rellena con un material dieléctrico i.h.l, no magnético y no conductor. Demostrar que las frecuencias de corte son más pequeñas por un factor $K_e^{\frac{1}{2}}$ que si el interior estuviera al vacío. Si se deseara fabricar una guía rellena con el dieléctrico para que operara de la misma manera que en el caso al vacío a una frecuencia dada, es decir, que las frecuencias de corte fueran las mismas, ¿debería hacerse más grande o más pequeña y cuál sería el factor de variación para las dimensiones a y b?
26-7 Para un modo ET_{10} en una guía rectangular: (a) encontrar $\langle u \rangle$; (b) encontrar $\langle \mathbf{S} \rangle$; (c) encontrar los promedios con respecto al *espacio*, $\langle\!\langle u \rangle\!\rangle$ y $\langle\!\langle \mathbf{S} \rangle\!\rangle$, integrando los resultados anteriores para los promedios con respecto al tiempo sobre la sección de la guía; (d) definir una velodicad para el flujo de energía, v_U, por medio de $\langle\!\langle \mathbf{S} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle u \rangle\!\rangle v_U \hat{\mathbf{z}}$ (¿es razonable?) y comparar v_U con la velocidad de grupo que se encontró en el ejercicio 26-3.
26-8 Encontrar la densidad superficial de corriente $\mathbf{K}_f$ para un modo ET_{10} en una guía rectangular. Dibujar la corriente en un momento dado sobre por lo menos un período especial a lo largo de la guía.
26-9 Considerar una guía rectangular con vacío en su interior, operando en el modo ET_{10}. Encontrar el promedio en tiempo de la fuerza eléctrica por unidad de superficie, $\langle f_e \rangle$, sobre la cara $y = 0$.
26-10 Para una guía rectangular, suponer que H_0 es real y encontrar todas las componentes de campo reales para un modo ET_{20}. Repetir el ejercicio para un modo ET_{11}.

26-11 Encontrar las expresiones generales para las componentes de campo reales de un modo MT en una guía rectangular (tómese E_0 como real.)
26-12 Encontrar el promedio en tiempo del vector de Poynting para un modo MT general en una guía rectangular. Integrando con respecto a la sección de la guía, encontrar la potencia total transmitida a lo largo de ella.
26-13 La guía de ondas rectangular satisface las condiciones del ejercicio 22-6 para describir un campo electromagnético completamente en función del potencial vectorial **A**. Encontrar **A** para un modo ER_{mn} y comprobar que satisface $\Delta \cdot \mathbf{A} = 0$.
26-14 Encontrar la superposición de una onda ET_{mn} y una onda MT_{mn} en una guía rectangular, que hace que **E** sea transversal a la dirección y, es decir, $E_y = 0$ mientras que todas las demás componentes de **E** y de **H** son diferentes de cero.
26-15 Considerar una guía de ondas cilíndrica, es decir, con una sección circular de radio a y con el eje z coincidiendo con el eje del cilindro. Expresar (26-3) en coordenadas cilíndricas, suponer que la dependencia de $\mathcal{H}$ con respecto a z y t está dada por (26-4) y encontrar la ecuación diferencial que $\mathcal{H}_0$ debe satisfacer. Resolver esta ecuación por el método de separación de variables y demostrar que ψ_0 tiene la forma $\psi_0 = C_m J_m (k_c \rho) e^{im\varphi}$, donde C_m es una constante y m es un entero. [Clave: Ψ_0 debe ser una función univaluada de φ, por ejemplo, $\varphi_0 (\varphi + 2\pi) = \Psi_0 (\varphi)$.] Además, $J_m (\eta)$ satisface la *ecuación diferencial de Bessel*

$$\frac{d^2 J_m}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{dJ_m}{d\eta} + \left(1 - \frac{m^2}{\eta^2}\right) J_m = 0$$

de modo que J_m es una *función Bessel*. Encontrar la condición que determina los valores de k_c para un modo MT correspondiente al valor m.
26-16 Encontrar $\langle \mathbf{S} \rangle$ para el modo del cable coaxial que se analizó en el texto. Encontrar la potencia total transmitida por el cable y expresarla en una forma que involucre a Z_c.
26-17 Encontrar la densidad superficial de carga sobre el conductor interior para el modo del cable coaxial que se analizó en el texto. Demostrar que la densidad superficial de corriente sobre el conductor interior es igual a la densidad superficial de carga por la velocidad de la onda.
26-18 Considerar una longitud l del cable coaxial, cuya inductancia es L y cuya capacitancia es C. Demostrar que $Z_c = (L/C)^{1/2}$. (Nótese que el resultado es independiente de l; por lo tanto, a L y C se les describe por lo general como las cantidades por unidad de longitud.)
26-19 Demostrar que no existe un modo EMT para un cable coaxial, que puede obtenerse de cualquier término que dependa del ángulo en (11-141), es decir, para un ϕ dado por $\phi = (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m})(C_m \cos m\varphi + D_m \operatorname{sen} m\varphi)$.
26-20 Demostrar que los enteros m, n y p para la cavidad rectangular pueden restringirse a ser positivos o iguales a cero. [No olvidar (26-94).]
26-21 Considerar una cavidad cúbica de lado a. Demostrar que la frecuencia más baja presenta una triplie degeneración con respecto a los enteros m,n y p. Encontrar todas las componentes de **E** y de **H** para el modo $m = n = 1, p = 0$. Dibujar las líneas de campo en un instante dado. Encontrar $\langle \mathbf{S} \rangle$ y la energía electromagnética total en el interior de la cavidad.
26-22 Considerar una cavidad cilíndrica de longitud l y sección circular de radio a. El eje del cilindro se encuentra a lo largo del eje z y las dos caras están en $z = 0$ y $z = l$. Encontrar las posibles frecuencias de oscilación para esta cavidad. (No es necesario encontrar todas las componentes de campo para hacer esto. Ver también el ejercicio 26-15.)

Capítulo 27 Radiación

En los últimos tres capítulos se han estudiado campos electromagnéticos dependientes del tiempo en la forma de ondas viajeras o estacionarias. No se vio cómo se producen tales campos: sólo se dijo que es posible producirlos si se dan las distribuciones "apropiadas" de carga y corriente. Aquí se pretenden cubrir algunos de los aspectos de la generación de campos electromagnéticos en la forma de ondas; a esta parte del electromagnetismo se le suele llamar *radiación*. El tema general de la radiación cubre una gran variedad de problemas y puede llegar a ser muy complicado. Por lo tanto, este estudio se restringe a unos cuantos ejemplos representativos, razonablemente simples, pero importantes.

Si se recuerda el tratamiento dado a las ondas, se recordará que se obtuvieron buenos resultados manejando las ecuaciones de Maxwell y los propios campos **E** y **B** (o **H**). Es decir, no fue en realidad necesario utilizar los potenciales escalar y vectorial generales y dependientes del tiempo que se estudiaron en el capítulo 22. Sin embargo, la producción de radiación electromagnética se puede manejar mucho más fácilmente en función de estos potenciales **A** y ϕ.

27-1 Potenciales retardados

Solamente se considerarán regiones con las propiedades del vacío, por lo que se puede tomar $\mu\varepsilon = \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, según (23-5). Si se simplifica la notación eliminando el índice f de las densidades de carga y de corriente, las ecuaciones que determinan los potenciales son, de acuerdo con (22-14) a (22-16),

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J} \tag{27-1}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{27-2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{27-3}$$

mientras que los campos se obtienen a partir de

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \tag{27-4}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{27-5}$$

de acuerdo con (22-1) y (22-3). Debe recordarse que este conjunto de ecuaciones es completamente equivalente a las ecuaciones de Maxwell.

Resulta útil también recordar que ya se encontraron las soluciones de los potenciales para el caso *estático*, en que todas las derivadas con respecto al tiempo eran iguales a cero; éstos están dados por (16-12) y (5-7) como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')d\tau'}{R} \tag{27-6}$$

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')d\tau'}{R} \tag{27-7}$$

siendo $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Se sabe que las soluciones de los potenciales para el caso dependiente del tiempo se deben reducir a (27-6) y (27-7) para una situación estática. Desafortunadamente, no es posible por ejemplo, simplemente sustituir $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ en (27-6) por $\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)$, puesto que existen derivadas con respecto al tiempo en la ecuación diferencial de A.

Es posible resolver (27-1) y (27-2) por medio de métodos muy elegantes y generales, pero resultan ser bastante complicados. Es preferible, en la perspectiva actual, utilizar un método más sencillo que produzca los mismos resultados y que, además, sea un gran auxiliar para comprender mejor la situación. La contribución a ϕ se calculará a partir de un elemento de carga $\Delta q=\rho\Delta\tau'$ en un volumen $\Delta\tau'$ lo suficientemente pequeño para que se pueda considerar a Δq como una carga puntual. Después, sumando las contribuciones de todos los elementos de carga se obtendrá el potencial escalar total. Se supone que en el exterior de $\Delta\tau'$ no existe carga, por lo que (27-2) se convierte en la ecuación de onda homogénea

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \tag{27-8}$$

Dada la simetría esférica asociada con una carga puntual, $\phi(\mathbf{r},t)$ en realidad sólo puede depender de la distancia relativa R a la carga, y no de los ángulos, es decir, $\phi=\phi(R,T)$. Por medio de (1-141) se encuentra que $\Delta\phi=(\partial\phi/\partial R)\mathbf{R}=(\partial\phi/\partial R)(\mathbf{R}/R)$, y después de utilizar sucesivamente (1-117), (1-141) y el ejercicio 1-21 se obtiene

$$\nabla^2\phi=\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla\cdot\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)\mathbf{R}\right]=\nabla\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)\right]\cdot\mathbf{R}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)\nabla\cdot\mathbf{R}$$
$$=\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)\right]\frac{\mathbf{R}}{R}\right\}\cdot\mathbf{R}+\frac{3}{R}\left(\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\phi}{\partial R}$$

de modo que (27-8) queda

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\phi}{\partial R}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0 \tag{27-9}$$

[Nótese que, según (1-105), este resultado viene a ser exactamente lo que se obtendría al expresar Δ^2 en coordenadas esféricas, tomando a R como la distancia radial y siendo ϕ independiente del ángulo]. Si se hace ahora

$$\phi(R,t)=\frac{\chi(R,t)}{R} \tag{27-10}$$

y se sustituye en (27-9), se encuentra que χ satisface la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0 \tag{27-11}$$

En (24-9), (24-11) y (24-12) se encontró que la solución a esta ecuación tiene la forma $\chi = F(R-ct)+g(R+ct)$, donde f y g son funciones sólo de las combinaciones $R \mp ct$; así, de (27-10) se deprende que ϕ tiene la forma

$$\phi(R,t)=\frac{f(R-ct)}{R}+\frac{g(R+ct)}{R} \tag{27-12}$$

Cada uno de los términos de (27-12) es una *onda esférica* que viaja con velocidad c en la dirección radial con respecto a la posición de Δq, y cuya amplitud es constante en una esfera de radio R con centro en la carga; f representa una onda que se aleja de Δq, mientras que g equivale a una onda que se le acerca. Dado que (27-12) se obtuvo como la solución de la ecuación sin fuente (27-8), f y g deben determinarse de manera tal que correspondan a la existencia de una carga Δq situada en $R \simeq 0$.

Antes que nada, el ϕ de (27-12) debe ser el potencial debido a la fuente cambiante. Si g es la onda que se acerca, debe llegar a la fuente en un tiempo posterior a t, específicamente después de un intervalo R/c, y el valor de g debe ser el valor correcto apropiado para un punto muy cercano a Δq. Pero esto significa que g ya era correcta en un tiempo anterior t y a una distancia R. En otras palabras, el "efecto" descrito por g necesariamente tiene que haber ocurrido (o ser conocido) *antes* de la "causa" debida a la carga. Dado que esto contradice el orden de los acontecimeintos, debe rechazarse el término en g por razones físicas y escribir $\phi = f(R-ct)/R$. A medida que se llega a la cercanía de la carga casi puntual Δq, es decir, a medida que $R\to 0$, el potencial debe reducirse al de una carga puntual con su valor y posición instantáneos que, de acuerdo co (27-7), es $\Delta q(t)/4\pi\epsilon_0 R$. Así, $f(R-ct)$ debe tener una forma tal que, para $R\to 0, f(-ct)=\Delta q(t)/4\pi\epsilon_0$ o, si γ es la variable general en f tal que

$$f(\gamma)=\frac{\Delta q(-\gamma/c)}{4\pi\epsilon_0} \tag{27-13}$$

Esto significa que $R-ct$ debe remplazarse por $-(R-ct)/c = t-(R/c)$ en cuyo caso la forma de f, y por lo tanto de ϕ, se determina finalmente como

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}\Delta q\left(t-\frac{R}{c}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{R}{c}\right)\Delta\tau' \tag{27-14}$$

Este resultado indica que el potencial escalar en el punto de campo r y en el tiempo t depende del valor de la carga en un tiempo *anterior* $t-(R/c)$, siendo la diferencia en tiempo R/c exactamente el tiempo requerido para que la onda esférica llegue al punto de campo.

Por lo tanto, la carga no produce el potencial instantáneamente, sino que se requiere de un tiempo finito, el tiempo de llegada de la onda, para que el efecto se produzca en el punto de campo. El tiempo $t' = t - (R/c)$ suele recibir el nombre de *tiempo retardado*.

Teniendo ya la contribución de un elemento de carga al potencial escalar, se puede obtener el potencial escalar total debido a una distribución de carga si se suma (27-14) sobre todo el volumen V' que contiene las cargas; el resultado es

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho[\mathbf{r}', t-(R/c)]\,d\tau}{R} \tag{27-15}$$

Se observa que cada elemento de carga debe evaluarse en su propio tiempo retardado; por lo general, estos tiempos serán diferentes de un elemento a otro dado que, para un punto de campo $\mathbf{r}$ dado, las distancias relativas $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ serán diferentes según la posición del punto fuente $\mathbf{r}'$. Por lo tanto, (27-15) depende de R en forma explícita, puesto que aparece en el denominador, y en forma implícita porque aparece en la variable tiempo de la densidad de carga ρ.

Cada componente rectangular de (27-1) tiene la misma forma que (27-2); por ejemplo, se tiene que

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x$$

Cada una de esas ecuaciones dará un resultado como (27-15), de modo que cuando se suman vectorialmente se encuentra que $\mathbf{A}$ está dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}[\mathbf{r}', t-(R/c)]\,d\tau'}{R} \tag{27-16}$$

Los resultados (27-15) y (27-16) se conocen como los *potenciales retardados*; a veces se les suele expresar en forma abreviada con corchetes alrededor del término fuente en el integrando, como recordatorio de que deben evaluarse en los tiempos retardados, es decir, se suele expresar

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{[\mathbf{J}]\,d\tau'}{R} \qquad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{[\rho]\,d\tau'}{R} \tag{27-17}$$

Nótese que (27-15) y (27-16) se reducen correctamente a (27-6) y (27-7) en el caso estático en que las densidades de carga y de corriente son independientes del tiempo. [A los potenciales que resultan del término g de (27-12) se les denomina potenciales *adelantados*].

27-2 Desarrollo multipolar para fuentes que oscilan armónicamente

Aquí solamente se encontrarán los campos producidos en un punto en el vacío fuera de una región finita que contiene fuentes preeestablecidas, es decir, se supone que $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$ y $\rho\,(\mathbf{r}', t)$ son funciones conocidas de la posición y del tiempo. Además, solamente se considera el caso importante en que las fuentes varían armónicamente en el tiempo con una frecuencia circular ω, de modo que se puede escribir

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}',t)=\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')e^{-i\omega t} \qquad \rho(\mathbf{r}',t)=\rho_0(\mathbf{r}')e^{-i\omega t} \tag{27-18}$$

donde $\mathbf{J}_0$ y ρ_0 pueden ser funciones complejas como ya se vio en relación con (24-19). Por lo tanto, si se les expresa en función de una amplitud y una fase reales como

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')=\hat{\mathbf{j}}|\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')|e^{i\vartheta_c} \qquad \rho_0(\mathbf{r}')=|\rho_0(\mathbf{r}')|e^{i\vartheta_{ch}} \tag{27-19}$$

donde $\hat{\mathbf{j}}$ da la dirección de $\mathbf{J}_0$, entonces las partes reales que representan las corrientes y cargas físicas son

$$\mathbf{J}_{real}=\hat{\mathbf{j}}|\mathbf{J}_0|\cos(\omega t-\vartheta_c) \qquad \rho_{real}=|\rho_0|\cos(\omega t-\vartheta_{ch}) \tag{27-20}$$

Siguiendo los resultados anteriores, al remplazar t por $t-(R/c)$ en (27-18) y tomar

$$k=\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{27-21}$$

se encuentra que (27-15) y (27-16) se vuelven

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{e^{ikR}\rho_0(\mathbf{r}')d\tau'}{R} \tag{27-22}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_{V'}\frac{e^{ikR}\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')d\tau'}{R} \tag{27-23}$$

Puede observarse que los potenciales también varían armónicamente con el tiempo (como ocurrirá con **E** y **B**) y con las misma frecuencia que las fuentes. Esto simplifica bastante el trabajo, porque se pueden remplazar todas las derivadas con respecto al tiempo por

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-i\omega\psi \tag{27-24}$$

$-i\omega$, es decir, donde ψ puede ser ϕ o cualquier componente de **A**, **E** o **B**.

De hecho, también se puede expresar todo en función del potencial vectorial en este caso, puesto que la condición de Lorentz (27-3) es $\Delta\cdot\mathbf{A}-(i\omega/c^2)\phi=0$, y así

$$\phi=-i\frac{c^2}{\omega}\nabla\cdot\mathbf{A} \tag{27-25}$$

Si ahora se sustituye (27-25) en (27-5) y se utilizan (27-4), (27-24) y (1-122) se obtiene

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi+i\omega\mathbf{A}=i(c^2/\omega)[\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})+(\omega^2/c^2)\mathbf{A}]$$

$$=i(c^2/\omega)[\nabla\times\mathbf{B}+\nabla^2\mathbf{A}+(\omega^2/c^2)\mathbf{A}] \tag{27-26}$$

En los puntos en los que se desea encontrar **E** y **B**, la densidad de corriente es $\mathbf{J}=0$, de modo que (27-1) se vuelve $\Delta^2\mathbf{A}+(\omega^2/c^2)\mathbf{A}=0$; por tanto, los dos últimos términos de (27-26) desaparecen, reduciéndose a

$$\mathbf{E} = i\frac{c^2}{\omega}\nabla\times\mathbf{B} = i\frac{c}{k}\nabla\times\mathbf{B} \tag{27-27}$$

En realidad este resultado no debe ser una sorpresa puesto que es justamente una de las ecuaciones de Maxwell; así, cuando $\sigma = 0$ (24-4) se vuelve $\Delta \times \mathrm{B} = \mu_0 \varepsilon_0(\partial \mathrm{E}/\partial t) = -i(\omega/c^2)$ E, que es exactamente (27-27). En resumen, se ha encontrado que únicamente se necesita considerar el potencial vectorial **A** dado por (27-23); una vez que se haya encontrado **A**, **B** se puede obtener de (27-4) y **E** de (27-27)

La integral de (27-23) es por lo general muy difícil de manejar de modo que resulta conveniente desarrollar el integrando por medio de una serie de potencias muy a la manera de como se hizo con respecto a los multiples eléctrico y magnético en los capítulos 8 y 19. Se toma el origen de coordenadas en algún punto arbitrario y conveniente dentro del volumen ocupado por las fuentes, produciéndose una situación como la que se muestra en la figura 27-1, donde **r** es el vector de posición del punto de campo **P**. (Compárece ésta con las figuras 19-1 y 8-1). Además, se puede escribir

$$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{1/2} = r(1+\eta)^{1/2} \tag{27-28}$$

según (19-2) y (8-4), donde

$$\eta = -2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\theta' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = -\frac{2(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \tag{27-29}$$

Si se toma r muy grande en comparación con las dimensiones del volumen fuente V', se puede hacer uso del desarrollo (8-6) para expresar

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\eta + \frac{3}{8}\eta^2\right) \tag{27-30}$$

dado que sólo se manejarán los términos del orden de $(r'/r)^2$. Considérese ahora el término e^{ikR}, que también se desea desarrollar de la manera adecuada.

De acuerdo con (27-21), $kR = 2\pi R/\lambda$, de manera que este producto esencialmente mide la distancia R en una escala de longitudes de onda. Si se trata de una fuente compacta, $R \approx r$, y si se desarrollara e^{ikR} en potencias de kR y se conservaran únicamente los primeros términos, sólo se estaría tomando en cuenta, innecesariamente, los puntos de campo cercanos a la fuente. Sin embargo, si D es una de las dimensiones tipicas del volu-

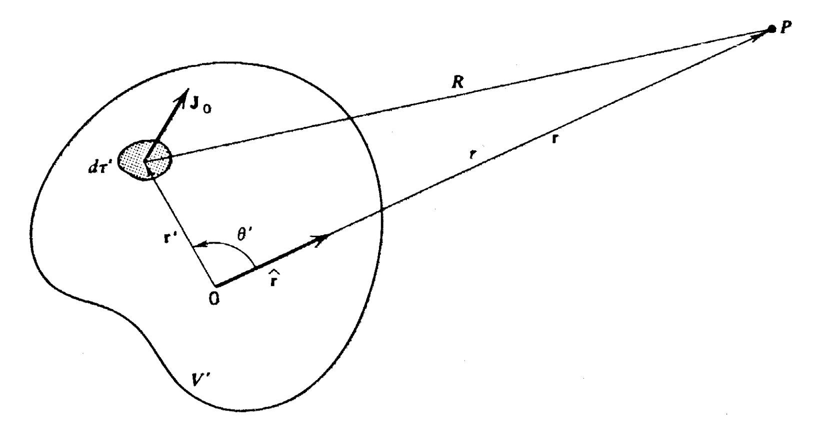


Figura 27-1 Relaciones existentes en el desarrollo multipolar del potencial vectorial.

men fuente V' las variaciones en $R - r$ serán del orden de magnitud de D, por lo que resulta razonable suponer que $D \ll \lambda$; de esta manera, si bien es cierto que el tratamiento se restringe a fuentes pequeñas a escala de longitudes de onda, no ha sido necesario hacer suposición alguna con respecto al valor relativo de r comparado con λ. En otras palabras, lo que realmente se desea desarrollar es la cantidad $e^{ik(R-r)}$ en lugar de e^{ikR}. Antes de proceder con el desarrollo, es conveniente considerar otra forma de expresar la suposición de $D \ll \lambda$.

En el caso de sistemas que oscilan armónicamente con vectores de posición serán $v \approx \omega D$. Si se toma $D \ll \lambda$ se encontrará que $v/c \approx \omega D/c \approx D/\lambda \ll 1$. En otras palabras, la suposición hecha de que todas las cargas y corrientes se encuentran contenidas en un volumen compacto que es pequeño en comparación con la distancia de la fuente al observador y con respecto a la longitud de onda, durante todo el tiempo de la observación, es equivalente a suponer que se trata de un límite "no-relativístico" de cargas que se "mueven lentamente", es decir, que las velocidades de las cargas son pequeñas en comparación con c. Estas restricciones sobre cargas que se mueven lentamente se aplican a todo el material de este capítulo, aún cuando en la última sección se encuentran medios apropiados para manejar ciertas fuentes con dimensiones del orden de las longitudes de onda.

Para obtener un desarrollo adecuado de e^{ikR}, es necesario expresarlo en función de η. Esto se logra si se escribe primero que $kR = kr + k(R - r)$ y después se utiliza (27-28), con lo que se obtiene $k(R - r) = kr[(1 + \eta)^{1/2} - 1] \simeq kr(\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{8}\eta^2)$, Si se sustituye todo esto en e^{ikR} y se utiliza el desarrollo para la función exponencial $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2$, conservando solamente los términos de segundo orden, se obtiene

$$
\begin{aligned}
e^{ikR} &= e^{ikr}e^{ik(R-r)} \simeq e^{ikr}e^{ikr\left(\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{8}\eta^2\right)} \\
&\simeq e^{ikr}\left[1 + ikr\left(\tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{1}{8}\eta^2\right) - \tfrac{1}{2}(kr)^2\left(\tfrac{1}{2}\eta - \tfrac{1}{8}\eta^2\right)^2\right] \\
&\simeq e^{ikr}\left\{1 + \tfrac{1}{2}ikr\eta - \tfrac{1}{8}\left[ikr + (kr)^2\right]\eta^2\right\}
\end{aligned}
\tag{27-31}
$$

Al combinar esto con (27-30) se obtiene la aproximación

$$
\frac{e^{ikR}}{R} \simeq \frac{e^{ikr}}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}(1 - ikr)\eta + \frac{3}{8}\left[1 - ikr - \frac{1}{3}(kr)^2\right]\eta^2\right\} \tag{27-32}
$$

Por último, si se sustituye la expresión de η dada por (27-29) en (27-32) y se mantiene únicamente los términos hasta $(r'/r)^2$ se obtiene

$$
\frac{e^{ikR}}{R} \simeq \frac{e^{ikr}}{r}\left\{1 + (1 - ikr)\left(\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right) + \left[1 - ikr - \frac{1}{2}(kr)^2\right]\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right\} \tag{27-33}
$$

lo que, al sustituirse en (27-23), proporciona el desarrollo deseado para el potencial vectorial en la forma

$$
\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathrm{I}} + \mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \mathbf{A}_{\mathrm{III}} \tag{27-34}
$$

$$
\mathbf{A}_{\mathrm{I}} = \frac{\mu_0 e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r}\int_{V'} \mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\,d\tau' \tag{27-35}
$$

$$\mathbf{A}_{\text{II}} = \frac{\mu_0(1-ikr)e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r^2}\int_{V'}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')\,d\tau' \tag{27-36}$$

$$\mathbf{A}_{\text{III}} = \frac{\mu_0\left[1-ikr-\frac{1}{2}(kr)^2\right]e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r^3}\int_{V'}\mathbf{J}_0(\mathbf{r}')r'^2\,d\tau' \tag{27-37}$$

puesto que r es constante con respecto a los valores primos de integración. (Los subíndices de los **A** son temporales y han sido elegidos solamente para indicar las potencias inversas de r que han aparecido en forma natural).

Se puede observar que todos los términos son proporcionales a $e^{i(kr-\omega t)}$, de modo que representan ondas esféricas que se alejan del origen con velocidad $\omega/k = c$. La amplitud de cada onda depende de r según una relación que se vuelve más complicada con cada término sucesivo del desarrollo. Además, cada onda es proporcional a una integral de la amplitud de la corriente fuente sobre el volumen fuente, aun cuando el punto de campo sigue estando en la integral de (27-36), puesto que el integrando contiene su dirección $\hat{\mathbf{r}}$. Debido al uso de desarrollos de R como los que se usaron antes, es de sospechar que estas integrales están relacionadas con ciertos momentos multipolares de la fuente y, de hecho, puede observarse que (27-35) y (27-36) contienen exactamente las primeras dos integrales que se encontraron en (19-4) cuando se obtuvo el desarrollo multipolar del potencial vectorial *magnetostático*. De acuerdo con ello, estas integrales deben ser examinadas en mayor detalle desde este punto de vista.

La integral de (27-35) es lo que se denominó el momento monopolar magnético en la sección 19-1, y en (19-5) se encontró que era siempre igual a cero. Sin embargo, eso era para el caso de corrientes estacionarias para las cuales la ecuación de continuidad se reducía a $\Delta'\cdot\mathbf{J}=0$, que desde luego, no es el caso aquí. Por medio de (27-24) se puede ver que la ecuación general de continuidad (12-13) se vuelve aquí $\Delta'\cdot\mathbf{J}+(\partial\rho/\partial t)=\Delta'\cdot\mathbf{J}-i\omega\rho=0$, lo que al combinarse con (27-18) conduce a

$$\nabla'\cdot\mathbf{J}_0 = i\omega\rho_0 \tag{27-38}$$

y demuestra en forma explícita que las distribuciones de carga y corriente no son independientes. Se encuentra ahora que, según (1-123), $(\mathbf{J}_0\cdot\nabla')\mathbf{r}'=\mathbf{J}_0$, de manera que cuando se aplica (1-131) a la región fuente queda

$$\oint_{S'}\mathbf{r}'(\mathbf{J}_0\cdot d\mathbf{a}') = \int_{V'}\left[\mathbf{J}_0+\mathbf{r}'(\nabla'\cdot\mathbf{J}_0)\right]d\tau' = 0 \tag{27-39}$$

puesto que las corrientes $\mathbf{J}_0$ son iguales a cero en la superficie limitante S'. Por tanto, si se utiliza también (27-38), se puede observar que

$$\int_{V'}\mathbf{J}_0\,d\tau' = -\int_{V'}\mathbf{r}'(\nabla'\cdot\mathbf{J}_0)\,d\tau' = -i\omega\int_{V'}\rho_0(\mathbf{r}')\mathbf{r}'\,d\tau' = -i\omega\mathbf{p}_0 \tag{27-40}$$

donde $\mathbf{p}_0$ es el momento dipolar eléctrico (complejo) de la amplitud de la distribución de carga, según (8-22). Por lo tanto, (27-35) representa en realidad un campo electromagnético producido por un momento dipolar eléctrico que cambia, pudiendo entonces cambiarse el índice de $\mathbf{A}_1$ para expresarlo como

$$\mathbf{A}_{ed} = -\frac{i\mu_0\omega\mathbf{p}_0}{4\pi r}e^{i(kr-\omega t)} \tag{27-41}$$

La integral que aparece en (27-36) es exactamente lo que se denominó $\mathfrak{D}$ en (19-7). Como antes, resulta de utilidad expresar el integrando como la suma de partes simétricas y antisimétricas dividiendo dicho integrando en dos partes iguales y sumándole y restándole una cantidad "adecuada." Así se obtiene que

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0 &= \tfrac{1}{2}\left[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0-(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}_0)\mathbf{r}'\right]+\tfrac{1}{2}\left[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0+(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}_0)\mathbf{r}'\right]\\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}'\times\mathbf{J}_0)\times\hat{\mathbf{r}}+\tfrac{1}{2}\left[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0+(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}_0)\mathbf{r}'\right]\end{aligned} \tag{27-42}$$

de acuerdo con (1-30) y (1-23). Si se sustituye esto en (27-36) se encuentra que $\mathbf{A}_{II}$ puede expresarse como la suma

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{II} &= \frac{\mu_0(1-ikr)e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r^2}\left[\frac{1}{2}\int_{V'}\mathbf{r}'\times\mathbf{J}_0\,d\tau'\right]\times\hat{\mathbf{r}}\\ &\quad+\frac{\mu_0(1-ikr)e^{i(kr-\omega t)}}{8\pi r^2}\left\{\int_{V'}\left[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0+(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}_0)\mathbf{r}'\right]d\tau'\right\}\end{aligned} \tag{27-43}$$

Si se compara la cantidad entre corchetes del primer término de (27-43) con (19-20), se podrá observar que es justamente el momento dipolar magnético $\mathbf{m}_0$ de la distribución de amplitudes de corriente, de manera que se puede expresar todo este primer término como

$$\mathbf{A}_{md} = \frac{\mu_0(1-ikr)(\mathbf{m}_0\times\hat{\mathbf{r}})}{4\pi r^2}e^{i(kr-\omega t)} \tag{27-44}$$

La integridad restante de (27-43), como se verá en seguida, abarca el momento cuadripolar eléctrico, por lo que es deseable expresarla en función de la densidad de carga por medio de (27-38). De acuerdo con (19-11) y (1-117), se puede usar $\mathbf{J}_0 = (\mathbf{J}_0\cdot\Delta')\mathbf{r}'$ y $\hat{\mathbf{r}} = \Delta'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')$ para obtener una expresión del integrando del segundo término como

$$\begin{aligned}\left\{\left[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0\right]\cdot\nabla'\right\}\mathbf{r}'+\mathbf{r}'\left[\mathbf{J}_0\cdot\nabla'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\right] &= \left\{\left[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0\right]\cdot\nabla'\right\}\mathbf{r}'+\mathbf{r}'\left\{\nabla'\cdot\left[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{J}_0\right]\right\}\\ &\quad-\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')(\nabla'\cdot\mathbf{J}_0)\end{aligned}$$

que, al integrarse sobre V' y utilizar (1-131) y (27-38), la segunda integral se vuelve

$$\oint_{S'}\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')(\mathbf{J}_0\cdot d\mathbf{a}')-\int_{V'}\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')(\nabla'\cdot\mathbf{J}_0)d\tau' = -i\omega\int_{V'}\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\rho_0(\mathbf{r}')d\tau' \tag{27-45}$$

puesto que la integral de superficie se vuelve a anular como en (27-39). Sustituyendo esto en la segunda parte de (27-43) se encuentra que

$$\mathbf{A}_{eq} = -\frac{i\mu_0\omega(1-ikr)e^{i(kr-\omega t)}}{8\pi r^2}\int_{V'}\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\rho_0(\mathbf{r}')d\tau' \tag{27-46}$$

de modo que también se puede expresar $\mathbf{A}_{II} = \mathbf{A}_{md} + \mathbf{A}_{eq}$. Se puede observar que la integral de (27-46) involucra segundos momentos de la amplitud de densidad de carga y está en consecuencia relacionada con su momento cuadripolar eléctrico que se estudió en detalle por primera vez enseguida de (8-22). Se puede ya escribir este resultado de una manera mucho más fácil de reconocer;

Dado que $\mathbf{B}$ se obtendrá por diferenciación *vía* $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{eq}$, se puede añadir una constante a la componente $\hat{\mathbf{r}}$ de $\mathbf{A}_{eq}$ sin afectar los campos, de acuerdo con (1-104). Por tanto, se añade

$$-\int_{V'} \tfrac{1}{3} r'^2 \hat{\mathbf{r}} \rho_0(\mathbf{r}')\, d\tau'$$

a la integral que aparece en (27-46), lo que la hace convertirse en

$$\tfrac{1}{3}\int_{V'} \left[3\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') - r'^2 \hat{\mathbf{r}} \right] \rho_0(\mathbf{r}')\, d\tau' = \tfrac{1}{3}\mathbf{Q} \qquad (27\text{-}47)$$

donde $\mathbf{Q}$ se define como el vector que es igual a la integral. Conviene recordar que, según (8-32), las componentes del tensor del momento cuadripolar $Q_{\alpha\beta}$ para una densidad de carga ρ_0 $(\mathbf{r}')$ están dadas por

$$Q_{\alpha\beta} = \int_{V'} (3\alpha'\beta' - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho_0(\mathbf{r}')\, d\tau' = \int_{V'} (3r_\alpha' r_\beta' - r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho_0(\mathbf{r}')\, d\tau' \qquad (27\text{-}48)$$

siendo α y β en forma independiente las coordenadas rectangulares x, y, z. (Se utilizan ahora α y β como ímdices y también se expresan las componentes de $\mathbf{r}'$ como $r\alpha'$ a fin de evitar confusiones de notación). Se puede también expresar $\hat{\mathbf{r}}$ en función de sus componentes rectangulares (cosenos directores) como $\mathbf{r} = l_x \hat{\mathbf{x}} + l_y \hat{\mathbf{y}} + l_z \hat{\mathbf{z}}$. Se considera ahora la suma

$$\sum_{\alpha = x,y,z} l_\alpha Q_{\alpha\beta} = \int_{V'} \sum_{\alpha = x,y,z} (3 l_\alpha r_\alpha' r_\beta' - l_\alpha r'^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho_0\, d\tau'$$

$$= \int_{V'} \left[3 r_\beta' (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') - r'^2 l_\beta \right] \rho_0\, d\tau' = Q_\beta$$

donde se ha utilizado (8-27). Las componentes del vector $\mathbf{Q}$ están dadas por lo tanto, por

$$Q_\beta = \sum_{\alpha = x,y,z} l_\alpha Q_{\alpha\beta} \qquad (\beta = x, y, z) \qquad (27\text{-}49)$$

y puede calcularse una vez que sean conocidas las componentes del tensor del momento cuadripolar de ρ_0 y que se haya definido la dirección de $\hat{\mathbf{r}}$. Una vez sabiendo cómo calcular $\mathbf{Q}$, se pueden combinar (27-47) y (27-46) para obtener

$$\mathbf{A}_{eq} = -\frac{i\mu_0 \omega (1 - ikr)\mathbf{Q}}{24\pi r^2} e^{i(kr - \omega t)} \qquad (27\text{-}50)$$

Como puede inferirse al comparar (27-37) con la última integral de (19-4), el término $\mathbf{A}_{III}$ que queda en el desarrollo incluye momentos de orden superior de las distribuciones

de carga y corriente, tales como el momento cuadripolar magnético. Puesto que ni siquiera para el caso estático se estudiaron éstos en detalle, no se toma aquí tampoco en consideración a $\mathbf{A}_{III}$, sino que simplemente se expresa el potencial vectorial como la suma

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{ed}+\mathbf{A}_{md}+\mathbf{A}_{eq} \tag{27-51}$$

según está dada por (27-41), (27-44) y (27-50). Resulta conveniente estudiar por separado los campos electromagnéticos que resultan de estos términos. Al hacerlo en las siguientes secciones, se encontrará que resultan campos que corresponden a ondas que se alejan y que poseen valores diferentes de cero para el promedio en tiempo del vector de Poynting, de modo que se puede decir que la fuente está "radiando". A estos campos se les suele llamar radiación del dipodo eléctrico, del dipolo magnético y del cuadripolo eléctrico, respectivamente. En algunos otros campos de la física, en especial en física nuclear, a estos campos se les suele designar como las radiaciones El , Mi y E2.

27-3 Radiación del dipolo eléctrico

Se desea considerar el campo descrito por $\mathbf{A}_{ed}$. Resulta mejor utilizar coordenadas esféricas por lo que para ser específicas, se toma el momento dipolar a lo largo del eje polar (eje z). Así, según (1-94), se puede escribir que $\mathbf{p}_0=p_0\hat{\mathbf{z}}=p_0(\cos\theta\ \hat{\mathbf{r}}-\operatorname{sen}\theta\hat{\theta})$, con lc que (27-41) se vuelve

$$\mathbf{A}_{ed}=-\frac{i\mu_0\omega p_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}(\cos\theta\hat{\mathbf{r}}-\operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{27-52}$$

lo que demuestra en forma explícita que, puesto que $\mathbf{A}_{ed}$ es paralelo a $\mathbf{p}_0$, solamente tiene componentes r y θ, siendo independiente de φ,

La inducción magnética se encuentra a partir de (27-4) y (1-104) y resulta

$$\mathbf{B}=-\frac{\mu_0 k^2\omega p_0}{4\pi}\left[\frac{1}{kr}+\frac{i}{(kr)^2}\right]\operatorname{sen}\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{27-53}$$

Al combinar esto con (27-27) se obtiene el campo eléctrico como

$$\mathbf{E}=-\frac{k^3p_0}{4\pi\epsilon_0}\left\{\left[\frac{2i}{(kr)^2}-\frac{2}{(kr)^3}\right]\cos\theta\hat{\mathbf{r}}+\left[\frac{1}{kr}+\frac{i}{(kr)^2}-\frac{1}{(kr)^3}\right]\operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}e^{i(kr-\omega t)} \tag{27-54}$$

Estos campos son un poco complicados; ambos tienen la forma de ondas que se alejan a una velocidad c de la fuente situada en el origen. Las amplitudes de las diversas componentes dependen de r de maneras diversas. El campo eléctrico tiene componentes $\hat{\mathbf{r}}$ y θ, y cada una de ellas tiene una dependencia distinta respecto del ángulo y de la distancia a la fuente. Por lo tanto, $\mathbf{E}$ no es proporcional a $\hat{\mathbf{z}}=\cos\theta\ \hat{\mathbf{r}}-\operatorname{sen}\theta\hat{\theta}$ y, en consecuencia, tampoco es paralelo al dipolo $\mathbf{p}_0$, aun cuando está sobre el plano definido por $\mathbf{p}_0$ y $\hat{\mathbf{r}}$. Dado que $\mathbf{B}$ solamente tiene una componente $\hat{\varphi}$, las líneas de $\mathbf{B}$ son círculos alrede-

dor del eje z, es decir, alrededor del eje del dipolo. Además, **B** es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{p}_0$ y a **E**; por lo tanto, **B** y **E** son perpendiculares entre sí. [Desde luego, todavía se deben tomar partes reales de (27-53) y (27-54) para obtener los campos físicos].

Aunque estos resultados son exactos, resulta conveniente. y además es costumbre considerar qué pasa con ellos en dos casos límite que corresponden a si el observador se encuentra cerca de la fuente o muy alejado de ella, a escala de la longitud de onda. Si $r \ll \lambda$, de tal forma que $kr \ll 1$, se dice que se trata de la "zona cercana", mientras que si $r \gg \lambda$ ($kr \gg 1$) se trata de la zona "lejana" o "zona de radiación"; el caso en que $kr \approx 1$ corresponde a la "zona intermedia" o "zona de inducción", y en ella se deben utilizar las expresiones completas de **E** y **B**. Los dos casos extremos se consideran por separado.

I. Zona cercana

Dado que aquí $kr \ll 1$, se puede tomar $e^{ikr} \simeq 1$. Además, puesto que todos los términos Kr de las amplitudes aparecen en los denominadores, la potencia más alta de kr dará el término preponderante. Así, de (27-53) se desprende que

$$\mathbf{E}_N \simeq \frac{p_0 e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{27-55}$$

$$\mathbf{B}_N \simeq -\frac{i\mu_0\omega p_0 e^{-i\omega t}}{4\pi r^2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{27-56}$$

Es posible expresar éstas de una manera todavía más clara si se introduce el momento dipolar, **p**, que está dado por

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} = p_0 e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{z}} \tag{27-57}$$

obteniéndose entonces que

$$\mathbf{E}_N = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) \tag{27-58}$$

$$\mathbf{B}_N = \frac{\mu_0 \operatorname{sen}\theta}{4\pi r^2}\frac{dp}{dt}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)\times\hat{\mathbf{r}} \tag{27-59}$$

usando (27-24) y $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} = \operatorname{sen}\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, según (1-94) y (1-92). Al comparar (27-58) con (8-50) se puede observar que $\mathbf{E}_N$ tiene exactamente la misma forma que un campo eléctrico dipolar producido por un momento dipolar p situado en el origen. Desde luego, en este caso el dipolo oscila en el tiempo, pero el punto de campo se encuentra tan cerca de él que los efectos de retardo son despreciables y el campo eléctrico sigue al momento dipolar en el tiempo como si los efectos se propagasen instantáneamente.

Si se comparan ahora (27-59) y (14-6), se observa que $\mathbf{B}_N$ tiene la misma forma que la inducción estática producida por un elemento de corriente $I'\,ds = d\mathbf{p}/dt$. Esto concuerda también con la expresión del potencial vectorial, puesto que usando (27-57) y $kr \ll 1$, se puede expresar (27-52) como

$$\mathbf{A}_{ed\,N} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{27-60}$$

que corresponde de nuevo a un elemento de corriente $d\mathbf{p}/dt$, según se desprende de (16-10).

Este resultado que enuncia que un momento dipolar oscilante es equivalente a un elemento de corriente es fácil de comprender si se hace referencia al caso específico del prototipo de un dipolo eléctrico formado por dos cargas q iguales u opuestas separadas por una distancia pequeña $d\mathbf{s}'$. Como se vio en (8-44), el momento dipolar estará dado por $\mathbf{p} = qd\mathbf{s}'$. Si las cargas varían periódicamente, se creará una corriente $I' = dq/dt$ ente los extremos de $d\mathbf{s}'$, por lo que

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{s}' = I' d\mathbf{s}' \tag{27-61}$$

de acuerdo con lo anterior. Esto concuerda también con la suposición original de que las dimensiones de la fuente son pequeñas en comparación con una longitud de onda, es decir, $ds' \ll \lambda$ en este caso, según lo expuesto en el párrafo que sigue a (27-30). En estas circunstancias, resulta apropiado suponer que la corriente I' es uniforme en toda la longitud del dipolo.

II. Zona de radiación

Aquí se toma $kr \gg 1$, por lo que ya no se puede pensar que $e^{ikr} \simeq 1$. En este caso los términos predominantes en (27-54) y (27-53) son los que tienen la menor potencia de kr en el denominador, con lo que se pueden obtener las siguientes aproximaciones:

$$\mathbf{E}_R \simeq -\frac{k^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 r} \operatorname{sen} \theta e^{i(kr-\omega t)} \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{27-62}$$

$$\mathbf{B}_R \simeq -\frac{\mu_0 k \omega p_0}{4\pi r} \operatorname{sen} \theta e^{i(kr-\omega t)} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{27-63}$$

Ambos campos poseen amplitudes que varían únicamente con $1/r$, pero manteniendo la misma dependencia con respecto a sen θ. Además, cada uno de ellos es perpendicular a la dirección de propagación que apunta hacia el punto de campo, dada por $\hat{\mathbf{r}}$, y son también perpendiculares entre sí. En otras palabras, a distancias grandes ambos campos se vuelven *ondas transversales*. Dado que $\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta}$, se puede observar que estos campos se relacionan enrre sí por medio de

$$\mathbf{B}_R = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_R \tag{27-64}$$

habiéndose utilizado (27-21) y $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$. Al comparar esto con (24-33), recordando también que se trata de una región al vacío y que $\hat{\mathbf{r}}$ es la dirección de propagación, se observa que (27-64) ès exactamente la relación entre los campos característica de una *onda plana en el espacio libre*. Esa relación se ilustra en la figura 27-2, que muestra los campos en un momento dado.

Dado que tanto $\mathbf{E}_R$ como $\mathbf{B}_R$ son proporcionales al sen θ, ambos son iguales a cero en la dirección del dipolo $\mathbf{p}_0$ y tienen su valor máximo, para una r dada, en la dirección perpendicular al eje del dipolo.

Debido a la relación que existe entre $\mathbf{E}_R$ y $\mathbf{B}_R$, dada por (27-64) y mostrada en la figura, el vector de Poynting $\mathbf{S}$ se encuentra dirigido radialmente hacia afuera. Se puede calcular su promedio con respecto al tiempo valiéndose de (24-104):

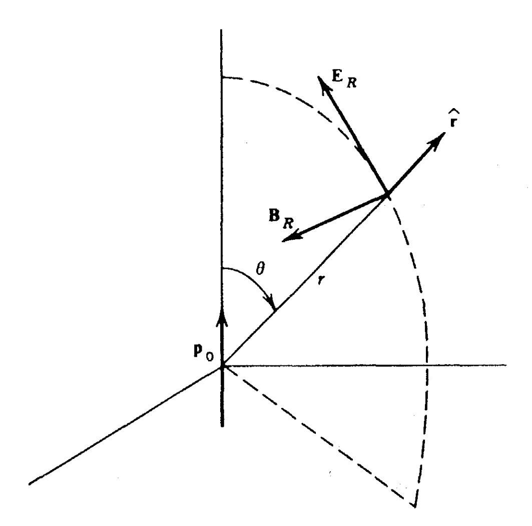


Figura 27-2 Campos en la zona de radiación de un dipolo eléctrico oscilante, en un instante dado.

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_R \times \mathbf{B}_R^*) = \mathbb{S}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 \omega^4 |p_0|^2}{32\pi^2 c r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \hat{\mathbf{r}} \qquad (27\text{-}65)$$

Dado que es positivo, existe un flujo de energía hacia afuera del dipolo; de ahí lo apropiado del nombre "zona de radiación". Esta energía debe ser suministrada por cualquiera que sea la fuente que se utilice para hacer que el dipolo se mantenga oscilando con amplitud constante. Se observa que la magnitud es proporcional a $1/r^2$, que no es sino la ya familiar ley del inverso del cuadrado para la intensidad de la radiación. (Esto ocurre porque los campos individuales varían como $1/r$ en esta región). Se observa también que $\mathbb{S}$ varía con el ángulo según $\operatorname{sen}^2 \theta$; esto se ilustra en la figura 27-3, que muestra $\mathbb{S}$ en función de θ para un valor dado de r. (Dado que $\mathbb{S}$ es independiente de φ, la figura se puede rotar con respecto al eje del dipolo para obtener la superficie que representa la intensidad de la radiación en función de la dirección de propagación). Por último, se observa que $\mathbb{S}$

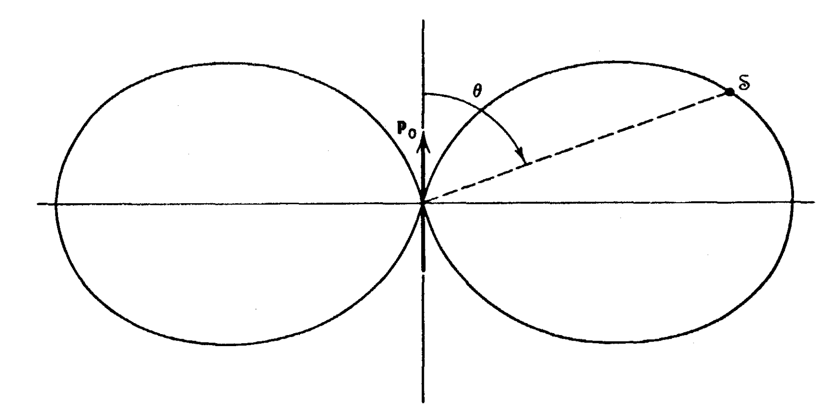


Figura 27-3 Magnitud del vector de Poynting como función del ángulo, para la radiación del dipolo eléctrico.

es proporcional al cuadrado absoluto del momento dipolar y a la cuarta potencia de la frecuencia; por lo tanto, manteniendo todo lo demás igual, resulta tanto más fácil radiar energía cuanto mayor es la frecuencia.

Si se integra (27-65) sobre una esfera de radio r, se encuentra la rapidez total a la que el dipolo irradia energía, es decir, la potencia $\mathcal{P}$. Utilizando (27-65) junto con (1-100), se obtiene

$$\mathcal{P} = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbb{S} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\mu_0 \omega^4 |p_0|^2}{12\pi c} \tag{27-66}$$

Se han calculado estos resultados utilizando los valores aproximados de los campos en la zona de radiación. Sin embargo, desde el punto de vista físico resulta evidente que no pueden dejar de existir contribuciones a $\langle \mathbf{S} \rangle$ de los términos que decaen con potencias más altas de r, puesto que si existen en las zonas cercana o intermedia tendrían que estar presentes también en esta zona alejada de la fuente porque no existe materia en la región de en medio que pudiera absorber estas contribuciones. Esto se puede comprobar también en forma directa. Si se utilizan las expresiones completas (27-53) y (27-54) para calcular $\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*$ y se omiten las diversas constantes, se encuentra que

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \sim \left[\frac{1}{(kr)^2} + \frac{i}{(kr)^5} \right] \operatorname{sen}^2\theta \hat{\mathbf{r}} - \left[\frac{i}{(kr)^3} + \frac{i}{(kr)^5} \right] \operatorname{sen} 2\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{27-67}$$

Dado que únicamente la parte real de $\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*$ contribuye al promedio temporal del flujo de energía, se puede ver que $Re\,(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \sim \operatorname{sen}^2 \theta\, \hat{\mathbf{r}}/(kr)^2$, que solamente incluye los términos en $1/kr$ de los campos, es decir, únicamente la contribución de la zona de radiación. El resto de los términos de (27-67) son imaginarios. Las otras componentes de los campos físicos sí contribuyen al valor instantáneo de $\mathbf{S}$, pero dan como resultado partes que fluyen en forma alternada hacia la fuente y alejándose de la fuente, así como en la dirección θ, y que en promedio son iguales a cero.

Como se hizo notar antes, la energía que aparece como radiación debe ser suministrada por la fuente externa que hace que el dipolo oscile. Por lo tanto, desde el punto de vista de esta fuente externa, el dipolo actúa como un elemento disipador muy a la manera en que una resistencia disipa en calor la energía electromagnética, como se vio en la sección 12-4. Resulta conveniente describir un sistema radiante en función de una resistencia equivalente o "resistencia de radiación", $\mathcal{R}$. En el ejercicio 12-13 se vio que la rapidez total a la que se produce calor en un resistor $\mathcal{R}$ es $\mathcal{R}I^2$. Si ahora la corriente oscila con el tiempo, esto se vuelve $\mathcal{R}|I_0|^2 \cos^2(\omega t + \vartheta)$, y al calcular su promedio con respecto al tiempo se encuentra, por medio de (24-102), que el promedio temporal de la rapidez de disipación de energía es $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\mathcal{R}|I_0|^2 = \mathcal{R}I_{rms}^2$, en función de la magnitud de la corriente pico, $|I_0|$, o de su valor "raíz cuadrático medio", I_{rms}. Por lo tanto, la resistencia se puede expresar en función de la pérdida de potencia como

$$\mathcal{R} = \frac{2\mathcal{P}}{|I_0|^2} = \frac{\mathcal{P}}{I_{rms}^2} \tag{27-68}$$

Para poder aplicar estas ideas a un dipolo eléctrico radiante, se suele utilizar el modelo prototipo de dos cargas separadas por una distancia ds'. Al combinar (27-57) y (27-61) se encuentra que $I'ds' = I_0 e^{-i\omega t} ds' = -i\omega \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$, de manera que $|\mathbf{p}_0|^2 = |I_0|^2 (ds')^2/\omega^2$.

Al sustituir esta equivalencia en (27-66) y utilizar (27-68) para definir la resistencia de radiación, se encuentra que en este caso está dada por

$$\mathcal{R}_{ed} = \frac{\mu_0\omega^2(ds')^2}{6\pi c} = \frac{2}{3}\pi Z_0\left(\frac{ds'}{\lambda}\right)^2 \tag{27-69}$$

según (27-21) y (24-95). [El valor del factor numérico en (27-69) es de 790 ohms]. La resistencia de radiación puede que de (27-68) se desprende que cuanto más grande sea el valor de $\mathcal{R}$ mayor será la potencia radiada para una corriente pico dada. (Sin embargo, debe recordarse que se ha supuesto que $ds' << \lambda$).

Ejemplo

Carga puntual acelerada. De (8-19) y del ejercicio 8-2 se sabe que una carga puntual aislada posee un momento dipolar con respecto a un origen arbitrario, que está dado por $\mathbf{p} = q\mathbf{r}'$. Si la posición de la carga oscila en el tiempo, se tendrá que $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$. Para utilizar los resultados anteriores, supóngase que la carga se encuentra sobre el eje z, de modo que $p = qz' = qz_0 e^{-i\omega t} = p_0 e^{-i\omega t}$. Resulta más conveniênte en este caso manejar cantidades instantáneas en lugar de promedios con respecto al tịempo. Tanto (27-62) como (27-63) son proporcionales a $\omega^2 p_0$, lo que puede expresarse de otra manera. La aceleración de la carga es $a = d^2z'/dt^2 = -\omega^2 z'$, de modo que se puede escribir $p = -(qa/\omega^2)$. Ahora $p_0 e^{i(kr - \omega t)} = p_0 e^{-i\omega[t-(r/c)]} = [p] = -(q/\omega^2)[a]$, donde tanto $[p]$ como $[a]$ representan estas cantidades evaluadas en el tiempo retardado. Al hacer estas sustituciones en (27-62) y (27-64) y después de utilizar (27-21), se encuentra que puede escribirse

$$\mathbf{E}_R = \frac{q[a]\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \qquad \mathbf{B}_R = \frac{q[a]\operatorname{sen}\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \tag{27-70}$$

de manera que el vector de Poynting instantáneo $\mathbf{S} = (\mathbf{E}_R \times \mathbf{B}_R)/\mu_0$ es

$$\mathbf{S} = \frac{q^2[a]^2\operatorname{sen}^2\theta\,\hat{\mathbf{r}}}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 r^2} \tag{27-71}$$

Integrando esto sobre una esfera de radio r como en (27-66), se encuentra que la rapidez instantánea total de radiación debida a esta carga acelerada es

$$\mathcal{P}_{\text{instan}} = \frac{q^2[a]^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \tag{27-72}$$

Aunque estos resultados se obtuvieron para el caso especial de una carga que oscila armónicamente, su forma final ya no incluye explícitamente esta suposición y, de hecho, se puede demostrar que son correctos para una carga puntual que se mueve lentamente, pero cuyo movimiento es arbitrario en los demás aspectos. La expresión (27-72) se encuentra muy frecuentemente y muestra en forma muy clara que una carga en movimiento no radiará a menos que posea una aceleración, calculándose por medio de (27-72) la rapidez instantánea total a la que lo hace.

27-4 Radiación del dipolo magnético

Supóngase que el momento del dipolo magnético se encuentra a lo largo del eje z, de modo que $\mathbf{m}_0 = m_0\hat{\mathbf{z}}$. Entonces puede expresarse (27-44) como

$$\mathbf{A}_{\rm md}=\frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^2}(1-ikr)e^{i(kr-\omega t)}\,\text{sen}\,\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{27-73}$$

por medio de (1-94) y (1-92). Se puede proceder ahora de exactamente la misma manera que antes, para encontrar los campos a partir de (27-4) y (27-27); los resultados son

$$\mathbf{B}=-\frac{k^3 m_0}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left\{\left[\frac{2i}{(kr)^2}-\frac{2}{(kr)^3}\right]\cos\theta\hat{\mathbf{r}}+\left[\frac{1}{kr}+\frac{i}{(kr)^2}-\frac{1}{(kr)^3}\right]\text{sen}\,\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}e^{i(kr-\omega t)} \tag{27-74}$$

$$\mathbf{E}=\frac{\mu_0 k^2\omega m_0}{4\pi}\left[\frac{1}{kr}+\frac{i}{(kr)^2}\right]\text{sen}\,\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{27-75}$$

Si se comparan éstos ahora con los campos del dipolo eléctrico (27-53) y (27-54), se puede observar que la dependencia con respecto a r y θ es la misma en ambos casos, pero que el campo eléctrico y la inducción magnética se han "intercambiado" en cierto sentido. La relación que existe entre los vectores de campo es

$$\mathbf{B}_{\rm md}=\frac{m_0}{c^2 p_0}\mathbf{E}_{\rm ed}\qquad \mathbf{E}_{\rm md}=-\frac{m_0}{p_0}\mathbf{B}_{\rm ed} \tag{27-76}$$

Puesto de otra manera, los campos de una clase se transformarán en los de la otra si se hacen los remplazos

$$p_0\to\frac{m_0}{c}\qquad \mathbf{E}\to c\mathbf{B}\qquad \mathbf{B}\to-\frac{\mathbf{E}}{c} \tag{27-77}$$

[En los últimos dos remplazos se puede reconocer un ejemplo de la propiedad de dualidad de los campos electromagnéticos, que se encontró en el ejercicio 21-11, puesto que corresponden a (21-77) con $\alpha=-90°$ y $C=1$. Dado que (21-27) se derivó para una región libre de fuentes, no fue posible predecir el remplazo adecuado para p_0].

Las líneas de $\mathbf{E}$ dadas por (27-75) son círculos alrededor del eje polar que corresponde a la dirección de $\mathbf{m}_0$, por lo que $\mathbf{E}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{B}$ y a $\mathbf{m}_0$.

En la zona de radiación los campos vuelven a ser transversales a la dirección de la propagación y son

$$\mathbf{B}_R=-\frac{k^2 m_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\,\text{sen}\,\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{27-78}$$

$$\mathbf{E}_R=\frac{\mu_0 k\omega m_0}{4\pi r}\,\text{sen}\,\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{27-79}$$

Estas también satisfacen (27-64) que es compatible con (27-77) porque se vuelve $-\mathbf{E}_R/c = \hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}_R$, y esto conduce de nuevo a (27-64) si se utilizan (1-30) y $\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{B}_R=0$. La relación entre estos campos se muestra para un tiempo en particular en la figura 27-4. Cuando se

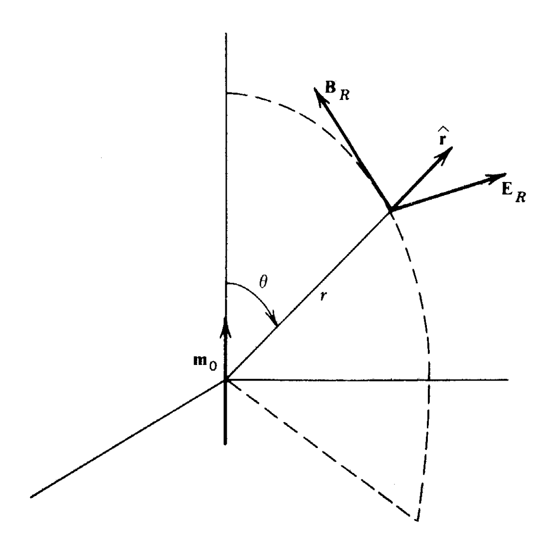


Figura 27-4 Campos en la zona de radiación de un dipolo magnético oscilante, en un instante dado.

compara esta figura con la figura 27-2 se observa que la primera corresponde a una rotación de -90° con respecto a la dirección $\hat{\mathbf{r}}$, como está implicado en (27-77).

El vector de Poynting promedio en tiempo y el flujo total de potencia radiada se pueden calcular fácilmente a partir de (27-78) y (27-79), resultando que

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \mathcal{S}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 \omega^4 |m_0|^2}{32\pi^2 c^3 r^2} \operatorname{sen}^2\theta\,\hat{\mathbf{r}} \tag{27-80}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0 \omega^4 |m_0|^2}{12\pi c^3} \tag{27-81}$$

lo que pudo haberse obtenido igualmente bien a partir de (27-65) y (27-66) al hacer el remplazo de p_0 por m_0/c. Por lo tanto, la radiación del dipolo magnético y al del dipolo eléctrico son parecidas en cuanto a que tienen la misma proporcionalidad con la cuarta potencia de la frecuencia. Tienen también la misma dependencia angular dada por $\operatorname{sen}^2 \theta$, de manera que la figura 27-3 se aplica a este caso también (remplazando $\mathbf{p}_0$ por $\mathbf{m}_0$).

Ejemplo

Espira de corriente. Para poder tener un caso específico, considérese el prototipo de un dipolo magnético, es decir, la pequeña espira de corriente, circular y de radio a, cuyo momento dipolar es $\pi a^2 I$, según se vio en (19-27). Si $a \ll \lambda$ se puede pensar que I tiene el mismo valor en todos los puntos de la espira, y si I_0 es su valor pico, se tiene que $m_0 =] \pi a^2 I_0$. Al sustituir esto en (27-81) y utilizar (27-68) se encuentra que la resistencia de radiación es

$$\mathcal{R}_{\text{md}} = \frac{\pi \mu_0 \omega^4 a^4}{6c^3} = \frac{8}{3}\pi^5 Z_0 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \tag{27-82}$$

(El valor del factor numérico es 3.08×10^5 ohms). Al comparar esto con (27-69) se observa que existe una diferencia en lo que se refiere a la dependencia con respecto a la frecuencia de la resistencia de radiación en cada uno de los dos modelos de dipolos, puesto que $R_{\mathrm{ed}} \sim \omega^2$ mientras que $R_{\mathrm{md}} \sim \omega^4$.

27-5 Radiación del cuadripolo eléctrico lineal

El potencial vectorial adecuado está dado por (27-50). Dado que la situación en la zona de radiación ($kr \gg 1$) es la de mayor interés, se ataca ésta directamente, aproximando (27-50) por medio de

$$\mathbf{A}_{\mathrm{eq}R} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \mathbf{Q}}{24\pi c r} e^{i(kr-\omega t)} \tag{27-83}$$

donde se debe recordar que $\mathbf{Q}$ es una función de la dirección de propagación dada por $\hat{\mathbf{r}}$.

Puesto que existe un inmenso número de posibilidades para $Q_{\alpha\beta}$ y, por lo tanto, para $\mathbf{Q}$, se considera únicamente un ejemplo simple pero importante de radiación del cuadripolo eléctrico – la que resulta de un cuadripolo lineal.

Ya antes se vio que si una distribución de carga posee simetría axial (rotacional) con respecto al eje z, entonces solamente existe una componente independiente del tensor del momento cuadripolar, y que los únicos valores de $Q_{\alpha\beta}$ que no se anulan están dados por (8-39) como

$$Q_{zz}{}^a = Q_0 \qquad Q_{xx}{}^a = Q_{yy}{}^a = -\tfrac{1}{2} Q_0 \tag{27-84}$$

donde se ha usado Q_0 en lugar de la anterior Q^a para guardar consistencia de notación en este capítulo. Un prototipo convencional para un caso como éste es la distribución de cargas puntuales de la figura 8-5b, que se repite en la figura 27-5. La carga $2q$ está situada en el origen mientras que las dos cargas $-q$ están sobre el eje z, cada una de ellas a una distancia a del origen. Se puede encontrar muy fácilmente a partir de la forma de carga puntual (27-48) dada en (8-26) que si $q = q_0 e^{-i\omega t}$, entonces en este caso

$$Q_0 = -4 q_0 a^2 \tag{27-85}$$

de acuerdo con el ejercicio 8-6. Si bien los resultados de esta sección son aplicables a la distribución de cargas de la figura 27-5, en realidad no están restringidos a ella, sino que se pueden utilizar para cualquier distribución de cargas axialmente simétricas descritas por (27-84). Sin embargo, resulta interesante observar que las cargas de la figura 27-5 no tienen un momento dipolar eléctrico ni tampoco pueden tener un momento dipolar magnético. Por lo tanto, la radiación de orden más bajo que pueden producir será la radiación del cuadripolo eléctrico.

Al combinar (27-84) y (27-49), se encuentran las componentes de $\mathbf{Q}$ que son $Q_\beta = \beta Q_{\beta\beta}$, de manera que $Q_x = -\tfrac{1}{2} Q_0 l_x$, $Q_y = -\tfrac{1}{2} Q_0 l_y$ y $Q_z = Q_0 l_z$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= Q_0\left(-\tfrac{1}{2} l_x \hat{\mathbf{x}} - \tfrac{1}{2} l_y \hat{\mathbf{y}} + l_z \hat{\mathbf{z}}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} Q_0\left[(3\cos^2\theta - 1)\hat{\mathbf{r}} - \tfrac{3}{2}\operatorname{sen} 2\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}\right]\end{aligned} \tag{27-86}$$

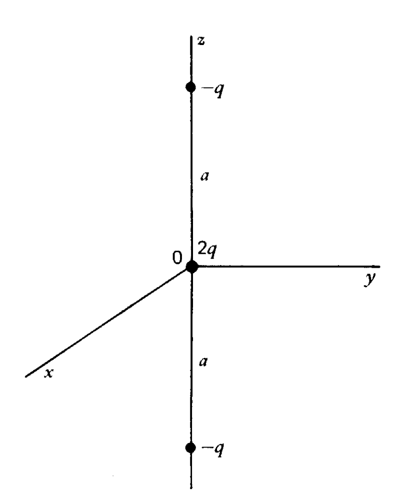


Figura 27-5 Distribución de cargas prototipo de un cuadripolo eléctrico lineal.

donde se han utilizado (1-93) y (1-94) para expresar **Q** en coordenadas esféricas. Al sustituir esto en (27-83) se obtiene el potencial vectorial en la zona de radiación para el cuadripolo lineal:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{eq}R}{}^{a} = -\frac{\mu_0\omega^2 Q_0 e^{i(kr-\omega t)}}{48\pi c r}\left[(3\cos^2\theta - 1)\hat{\mathbf{r}} - \frac{3}{2}\operatorname{sen}2\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right] \tag{27-87}$$

Se pueden ya encontrar los campos en la forma usual a partir de (27-4) y (27-27), manteniendo únicamente los términos más grandes, que son $\sim 1/r$ debido a que se está estudiando la zona de radiación, en la que $kr \gg 1$. Estos resultados son

$$\mathbf{B}_R = \frac{i\mu_0\omega^3 Q_0}{32\pi c^2 r}\operatorname{sen}2\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \tag{27-88}$$

$$\mathbf{E}_R = \frac{i\mu_0\omega^3 Q_0}{32\pi c r}\operatorname{sen}2\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{27-89}$$

los que, de nuevo, son transversales a la dirección de propagación, se encuentran relacionados entre sí por (27-64) y están descritos por una figura similar a la 27-2.

El promedio temporal del vector de Poynting resulta ser

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\operatorname{Re}(\mathbf{E}_R\times\mathbf{B}_R{}^*) = \mathbb{S}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0\omega^6|Q_0|^2}{2048\pi^2c^3r^2}\operatorname{sen}^2 2\theta\hat{\mathbf{r}} \tag{27-90}$$

que es proporcional a la sexta potencia de la frecuencia. La independencia angular de $\mathbb{S}$ está dada por $\operatorname{sen}^2 2\theta = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$ y se ilustra en la figura 27-6. El valor de $\mathbb{S}$ es igual a cero en $\theta = 0°$, $90°$ y $180°$ y tiene máximas en $\theta = 45°$ y $135°$.

Al integrar (27-90) sobre una esfera de radio r, se encuentra que la potencia radiada total es

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0\omega^6|Q_0|^2}{960\pi c^3} \tag{27-91}$$

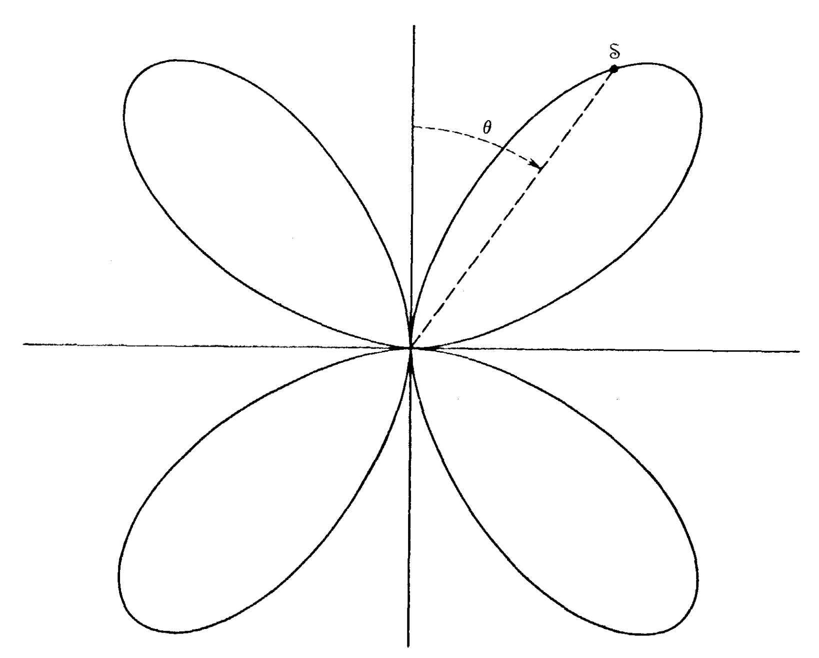


Figura 27-6 Magnitud del vector de Poyting como función del ángulo, para la radiación del cuadripolo eléctrico lineal.

27-6 Antenas

Hasta ahora se ha supuesto que las dimensiones del sistema radiante han sido pequeñas, comparadas con una longitud de onda en el espacio libre, con el fin de poder tomar a la corriente como uniforme en el sistema de estos modelos simples. En los casos prácticos, es más conveniente utilizar radiadores cuyas dimensiones sean comparables a una longitud de onda; a un sistema tal se le suele llamar *antena*. En este caso la distribución de corriente no es uniforme en toda la longitud y esto debe tomarse en consideración. Aunque el diseño de antenas es un arte en sí mismo, se pueden ilustrar los principios generales por medio de unos cuantos ejemplos.

La figura 27-7 muestra la situación básica. Se tiene un conductor recto de longitud $2l$ a lo largo del eje z. Se produce y mantiene una corriente oscilante en este conductor, generalmente por medio de conexiones desde su centro a una fuente de potencia externa. Se desean encontrar los campos en un punto P de coordenadas r y θ; se supone que P se encuentra lo suficientemente lejos, de modo que sólo se necesita manejar la zona de radiación. Dado que en (27-61) se encontró que un dipolo oscilante es equivalente a un elemento de corrientes, es natural visualizar la antena como una serie de elementos de corriente $I'(z')dz'$. Cada uno de los elementos de corriente produce un campo eléctrico $d\mathbf{E}$, y el campo eléctrico total en P será la suma de todos éstos, gracias a la propiedad de superposición de los campos electromagnéticos. En otras palabras, se trata de un fenómeno de interferencia.

Justo después de (27-68) se encontró la equivalencia $-i\omega p_0 = I_0 ds'$, de tal forma que en esta situación se hace el remplazo $p_0 = (i/\omega)\, I'\,(z')dz'$ en (27-62), y, utilizando (27-21), se obtiene

$$d\mathbf{E} = -\frac{i\mu_0\omega I'(z')dz'}{4\pi r'}\,\text{sen}\,\theta' e^{i(kr'-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\theta}}' \qquad (27\text{-}92)$$

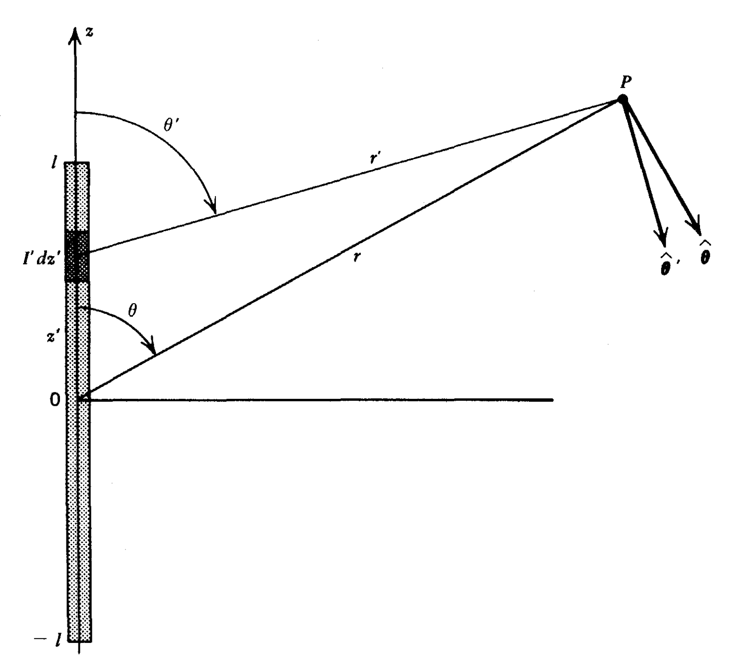


Figura 27-7 Cálculo del campo de radiación de una antena lineal.

donde

$$r' = (r^2 + z'^2 - 2rz'\cos\theta)^{1/2} \tag{27-93}$$

y θ, es el vector unitario perpendicular a $\mathbf{r}'$. El campo eléctrico total en el punto de campo se obtiene al integrar (27-92) sobre toda la antena.

Ya se ha supuesto que $\mathbf{r} >> \lambda$. Ahora se debe suponer también que la longitud total $2l << r$, de manera que $|z'| << r$. En estas cirucunstancias, se puede aproximar r, por medio de

$$r' \simeq r - z'\cos\theta \tag{27-94}$$

La amplitud de $d\mathbf{E} \sim 1/r'$ y no se cometerá un gran error si se toma aquí simplemente que $r' \approx r$; sin embargo, no es posible hacer esto en e^{ikr} porque aun los pequeños cambios en r' pueden producir grandes variaciones en el exponente. Por último, se pueden despreciar las diferencias entre todos los $\hat{\theta}'$ y $\hat{\theta}$ así como entre los θ' y θ, de manera que, de hecho, se está suponiendo que todas las contribuciones al $\mathbf{E}$ total son paralelas entre sí. Después de hacer todo esto se llega a una expresión final para el campo eléctrico total, que resulta

$$\mathbf{E} = -\frac{i\mu_0\omega \operatorname{sen}\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{4\pi r}\int_{-l}^{l} e^{-ikz'\cos\theta} I'(z')dz' \tag{27-95}$$

Una vez encontrado $\mathbf{E}$ se puede evaluar $\mathbf{B} = (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E})/c$ según (27-64) para estos campos en la zona de radiación.

No se puede seguir adelante en tanto no se tenga una distribución de amplitudes de corriente definida, $I'(z')$ a lo largo de la antena.

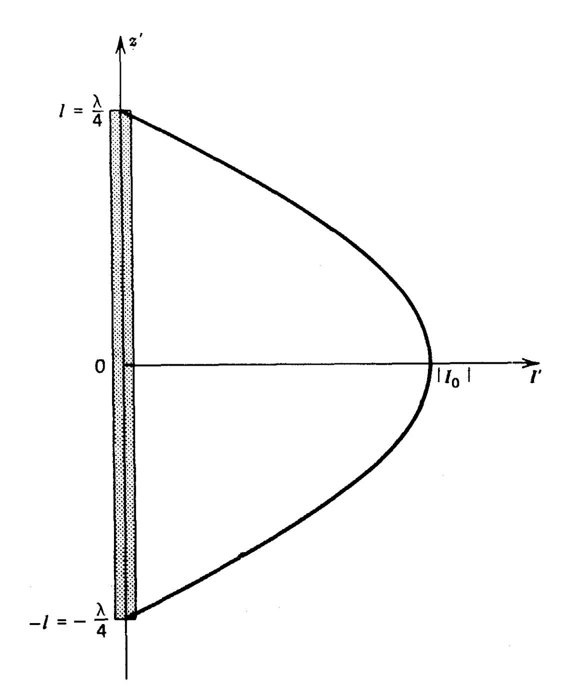


Figura 27-8 Distribución supuesta de amplitudes de corriente para una antena de media onda.

Ejemplo

Antena de media onda. Resulta claro que la corriente I' debe ser igual a cero en los extremos $z' = \pm l$ de la antena, es decir, que los extremos son nodos de corriente. Puesto de esta manera, el problema recuerda hasta cierto punto el de las condiciones de frontera para una cuerda atada rígidamente por ambos extremos. Se podría pensar entonces que si existe ya una excitación adecuada, es posible obtener distribuciones de corriente análogas al modo de oscilación de una cuerda que vibra. Recuérdese que la forma más simple es la que presenta un antinodo de desplazamiento en el centro; en ese caso, la longitud total de la cuerda es igual a la mitad de una longitud de onda de la oscilación. Por analogía, se supone una situación similar en este caso. Por lo tanto, $2l = \frac{1}{2}\lambda$, de manera que $l = \frac{1}{4}\lambda$, pudiéndose entonces expresar la distribución de amplitudes de corriente como

$$I'(z') = I_0 \cos\left(\frac{\pi z'}{2l}\right) = I_0 \cos\left(\frac{2\pi z'}{\lambda}\right) = I_0 \cos kz' \tag{27-96}$$

Esta distribución se ilustra en la figura 27-8. Los límites de integración en (27-95) son entonces $\pm \frac{1}{4}\lambda = \pm \pi/2k$. A este tipo de antena se le denomina *antena de media onda.* Puede realizarse utilizando un conductor de longitud igual a media longitud de onda y que se excita en su centro; o también se puede excitar por su extremo inferior si tiene una longitud de un cuarto de longitud de onda y es perpendicular a un gran plano conductor, tal como la Tierra o una gran placa de metal. En este último caso, las corrientes imagen en el plano proporcionan la otra mitad de la antena. En la práctica resulta que la existencia de radiación produce una distribución de corriente diferente a la muy simple que se supuso en (27-26). Sin embargo, el efecto es pequeño, por lo que no se le da aquí mayor consideración.

Si se toma como la integral de (27-95) y se sustituye (27-26) en ella, introduciendo la variable sin dimensiones $u = kz'$ y usando (24-22), se encuentra que

$$\mathcal{G} = I_0 \int_{-\pi/2k}^{\pi/2k} e^{-ikz'\cos\theta} \cos kz'\, dz'$$

$$= \frac{I_0}{k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-iu\cos\theta} \cos u\, du = \frac{I_0}{2k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [e^{iu(1-\cos\theta)} + e^{-iu(1+\cos\theta)}] du$$

$$= \frac{I_0}{k} \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\pi(1-\cos\theta)\right]}{1-\cos\theta} + \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\pi(1+\cos\theta)\right]}{1+\cos\theta} \right\}$$

$$= \frac{2cI_0}{\omega \operatorname{sen}^2\theta} \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\cos\theta\right) \tag{27-97}$$

Al sustituir esto en (27-95) se obtiene

$$\mathbf{E} = -\frac{i\mu_0 c I_0}{2\pi r \operatorname{sen}\theta} \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\cos\theta\right) e^{i(kr-\omega t)} \hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{27-98}$$

que, curiosamente, tiene una amplitud que es independientemente de la frecuencia. De (27-97) se observa que esto ocurrió porque la integración introdujo un factor $1/\omega$ que canceló la ω de (27-95). Dado que ningún elemento de la antena irradia a lo largo de su eje, es decir, para $\theta = 0$ ó π, debe esperarse que **E** desaparezca también a estos ángulos. La dependencia angular que se encontró en (27-98) se vuelve indeterminada en estos valores de θ, pero puede comprobarse muy fácilmente por medio de la regla de L'Hopital que $\mathbf{E} \to 0$ a medida que $\theta \to 0$ ó π,

El flujo de potencia está dado por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{|\mathbf{E}|^2}{2\mu_0 c} \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0 c |I_0|^2}{8\pi^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right) \hat{\mathbf{r}} \tag{27-99}$$

La distribución angular dada por $\cos^2(\frac{1}{2}\pi\cos\theta)/\operatorname{sen}^2\theta$ se muestra con una línea llena en la figura 27-9. La curva punteada muestra la distribución $\operatorname{sen}^2\theta$ característica de un solo dipolo. Las dos son cualitativamente similares, aunque se puede apreciar que la antena tiende a radiar más predominantemente en el plano horizontal.

La potencia radiada total es

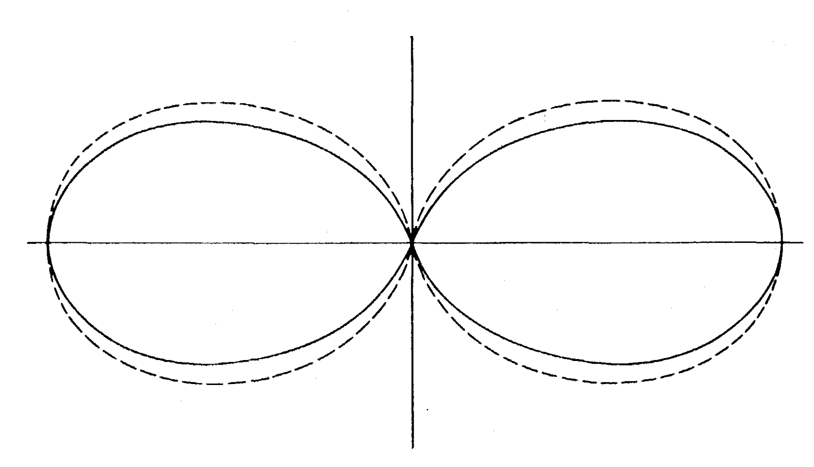


Figura 27-9 Patrón de radiación de una antena de media onda (línea llena) comparado con el de un solo dipolo (línea punteada).

$$\mathcal{P} = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 c |I_0|^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi \cos\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{27-100}$$

La integración con respecto a φ da 2π. La integral con respecto a θ no puede ser expresada en términos de las funciones elementales, pero se puede poner en la forma de funciones tabuladas si se define una nueva variable, ν, por medio de $\frac{1}{2}\pi \cos\theta = \frac{1}{2}(\pi - \nu)$ de manera que $\nu = \pi(1 - \cos\theta)$. La integral se vuelve entonces

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)d\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}v\right)dv}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos v)dv}{v(2\pi - v)}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 - \cos v)dv\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{2\pi - v}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos v)dv}{v} + \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos v)dv}{2\pi - v}\right] \tag{27-101}$$

Si se hace el cambio de variable $w = 2\pi - \nu$ en la segunda integral, se puede ver que es igual a la primera, de modo que (27-101) queda

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos v)dv}{v} = \frac{1}{2}(2.438)$$

como se puede encontrar en las tablas.[1] Al combinar todo esto resulta que (27-100) es

$$\mathcal{P} = \frac{2.438\mu_0 c|I_0|^2}{8\pi} \tag{27-102}$$

La resistencia de radiación, encontrada a partir de (27-68), es $\mathcal{R} = 2.438\mu_0 c/4\pi = 0.194 Z_0 =$ 73.1 ohms.

La dependencia angular de la potencia radiada, que se muestra en la figura 27-9 no incluye al ángulo azimutal φ; así, por ejemplo, la antena irradia igualmente en todas las direcciones horizontales. Muy a menudo resulta posible mejorar la radiación en una dirección dada por medio de los efectos de interferencia obtenidos al usar más de una antena. Tales combinaciones de antenas reciben el nombre *arreglos de antenas*. Resulta simple describir los principios generales de esto, pero puede ser muy difícil aplicarlos en detalle.

Supóngase que se tiene un número n de antenas de media onda con sus ejes paralelos a la dirección z. El campo eléctrico producido por cualquiera de ellas en un punto de campo, P, muy lejano a la antena puede tomarse como el dado por (27-98). Entonces el campo eléctrico total producido por el conjunto será una suma de términos de esta forma, es decir, que se tendrá

$$\mathbf{E} = -\frac{i\mu_0 c}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{I_{0j}}{r_j \operatorname{sen}\theta_j} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta_j\right) e^{i(kr_j - \omega t)} \hat{\boldsymbol{\theta}}_j \tag{27-103}$$

[1] M. Abramowitz e I. A. Stegun, Eds., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, Nueva York, 1965, pág. 231 y siguientes.

donde, como en la figura 27-7, r_j es la distancia de la antena j a P, θ_j y $\hat{\theta}_j$ son el ángulo y el vector unitario correspondientes y I_{0j} la corriente pico de la distribución (compleja) de corrientes. Se toma entonces un origen conveniente, por lo general cerca del conjunto de antenas, de modo que las coordenadas esféricas de P sean r, θ y φ con respecto a él. Resulta entonces posible expresar r_j y θ_j en función de r, θ, φ y la posición de la antena j con respecto al origen, muy a la manera de lo que se hizo para obtener (27-93). Si el arreglo es lo suficientemente compacto para que sus dimensiones sean pequeñas en comparación con r, entonces se puede remplazar r_j por r en el denominador de la amplitud y suponer que cada uno de los $\hat{\theta}_j$ son iguales al $\hat{\theta}$ de P, de manera que (27-103) se puede expresar como

$$\mathbf{E} \simeq -\frac{i\mu_0 c}{2\pi r} e^{i(kr-\omega t)} \hat{\boldsymbol{\theta}} \sum_{j=1}^{n} \frac{I_{0j}}{\operatorname{sen}\theta_j} \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\cos\theta_j\right) e^{ik(r_j - r)} \tag{27-104}$$

Nótese la aparición del término $e^{ik(r_j - r)}$ en la suma; este factor es muy importante en el resultado final porque, aunque $r_j - r$ sea pequeño en valor absoluto, $k(r_j - r)$ puede tener variaciones grandes, de modo que cada uno de los términos exponenciales puede tener un valor muy diferente. Las fases relativas de las distribuciones de corriente de las antenas están contenidas en los términos de amplitud I_{0j} porque éstos pueden escribirse como $|I_{0j}| e^{i\varphi_j}$, como se hizo, de manera similar, en (27-19).

En (27-104) se aprecia que aun para este caso especial existe un gran número de posibilidades. Se puede elegir libremente el número n de antenas en el arreglo, las magnitudes relativas y las fases de sus corrientes ($|I_{0j}|$ y φ_j), y las localizaciones relativas y los espaciamientos entre antenas (que aparecen en las expresiones para r_j y θ_j). Debido a la gran variedad de posibilidades específicas, no se consideran aquí los arreglos de antenas en mayor detalle, pero sí se estudian algunos casos específicos en los ejercicios.

Hasta ahora sólo se han considerado antenas en calidad de fuentes radiantes. Sin embargo, como sabe cualquier persona que posea un aparato de radio o de televisión, las antenas también se utilizan para captar las ondas electromagnéticas. (Se consideró brevemente este aspecto en el ejercicio 24-5, en el que se calculó la fem inducida por una onda plana en una pequeña espira circular.) La pregunta natural es cómo se relacionan las propiedades receptoras de una antena con sus propiedades radiantes, si es que en efecto, existe alguna relación entre ellas. La respuesta a esta cuestión se da como último tema de este capítulo.

Ejemplo

Un teorema de reciprocidad. Considérense dos longitudes, $d\mathbf{s}_1$ y $d\mathbf{s}_2$, de dos cables conductores distintos como se ilustra en la figura 27-10. Supóngase que el primero tiene una corriente oscilante, I; se desea encontrar la fem $\mathcal{E}$ producida en el otro. Si se supone que los cables están lejos entre sí, el campo eléctrico producido por el elemento $Id\mathbf{s}_1$ se puede calcular según (27-92), pero resulta más conveniente escribir esa expresión en una forma más general. Antes que nada, se retiran las primas y se remplaza $I'(z')dz'$ por Ids_1; segundo, (27-92) implica la suposición de que el dipolo está orientado a lo largo del eje z, de manera que se tiene $Id\mathbf{s}_1 = Ids_1\,\hat{\mathbf{z}}$. Se escribe ahora $\hat{\theta} = \hat{\varphi} \times \hat{\mathbf{r}} = [(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}})/\operatorname{sen}\theta] \times \hat{\mathbf{r}}$ por medio de (1-92) y (1-94), de modo que $Id\mathbf{s}_1 \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta} = I(d\mathbf{s}_1 \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}$. El campo eléctrico $d\mathbf{E}$ producido por el elemento de corriente $Id\mathbf{s}_1$ en ds_2 puede entonces escribirse como

$$d\mathbf{E} = -\frac{i\mu_0\omega[I]}{4\pi r}(d\mathbf{s}_1 \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} \tag{27-105}$$

donde $[I]$ es la corriente evaluada en el tiempo retardado. Las componentes tangenciales de este campo eléctrico son continuas a través de la superficie del cable, según (21-26), de manera que la fem inducida en $d\mathbf{s}_2$ dada por (17-7) es

$$d\mathcal{E} = d\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}_2 = -\frac{i\mu_0\omega[I]}{4\pi r}[(d\mathbf{s}_1\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}]\cdot d\mathbf{s}_2$$

$$= \frac{i\mu_0\omega[I]}{4\pi r}[(\hat{\mathbf{r}}\times d\mathbf{s}_1)\cdot(\hat{\mathbf{r}}\times d\mathbf{s}_2)] \tag{27-106}$$

según (1-29) y (1-23). Este resultado es completamente simétrico respecto a $d\mathbf{s}_1$ y $d\mathbf{s}_2$ y no se altera si el signo de $\hat{\mathbf{r}}$ cambia. Esto quiere decir que si el elemento $d\mathbf{s}_2$ condujera una corriente I, exactamente la misma fem se induciría en el elemento $d\mathbf{s}_1$. Un resultado de este tipo recibe el nombre de *teorema de reciprocidad*.

Lo que se entiende de (27-106) es que el valor de la fem inducida o "señal recibida" no depende de si el elemento $d\mathbf{s}$ se está utilizando como emisor o como receptor. Cuando se aplica a toda la antena, el teorema de reciprocidad demuestra que las características de la antena, tales como la dependencia angular, son las mismas ya sea que la antena emita o capte radiación. Por ejemplo, dado que una antena de media onda no radía en la dirección de su eje ($\theta = 0$), como se vio en (27-98), una onda electromagnética que viaje paralelamente a su eje no inducirá fem alguna en ella tampoco. Resulta claro en este caso especial esto es cierto, puesto que el campo eléctrico incidente es transversal a la dirección de propagación y será entonces normal al conductor que forma la antena. Por tanto, el campo eléctrico no tendrá componentes tangenciales a lo largo de la antena y no puede producir una fem inducida.

Ejercicios

27-1 Un cable recto infinitamente largo y muy delgado coincide con el eje z. No llega corriente para $t < 0$. En $t = 0$, se aplica una corriente I sobre toda la longitud del cable y se mantiene a este valor constante durante todo el tiempo que sigue. Para un punto a una distancia ρ del cable encontrar **A**, **B**, **E** y **S** para todo tiempo. Demostrar que los resultados obtenidos se reducen a valores sensibles a medida que $t \to \infty$. (CLave: recordar la sección 16-4).

27-2 Un sistema de cargas y corrientes ocupa un volumen fijo y finito V'. Demostrar que en general,

$$\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')d\tau' = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

donde **p** es el momento dipolar eléctrico total de la distribución.

27-3 Encontrar la magnitud del campo eléctrico en un punto sobre el plano ecuatorial situado a 10 kilómetros de un dipolo eléctrico que radía un kilowatt.

27-4 Encontrar la fracción de la energía radiada por un dipolo eléctrico, que se encuentra dentro de los $\pm 10^\circ$ del plano ecuatorial.

27-5 Suponer que p_0 es real y encontrar los campos físicos generales **E** y **B** para un dipolo eléctrico a partir de (27-53) y (27-54). Encontrar entonces **S** y demostrar que tiene componentes oscilatorias a lo largo de $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Por último, demostrar que la expresión obtenida para **S** se reduce correctamente a (27-65).

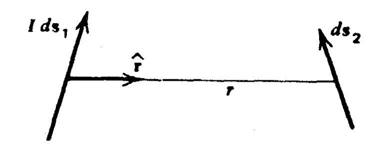


Figura 27-10 Cálculo de un teorema de reciprocidad.

27-6 Demostrar que los campos en la zona de radiación debidos a una dipolo eléctrico pueden expresarse en la forma

$$\mathbf{E}_R = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left\{\left[\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right]\times\hat{\mathbf{r}}\right\}\times\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{B}_R = \frac{\mu_0}{4\pi cr}\left[\frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}\right]\times\hat{\mathbf{r}}$$

donde la cantidad entre corchetes se evalúa en el tiempo retardado.

27-7 Demostrar que los campos en la zona de radiación de un dipolo eléctrico pueden expresarse en la forma

$$\mathbf{E}_R = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[\frac{dI'}{dt}\right](d\mathbf{s}'\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{B}_R = \frac{\mu_0}{4\pi cr}\left[\frac{dI'}{dt}\right]d\mathbf{s}'\times\hat{\mathbf{r}}$$

donde la derivada de la corriente se evalúa en el tiempo retardado.

27-8 Demostrar que el dipolo magnético produce campos en la zona de radiación que pueden expresarse en la forma

$$\mathbf{E}_R = -\frac{\mu_0}{4\pi cr}\left[\frac{d^2\mathbf{m}}{dt^2}\right]\times\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{B}_R = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r}\left\{\left[\frac{d^2\mathbf{m}}{dt^2}\right]\times\hat{\mathbf{r}}\right\}\times\hat{\mathbf{r}}$$

donde $[d^2\mathbf{m}/dt^2]$ se evalúa en el tiempo retardado.

27-9 Demostrar que todos los campos en la zona de radiación, ya sea que se deban a un dipolo eléctrico, a un dipolo magnético o a un cuadripolo eléctrico lineal se pueden expresar en función del potencial vectorial corespondiente como

$$\mathbf{E}_R = \left\{\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right]\times\hat{\mathbf{r}}\right\}\times\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{B}_R = \frac{1}{c}\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right]\times\hat{\mathbf{r}}$$

donde $[d\mathbf{A}/dt]$ se evalúa en el tiempo retardado.

27-10 Encontrar **E** y **B** en la zona cercana para el cuadripolo eléctrico lineal y comparar el resultado con (8-55).

27-11 Demostrar que los campos de radiación de una carga puntual que se mueve lentamente pueden expresarse en función del valor retardado, $[\mathbf{a}]$, de la aceleración como

$$\mathbf{E}_R = \frac{q\{[\mathbf{a}]\times\hat{\mathbf{r}}\}\times\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \qquad \mathbf{B}_R = \frac{q[\mathbf{a}]\times\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 c^3 r}$$

27-12 Un método aproximado utilizado con mucha frecuencia para derivar los campos en la *zona de radiación* de un cuadripolo eléctrico lineal se basa en el modelo que se ilustra en la figura 27-5. Esta se puede interpretar como dos dipolos dirigidos opuestamente y de amplitud $\mp q_0 a$, y situados en $z = \pm \frac{1}{2}a$ respectivamente, pudiéndose expresar el campo eléctrico total $\mathbf{E}_R$ como una superposición de campos obtenidos a partir de (27-62). Llévese a cabo tal superposición y, por medio de la aproximación $a \ll r$, demostrar que el resultado de primer orden da (27-89).

27-13 Un modelo simple para calcular los campos en la zona de radiación de un cuadripolo magnético se puede desarrollar por analogía con el ejercicio anterior. Considerar dos dipolos magnéticos de momentos dipolares iguales $\pm m_0\hat{\mathbf{z}}$ situados en $z = \pm b$; el momento dipolar magnético total de este sistema es igual a cero. Una situación tal se puede lograr con dos pequeñas espiras de corriente, cada una de ellas paralela al plano xy, y con corrientes en sentidos opuestos. La inducción total, $\mathbf{B}_R$, se puede así expresar como una superposición de campos obtenidos a partir de (27-78). Efectuar tal superposición y, por

medio de la aproximación $b << r$, encontrar los campos $\mathbf{B}_R$ (y de ahí $\mathbf{E}_R$) como resultado de primer orden.

27-14 Una antena cuya longitud total es $2l = \lambda$ recibe el nombre de antena de onda completa. Demostrar que dos posibles distribuciones de corriente que son consistentes con esto son $I' = I_0 \text{sen } Kz'$ e $I' = i_0 \text{sen } k\ |z'|$. Demostrar que son consistentes con el modelo de una antena de onda completa como equivalente a dos antenas de media onda, colineales y espaciadas por una distancia equivalente a media longitud de onda, y excitadas con fases relativas π y 0 respectivamente. Encontrar $\mathbf{E}$ y $<\mathbf{S}>$ para el primer caso y demostrar así que la distribución angular es proporcional a $[\text{sen}(\pi \cos\theta)/\text{sen }\theta]^2$. Hacer un bosquejo de esta distribución angular.

27-15 Dos antenas de media onda están en el plano yz. Son paralelas al eje z y sus centros están sobre el eje y en $y = a$ y $y = -a$. Suponer que $a << r$ y encontrar el campo eléctrico resultante en el plano xy. Suponer que las corrientes tienen amplitudes iguales. Suponer ahora que se encuentran situadas a una distancia de media longitud de onda una de la otra y considerar los dos casos en que sus corrientes (1) están en fase y (2) tienen una diferencia de fase de π. Bosquejar la magnitud del campo eléctrico en función de φ para estos dos útlimos casos.

27-16 Si la fuente tiene momento dipolar eléctrico y momento dipolar magnético, el campo eléctrico total en la zona de radiación es la suma de (27-62) y (27-69), con la posibilidad de que haya interferencia. Demostrar que, sin embargo, $<\mathbf{S}> = <\mathbf{S}>_{ed} + <\mathbf{S}>_{md}$, es decir, que la potencia radiada total no contiene términos de interferencia. ¿Seguirá siendo cierto este último resultado si se tienen tanto un momento dipolar eléctrico como un momento cuadripolar eléctrico lineal?

27-17 El vector de Hertz, π_e, se entrodujo en el ejercicio 22-7. El vector de Hertz que corresponde a un dipolo eléctrico puntual se dice que es $\pi_e = \mathbf{p}_0 e^{i(kr - \omega t)}/4\pi\epsilon_0 r$. Comprobar que esto da el potencial vectorial correcto para el dipolo eléctrico.

27-18 Considerar un sistema de partículas cargadas para las que la relación de carga a masa, q_i/m_i, es la misma. Demostrar que el momento dipolar total puede expresarse como $\mathbf{p} = (q_i/m_i)M\mathbf{R}_{cm}$, donde M es la masa total del sistema y $\mathbf{R}_{cm}$ es el vector de posición del centro de masa. Desmostrar que si no hay una fuerza externa neta sobre el sistema, no se producirá radiación de dipolo eléctrico. De manera similar, demostrar que si no existe un momento de fuerzas externo neto sobre este sistema, tampoco se producirá radiación de dipolo magnético.

Capítulo

28
Relatividad especial

La teoría de la relatividad se ocupa de manera básica de la comparación de los resultados obtenidos por diferentes observadores de un fenómeno físico, quienes se están moviendo unos respecto a otros. La teoría especial, propuesta por Einstein en 1905 y cuya forma será la única que aquí se tratará, se ocupa de observadores que se mueven a velocidad constante unos respecto a otros. El término "relatividad" se refiere a la *equivalencia* supuesta de estos observadores y sus respectivos sistemas de coordenadas, en lo que concierne a la descripción de los fenómenos. Como se verá, se pueden encontrar los orígenes de la relatividad especial en la estructura de la teoría electromagnética, por lo que resulta útil empezar con la consideración de cómo los observadores en movimiento describen ciertos efectos electromagnéticos.

28-1 Orígenes históricos de la relatividad especial

Cuando se considera, por ejemplo, el vector campo eléctrico, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, se entiende que su significado es el valor de esta cantidad en un punto $\mathbf{r}$ y en un tiempo t que se especifican con respecto a algún conjunto particular de ejes coordenados. Se supone que el observador que está determinando $\mathbf{E}$ en $\mathbf{r}$ y t está en reposo con respecto a estos ejes. En el párrafo a continuación de (1-14), se aludió de manera breve a la interrogante acerca de qué sistemas de coordenadas debía emplearse y se concluyó que era uno de los sistemas inerciales de la mecánica. Como se sabe también a partir de la mecánica, para muchos propósitos un marco de coordenadas fijo a la superficie de la Tierra es una aproximación satisfactoria a un sistema inercial.

En el estudio de la ley de Faraday para medios en movimiento, en la sección 17-3, se consideró la cuestión de cómo los observadores que se mueven con respecto a otros describirían los mismos fenómenos, y se vio que en general sus descripciones serían diferentes. En particular, se encontró (17-29) la cual establece que

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (28\text{-}1)$$

como la forma en la cual se relacionaban los campos en los dos sistemas: así, la ley de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ resultó de una forma que era independiente del movimiento del

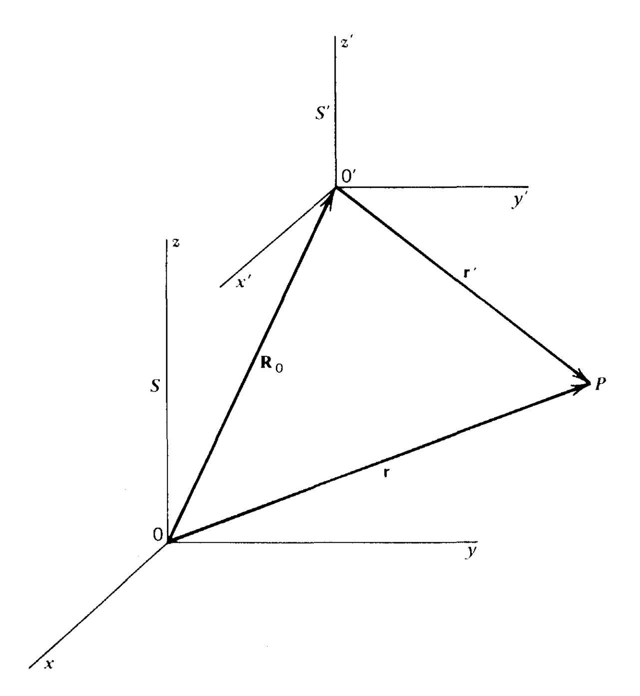


Figura 28-1 Dos sistemas rectangulares de coordenadas con ejes de coordenadas paralelas.

medio. Se vio que en ciertos casos resultaba más fácil examinar un problema yendo en el sistema móvil y ocupándose del campo eléctrico "en movimiento" $\mathbf{E}_m{}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Sin embargo, lo que resulta de mayor interés aquí es que (28-1) demuestra que estos dos observadores en movimiento relativo describen los mismos fenómenos en *diferentes formas.* Como ejemplo extremo, si $\mathbf{E} = 0$, entonces lo que para un observador aparece como una inducción magnética **B** pura, el otro la aprecia como un campo eléctrico $\mathbf{E}'$. Así, un campo eléctrico no es una propiedad absoluta de un punto y un tiempo dados, sino que también depende del movimiento del observador.

Para obtener (28-1) se hizo del hecho de que $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$, en donde las fuerzas que se están comparando se miden en dos sistemas inerciales, esto es, no existe aceleración de uno con respecto al otro ni con respecto al sistema inercial principal. Recuérdese cómo surge esta situación.

En la figura 28-1 se muestran dos sistemas de coordenadas, S y S', con ejes rectangulares que por sencillez se eligen paralelos entre sí. La posición relativa de sus orígenes está dada por $\mathbf{R}_0 = \mathbf{V}t$ por lo que sus orígenes coinciden en $t = 0$, y **V** es la velocidad *constante* de S' con respecto a S. Los vectores de posición de un punto P son **r** y $\mathbf{r}'$, por lo que

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \tag{28-2}$$

Las velocidades del punto P cuando se miden en los dos sistemas, quedan por lo tanto relacionadas por el conocido resultado

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\mathbf{R}_0}{dt} = \mathbf{v} - \mathbf{V} \tag{28-3}$$

Puesto que **V** es constante, las aceleraciones son iguales, o sea, $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}' / dt = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$. Por lo tanto, las fuerzas sobre una masa puntual m localizada en P son también iguales. $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Así la ley básica de la mecánica tiene la *misma forma* en estos dos sistemas de coordenadas quė se mueven con velocidad constante uno respecto del otro. En otras palabras, son *igualmente adecuados* como sistemas de referencia. A este resultado se le conoce como el *principio clásico* (o *galileano*) *de la relatividad*. A la fórmula (28-2) que relaciona los dos conjuntos de coordenadas y el tiempo ($t' = t$) para un "evento" dado, se le conoce como la *transformación clásica* (o *galileana*). Dado que (28-2) es perfectamente general, es más conveniente especializarla al caso en el cual el movimiento relativo ocurre a lo largo de la dirección común xx' de modo que $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$; entonces se puede escribir (28-2) en forma de componentes como

$$x' = x - Vt \qquad y' = y \quad z' = z \qquad t' = t \tag{28-4}$$

en donde, para completar el caso, se ha incluido la suposición usual de que $t' = t$. En este caso, (28-3) resulta ser simplemente

$$v_x' = v_x - V \qquad v_y' = v_y \qquad v_z' = v_z \tag{28-5}$$

Puesto que (28-1) indica que la expresión para el campo cambia dependiendo del sistema de coordenadas que se esté empleando, es natural preguntarse cómo una transformación de coordenadas como (28-4) afectará las ecuaciones que determinan los campos, esto es, las ecuaciones de Maxwell. Para estos propósitos será suficiente considerar una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, o sea, la ecuación de onda

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{28-6}$$

la cual es válida en el vacío para cualquier componente de **E** o de **B**. Se sabe que (28-6) tiene por soluciones ondas planas con velocidad c. Se demostrará que la *forma* de esta ecuación no es invariable ante la transformación galileana (28-4) pero aun así son posibles las soluciones tipo ondas planas.

Por sencillez, considérese sólo el caso en el cual la dirección de propagación de la onda está a lo largo del eje x, por lo que (28-6) se reduce a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{28-7}$$

Ahora supóngase que Ψ se escribe como una función de x' y t' por medio de (28-4), por lo que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}$$

y por lo tanto $\partial^2\Psi/\partial x^2 = \partial^2\Psi/\partial x'^2$. De manera similar se encuentra que

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-V\frac{\partial\psi}{\partial x'}+\frac{\partial\psi}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}-2V\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'}+\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}\quad .$$

Cuando estos resultados se sustituyen en (28-7) se obtiene

$$(c^2-V^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}-2V\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'}\tag{28-8}$$

la cual, según se puede apreciar con claridad, es de forma diferente de la ecuación (28-7) que se satisface para los ejes sin primas. Trátese, sin embargo, de encontrar una solución tipo onda plana para (28-8), de la forma

$$\psi(x',t')=\psi_0 e^{ik'(x'-u't')}\tag{28-9}$$

donde u es la velocidad de fase. Sustituyendo (28-9) en (28-8), se encuentra que aquélla es una solución siempre y cuando $u'=\pm c-V=\pm(c\mp V)$. En otras palabras, si la onda está viajando en la dirección x' positiva, tiene la velocidad $c-V$, mientras que su velocidad es $c+V$ cuando la propagación es en la dirección x' negativa. Por lo tanto, estos resultados son consistentes con el caso particular dado por (28-5), y para una dirección general de propagación la velocidad de la onda en el sistema con primas se puede encontrar de (28-3).

Este cálculo ha demostrado que *si* (28-4) y (28-7) son válidas de manera simultánea, entonces los efectos electromagnéticos serán por lo general diferentes cuando se les observa desde sistemas de coordenadas diferentes que se mueven con velocidad constante unos con respecto a otros y, en particular, la velocidad de una onda plana en el vacío no tendría siempre el valor c. Puesto que (28-6) es una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, estos resultados implican que *sólo* puede haber *un* marco de referencia en el que las ecuaciones de Maxwell tienen la forma en la cual se les ha escrito y en el cual las ondas electromagnéticas tienen la velocidad c. A este sistema de referencia preferente se le identificó por lo general con el sistema inercial principal de la mecánica, o sea, un sistema fijo con respecto a las "estrellas fijas". A este marco se le tuvo que dotar también de propiedades electromagnéticas para que pudiese propagar ondas; el sistema extendido recibió entonces la denominación de *éter*.

El electromagnetismo y la transformación galileana considerados en forma simultánea implican la existencia de un solo sistema de referencia en el cual son válidas las ecuaciones de Maxwell. Por otra parte, se ha visto también que la noción de un sistema preferente es ajeno a la mecánica en virtud de la existencia del principio galileano de la relatividad. No obstante, dado que el concepto de equivalencia de diferentes sistemas de coordenadas tiene tal sencillez y atractivo, se llega a considerar aún otra posibilidad, a saber, que existe un principio *común* de relatividad válido tanto para la mecánica como para el electromagnétismo. Aun cuando esté fuera el caso, el principio galileano de la relatividad basado en la transformación galileana y en la mecánica newtoniana no puede ser en realidad el apropiado. (No se está considerando la posibilidad de que las ecuaciones de Maxwell puedan requerir alteración).

La elección apropiada entre estas posibilidades se puede hacer sólo con la ayuda de los resultados experimentales. Un enfoque histórico fue suponer la validez tanto de las

ecuaciones de Maxwell como de la transformación galileana, esto es, la existencia de un marco de referencia preferente. Entonces, el marco de un laboratorio unido a la Tierra se estaría moviendo con respecto al sistema inercial principal (éter), por lo que se podrían buscar efectos asociados con este movimiento, los cuales se podrían calcular transformando las ecuaciones de Maxwell como se hizo para obtener (28-8). Se considerarán dos de estos experimentos-uno en el que no se considera la propagación de ondas y otro en el que sí.

Ejemplo

El Experimento de Trouton-Noble. En este experimento se suspendió un capacitor de placas paralelas, cargado de manera que sus placas estuvieran verticales y pudieran girar en torno a un eje paralelo a las placas y entre ellas. En razón del movimiento supuesto de la Tierra con respecto al éter, habrá un par de torsión sobre el capacitor que tiende a alinear el plano de las placas en forma paralela a su velocidad **V**. Se simplificarán un poco las cosas sustituyendo las cargas sobre las placas por dos cargas puntuales cuya separación es la misma que entre las placas, según se muestra en la figura 28-2. La fuerza magnética $\mathbf{F}_m$ sobre la carga positiva debida a la carga negativa se encuentra a partir de (14-31) y es

$$\mathbf{F}_m = -\frac{\mu_0 q^2 \mathbf{V}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{R})}{4\pi R^3} \tag{28-10}$$

y habrá una fuerza igual y opuesta sobre la carga negativa. Estas dos fuerzas producirán una torca τ sobre el sistema, dada por

$$\tau = \mathbf{R}\times\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0 q^2 (\mathbf{V}\cdot\mathbf{R})(\mathbf{V}\times\mathbf{R})}{4\pi R^3} \tag{28-11}$$

que tiene la dirección mostrada en la figura para $\theta > 90°$. (El signo de τ se invierte para $\theta < 90°$). Se ve que τ es paralela al eje y tiende a girar las cargas hasta que la línea **R** que las une es perpendicular a **V**. La magnitud de la torca es

$$\tau = \frac{\mu_0 q^2 V^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{4\pi R} = \frac{1}{2}U_e\left(\frac{V}{c}\right)^2 \operatorname{sen} 2\theta \tag{28-12}$$

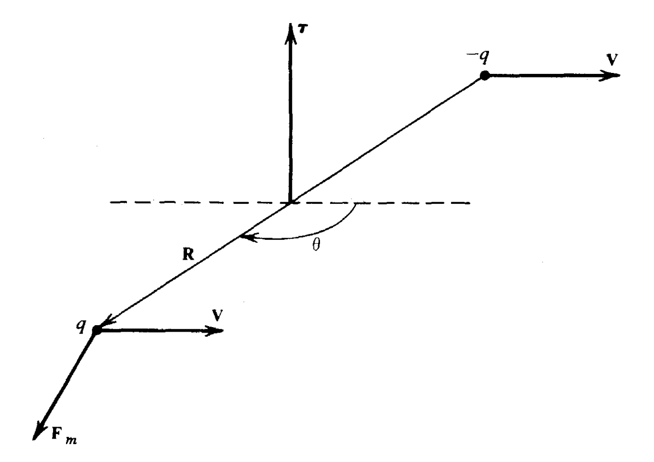


Figura 28-2. El experimento de Trouton-Noble.

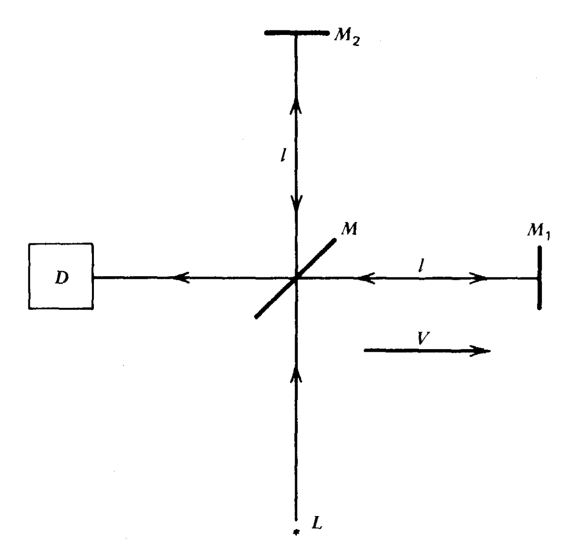


Figura 28-3 El experimento de Michelson-Morley.

donde $U_e = q^2/4\pi\epsilon_0 R$ es la magnitud de la energía electrostática del sistema, por (5-49). Se nota que el efecto medido por τ es proporcional a $(V/c)^2$, lo cual resulta ser característico de estos experimentos. (El resultado de tomar en cuenta la distribución real de las cargas sobre las placas, es duplicar el valor dado arriba para τ. Además, la fuerza electrostática de atracción es siempre a lo largo de la dirección de **R** y en consecuencia no contribuye a la torca).

Tomando a V como la velocidad de la Tierra en su órbita, la cual es de alrededor de 3×10^4 metros/segundo, se encuentra que la magnitud del par de torsión es suficientemente grande para ser observable. No obstante, aun en los experimentos efectuados en forma más cuidadosa se falló en la búsqueda de tal par de torsión, por lo que este experimento no proporciona evidencia en favor de un marco de referencia preferente para el electromagnetismo.

Ejemplo

El Experimento de Michelson-Morley. Este experimento se basó en el resultado dado por (28-9), el cual demostró, en efecto, que la fórmula de combinación de velocidades (28-3) se aplica a las ondas electromagnéticas así como a las masas puntuales. Si se interpreta a **V** como la velocidad de S' con respecto al éter, entonces (28-3) expresa que la velocidad de la onda dependerá del movimeinto del medio y será c sólo con respecto al éter. Dado que la velocidad orbital de la Tierra es tan pequeña en comparación con c, no ha sido factible efectuar una medición directa de la velocidad de onda en diferentes direcciones con respecto a la superficie terrestre con fines de comprobación (28-3). Sin embargo, es posible comparar estas direcciones y buscar este pequeño efecto empleando la onda en sí de una manera particular; esta idea fue sugerida por Maxwell, y el experimento fue originalmente llevado a cabo por Michelson y Morley en 1887.

El arreglo experimental se ilustra en la figura 28-3. La luz de la fuente L incide sobre la placa de vidrio parcialmente plateada, M, y se divide en dos haces que viajan en direcciones perpendiculares entre sí. Cada haz viaja la distancia l hacia el espejo M_1 o el M_2 y se refleja sobre su trayectoria original. Parte de la luz de cada haz pasa después a lo largo del cuarto brazo del dispositivo hacia un detector, D. Los haces se recombinan así y cualquier diferencia de fase entre ellos, resultante de sus viajes da ida y vuelta, producirá efectos de interferencia observables como una amplitud variable en el haz resultante. A

fin de calcular la diferencia de fase, es necesario encontrar los tiempos que precisan los haces para viajar a lo largo de sus respectivas trayectorias.

Si se hace que el brazo 1 esté en la dirección del movimiento del aparato, entonces, por lo anterior, la velocidad de la luz será $c - V$ sobre la trayectoria de ida y $c + V$ sobre la de regreso. Así, el tiempo que se requiere para recorrer de ida y vuelta este brazo es

$$t_1 = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2l}{c}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1} \simeq \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) \tag{28-13}$$

En la dirección perpendicular a lo largo del segundo brazo, la velocidad de la luz relativa resultante, según (28-3), es $(c^2 - V^2)^{1/2}$, y el tiempo correspondiente para el viaje completo es

$$t_2 = \frac{2l}{(c^2 - V^2)^{1/2}} \simeq \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{V^2}{2c^2}\right) \tag{28-14}$$

Así, los tiempos no son iguales y su diferencia es

$$\Delta t = t_1 - t_2 \simeq \frac{l}{c}\left(\frac{V}{c}\right)^2 \tag{28-15}$$

Tomando $l = 30$ metros y $V = 3 \times 10^4$ metros/segundo como antes, se encuentra que $\Delta\ t = 10^{-15}$ segundos. Esta pequeña diferencia en tiempo corresponde a una diferencia de fase de $\omega \Delta t = 2\pi c \Delta t/\lambda = 0.6(2\pi) = 3.8$ radianes para la luz visible con una longitud de onda de 0.5×10^{-6} metros. Esta es una diferencia de fase relativa cuya magnitud es de cierta consideración y que podría dar por resultado cambios detectables cuando el aparato se gire para intercambiar la función de los dos brazos. Sin embargo, Michelson y Morley no observaron tales efectos. Desde entonces se ha repetido con frecuencia este experimento y sus variantes, de manera particular conforme se ha dispuesto de equipo más sensible y preciso. Los resultados han sido siempre los mismos, esto es, que para las ondas electromagnéticas no existe evidencia para apoyar el empleo de (28-3), la cual resulta de una combinación de los conceptos de un marco de referencia preferente para el electromagnetismo y el principio galileano de la relatividad para la mecánica.

En tanto que se han examinado sólo dos experimentos de este tipo general, no han habido hasta ahora resultados de ninguna clase que apoyen un marco preferente para el electromagnetismo. Por consiguiente, se llega a la suposición de que existe un principio común de relatividad tanto para el electromagnetismo como para la mecánica. No puede, sin embargo, ser descrito por la transformación galileana dada por (28-2) y (28-4). Los necesariamente nuevos conceptos están dados por los postulados de la relatividad especial.

No se debe tener la idea, sin embargo, de que la relatividad especial en su totalidad es válida o no por los resultados de un único experimento "crucial", en particular, el experimento de Michelson y Morley. A la fecha, la relatividad especial ha sido extensamente probada por medio de tan gran número de experimentos que se entretejen, que permiten una descripción sencilla, coherente y útil de una gran variedad de fenómenos.

28-2 Los postulados y la transformación de Lorentz

Existe cierta duda acerca de si Einstein fue influenciado fuertemente por los experimentos que recién se han descrito o si, por lo contrario, tuviese conocimiento de ellos. No obs-

tante, de lo que no existe duda es que él meditó en forma profunda y tenaz acerca de las cuestiones que se han delineado en la última sección. El resultado fue que en 1905 propuso el equivalente de los dos postulados siguientes:

I Todos los sistemas de coordenadas son igualmente adecuados para la descripción de los fenómenos físicos.

II La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores y es independiente del movimiento de la fuente.

El primer postulado se refiere de manera literal a *todos* los sistemas de coordenadas, aun cuando aquí se restringe a aquellos sistemas que tienen velocidad constante entre sí. Cuando se hace esto, la discusión se limita a la *teoría especial* (*restringida*) de la relatividad Un análisis no restringido correspondería a la *teoría general* de la relatividad, la cual no se considera aquí.

El primer postulado afirma también que existe un principio común de la relatividad para *toda* la física, aun cuando se le considere sólo en términos de la mecánica de las partículas y del electromagnetismo. Otra forma de establecer el primer postulado es expresar que ninguna teoría puede contener alguna referencia, sea la que fuere, a una *velocidad absoluta* de movimiento translacional del sistema de coordenadas que se esté empleando. Se vio en la última sección que las ecuaciones de Maxwell en combinación con la transformación galileana indicaron una posibilidad de efectos debidos a una velocidad absoluta, pero tales predicciones no se apoyaron o no tuvieron respaldo en hechos experimentales. Esto podría significar que las ecuaciones de Maxwell no son en sí completamente correctas, o podría significar que es la transformación galileana la que falla. Einstein prefirió la segunda posibilidad, pero en lugar de postular que las ecuaciones de Maxwell eran covariantes (sin cambio en su forma) en relación con la transformación de coordenadas apropiada, encontró que era suficiente (y equivalente) establecer su segundo postulado en términos de la velocidad de la luz.

Es este segundo postulado el que conduce a los resultados menos familiares de la relatividad especial, incluidos aquellos que de manera aparente violan el "sentido común". También implica que la mecánica newtoniana no es la forma correcta para la representación exacta de los fenómenos mecánicos, puesto que la transformación galileana que representa el principio de relatividad, natural a la mecánica, es incompatible con el segundo postulado, como se encontró después de (28-9). Así, primero se deben encontrar las reglas de transformación para las coordenadas, que satisfagan el segundo postulado. Después se deberán encontrar las leyes de la mecánica que satisfacen el primer postulado cuando se emplean estas reglas de transformación. Por último, se deberá ver cómo el electromagnetismo, según los describen las ecuaciones de Maxwell, encaja en estos postulados. El que estos postulados sean en realidad aplicables a la descripción de fenómenos físicos, es una cuestión que sólo puede decidirse comparando las predicciones de resultados experimentales con los propios resultados reales.

Antes de iniciar estas tareas, sin embargo, será conveniente ver si estos postulados son compatibles con los resultados de los dos experimentos examinados en la última sección. En lo que al experimento de Trouton-Noble se refiere, se puede recurrir al primer postulado que permite calcular el efecto en un sistema de coordenadas en el que las cargas estén en reposo. Aquí la única fuerza es la electrostática de atracción y, como se señaló con anterioridad, ésta conducirá a la ausencia de torca y en consecuencia a que no haya rotación del capacitor, en concordancia con la observación. En el experimento de Michelson-Morley, la velocidad de las ondas será c para ambos brazos, haciendo $t_1 = t_2$ y por ello $\Delta t = 0$, de nuevo de acuerdo con la observación.

La transformación de coordenadas que cuantitativamente concuerda con el segundo postulado, recibe la denominación de *transformación de Lorentz*. Se consideran dos sistemas de coordenadas, S y S', en movimiento relativo con velocidad V a lo largo de dirección común xx'. Para un evento en un punto dado, un observador en S asignará las coordenadas espaciales y el tiempo (x,y,z,t), mientras que las obtenidas por un observador en S' serán (x',y',z',t'). Así, las ecuaciones de transformación permiten calcular la posición (x',y',z') y el tiempo t' del evento, si se sabe que el primer observador le asigna los valores (x,y,z) y t, e inversamente. La derivación se simplificará en algo, pero conducirá al resultado correcto e incluirá todos los aspectos principales de un tratamiento más elaborado.

Supóngase que en el instante en que coinciden los dos orígenes de los sistemas de coordenadas, se produce en el origen una pequeña pulsación de luz. El segundo postulado requiere que cada observador vea la luz propagándose con la misma velocidad c en todas direcciones. En otras palabras, con respecto a su propio sistema de coordenadas, cada observador debe ver el frente de onda como una esfera con centro en el correspondiente origen y de radio c veces el tiempo. Las ecuaciones de los frentes de onda son así

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0 \qquad x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0 \tag{28-16}$$

por lo que se debe satisfacer la identidad

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \tag{28-17}$$

Una forma equivalente de expresar esto, es diciendo que la cantidad en uno u otro miembro de (28-17) debe ser *invariante* con respecto a la transformación de un sistema al otro.

Puesto que se han tomado los ejes x y x' en la dirección de la velocidad relativa de S y S', es razonable suponer que las coordenadas transversales al movimiento no han cambiado, esto es, $y'=y$ y $z'=z$; entonces (28-17) resulta ser

$$x'^2-c^2t'^2=x^2-c^2t^2 \tag{28-18}$$

Ahora sólo hay *una* velocidad relativa V. Desde el punto de vista de S, el origen 0′ debe tener la coordenada Vt como se muestra en la figura 28-4*a*. De manera similar, la coordenada x' de 0 según se ve en S' debe ser $-Vt'$, como se muestra en (*b*) de la figura. Por lo tanto, las ecuaciones de transformación deben satisfacer las condiciones de que

$$\begin{aligned} x &= Vt \qquad \text{donde } x'=0 \\ x' &= -Vt' \qquad \text{donde } x=0 \end{aligned} \tag{28-19}$$

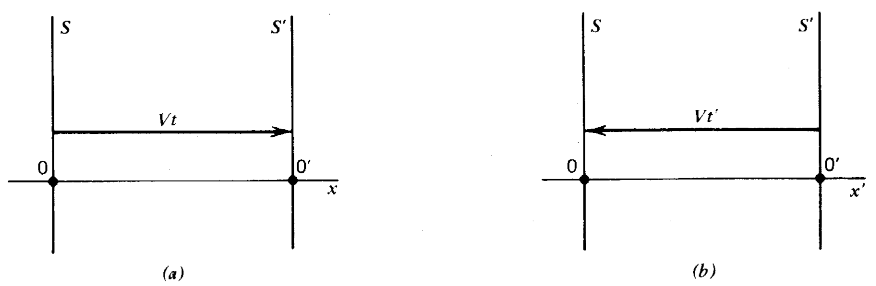


Figura 28-4 Coordenadas de los dos orígenes vistas por dos observadores en movimiento relativo.

Se tratarán las relaciones más sencillas que satisfacen (28-19), esto es, las ecuaciones lineales

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad x = \gamma'(x' + Vt') \tag{28-20}$$

donde γ y γ' son constantes a determinar. Se pueden expresar ahora t' en términos de las cantidades no primas, eliminando x' de (28-20); se encuentra que

$$t' = \gamma\left[t - \frac{x}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'}\right)\right] \tag{28-21}$$

Poniendo estas expresiones para x' y t' en (28-18) y agrupando términos, se obtiene

$$x^2\left[1 - \gamma^2 + \frac{\gamma^2c^2}{V^2}\left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'}\right)^2\right] + 2xt\left[\gamma^2V - \frac{\gamma^2c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'}\right)\right]$$

$$+ t^2[\gamma^2(c^2 - V^2) - c^2] = 0 \tag{28-22}$$

A fin de que esto sea siempre cero para todos los valores posibles de x y t, es necesario que los coeficientes de x^2, xt y t^2 desaparezcan en forma individual. Igualando a cero a cada uno de estos coeficientes se encuentra que

$$\gamma' = \gamma = \frac{1}{[1 - (V^2/c^2)]^{1/2}} \tag{28-23}$$

satisfará (28-22).

Combinando todos estos resultados, se obtienen las fórmulas de la transformación de Lorentz

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \tag{28-24}$$

$$x = \gamma(x' + Vt') \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \tag{28-25}$$

donde γ está dada por (28-23). Las ecuaciones (28-25) se pueden obtener de (28-24) despejando las cantidades no primas en términos de las primas o, de manera equivalente, intercambiando los símbolos con primas y sin ellas y cambiando el signo de V como se esperaría por la simetría total de la situación.

Si se hace $V/c \to 1$ se ve que (28-24) se reduce a la transformación galileana (28-4) que se ve ahora como una primera aproximación a la transformación de Lorentz para valores finitos de V tales que $V/c \ll 1$.

Será conveniente introducir un símbolo especial para la razón de V a c:

$$\beta = \frac{V}{c} \tag{28-26}$$

por lo que

$$\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \tag{28-27}$$

en tanto que (28-24) resulta ser

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right) \tag{28-28}$$

En realidad, cualquier transformación de coordenadas y del tiempo que satisfaga a (28-17) recibe la denominación de transformación de Lorentz. La que se da en (28-28) es aquélla particular que se aplica al caso en el cual el movimiento relativo de S y S' ocurre a lo largo de su dirección común x. En la siguiente sección se consideran transformaciones de Lorentz más generales, pero por ahora se restringe el caso a (28-28).

Los primeros resultados físicos que implica la transformación de Lorentz y que se investigarán aquí son básicamente todos ellos relativos a la cinemática. La existencia de los primeros tres efectos que se considerarán se puede deducir de manera cualitativa sólo de los postulados, pero será más ilustrativo calcularlos por medio del empleo directo de la transformación de Lorentz.

Ejemplo

Relatividad de la simultaneidad. Supóngase que ocurren dos eventos en los puntos x_1 y x_2 en el sistema S y son simultáneos ahí, por lo que $t_1 = t_2$. Los tiempos en los cuales se observaron estos eventos en S' según se obtuvo de (28-28) son

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{\beta x_1}{c}\right) \qquad t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta x_2}{c}\right) \tag{28-29}$$

por lo que el intervalo de tiempo entre estos eventos es

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = -\frac{\gamma\beta}{c}(x_2 - x_1) \neq 0 \tag{28-30}$$

Este resultado demuestra que dos eventos que ocurren en *puntos diferentes* x_1 y x_2, y que son simultáneos para un observador en reposo en S, no parecerán ni con mucho como simultáneos a un observador que esté en reposo en S'. En otras palabras, la simultaneidad no es una propiedad absoluta de un par de eventos, sino que es también dependiente del estado relativo de movimiento del observador.

Ejemplo

Dilatación del tiempo. Supóngase que se tiene un reloj localizado en el punto x_1 y que está emitiendo señales de cierta clase a intervalos regulares Δt, donde $\Delta t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$, etc. Los tiempos correspondientes en S' están dados por (28-29), excepto que ahora $x_2 = x_1$ puesto que el reloj está fijo en movimiento en relación con el reloj, se encuentra que estas señales estarán separadas por los intervalos de tiempo $\Delta t' = t_2' - t_1' = t_3' - t_2'$, y así sucesivamente, dados por

$$\Delta t' = \gamma \Delta t > \Delta t \tag{28-31}$$

puesto que $\gamma > 1$. Así, el intervalo de tiempo parece ser mayor para el observador en movimiento de lo que le parece a uno que se encuentra en reposo del reloj.

Ejemplo

La contracción de Lorentz. En principio, se mide una longitud colocando una barra de medir a lo largo de la distancia que se va a medir y encontrando después la diferencia entre las marcas de la escala que *coincidan simultáneamente* con los extremos de la longitud de interés. Aun cuando esa especificación detallada parece ser trivial cuando la barra de medir y la longitud están en reposo relativo, es esencial cuando se están moviendo una respecto de la otra.

Sea $L = x_2 - x_1$ la distancia entre dos puntos según se encontró con una escala que está en reposo con respecto a ellos. La longitud según la apreció el observador en movimiento que asigna coordenadas x_2' y x_1' a los puntos, se encuentra de (28-28) como

$$L' = x_2' - x_1' = \gamma[x_2 - x_1 - \beta c(t_2 - t_1)] \qquad (28\text{-}32)$$

No obstante, los valores x_2' y x_1' deben haber sido determinados en forma simultánea en S', de modo que $t_2' = t_1'$. Esto significa que el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ en (28-32) debe estar dado por $t_2 - t_1 = (\beta/c)(x_2 - x_1) = (\beta/c)L$ de acuerdo con (28-29). Cuando esto se sustituye en (28-32) y se emplea (28-27), se encuentra que

$$L' = \gamma(1 - \beta^2)L = \frac{L}{\gamma} = (1 - \beta^2)^{1/2}L < L \qquad (28\text{-}33)$$

Así, según lo encuentra el observador en movimiento, la longitud en la dirección del movimiento se contraerá por el factor $1/\gamma$.

Ejemplo

Fórmulas de adición de velocidades. Las componentes rectangulares de la velocidad v' de un punto cuando se le observa desde S', están dadas por

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} \qquad v_y' = \frac{dy'}{dt'} \qquad v_z' = \frac{dz'}{dt'} \qquad (28\text{-}34)$$

Se desea ahora encontrar las componentes v_x, v_y, v_z de la velocidad de este mismo punto cuando su movimiento se refiere al sistema S.

Derivando la primera expresión de (28-25) y la última de (28-28), y empleando (28-26), se obtiene

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \gamma\left(\frac{dx'}{dt'}\frac{dt'}{dt} + \beta c\frac{dt'}{dt}\right) \qquad (28\text{-}35)$$

$$\frac{dt'}{dt} = \gamma\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right) \qquad (28\text{-}36)$$

Cuando se combinan estas expresiones para eliminar dt'/dt, se encuentra que

$$v_x = \gamma^2(v_x' + V)\left(1 - \frac{\beta v_x}{c}\right)$$

la cual se puede resolver para v_x; el resultado es que

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + (Vv_x'/c^2)} \tag{28-37}$$

Se puede expresar ahora (28-36) completamente en términos de cantidades con primas sustituyendo (28-37) en ella; se obtiene

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma[1 + (Vv_x'/c^2)]} \tag{28-38}$$

De manera similar se encuentra que

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{v_y'}{\gamma[1 + (Vv_x'/c^2)]} \tag{28-39}$$

$$v_z = \frac{v_z'}{\gamma[1 + (Vv_x'/c^2)]} \tag{28-40}$$

Estas dos últimas relaciones, junto con (28-37), permiten convertir las componentes de la velocidad observadas en un sistema en aquéllas observadas en otro, y son las análogas relativistas a las fórmulas clásicas (28-5) que están basadas en la transformación galileana.

Se ve que estas fórmulas son más complicadas que las clásicas y, en particular, que v_x' aparece en las fórmulas (28-39) y (28-40) empleadas para transformar las componentes y y z de la velocidades. Por otra parte, si $\beta = V/c \ll 1$, se ve que (28-37), (28-39) y (28-40) resultan ser aproximadamente $v_x \sim v_x' + V$, $v_y \sim v_y'$ y $v_z \sim v_z$,, las cuales son justamente (28-5) de nuevo. Así, la simple adición de componentes que se desprende de la transformación galileana es una transformación apropiada para velocidades relativas pequeñas de los dos sistemas de coordenadas.

Las fórmulas relativistas de transformación de velocidades tienen la propiedad interesante de que la suma de dos velocidades nunca puede exceder el valor c. Esto se ilustra con más facilidad mediante un ejemplo extremo. Supóngase que $V = c$, en tanto que $v_x = c$ también. La transformación galileana conducirá a $v_x = v_x + V = c + c = 2c$, mientras que de la fórmula de Einstein (28-37) resulta $v_x = (c + c)/[1 + (c^2/c^2)] = c$, como se afirmó.

El efecto Doppler y la aberración. La cuestión de interés aquí es cómo se relacionan las frecuencias y las direcciones de propagación de una onda para los dos observadores que se mueven de manera relativa. Supóngase que una fuente luminosa, Q', en reposo en S', emite una onda esférica. Se sabe por los resultados del último capítulo, que esta onda se representará en S, por

$$\psi' = \frac{\psi_0'}{r'} e^{i(k'r' - \omega' t')} \tag{28-41}$$

donde r' es la distancia desde Q', Ψ ó es una amplitud constante, y la frecuencia circular ω' y la constante de propagación k' deben estar relacionadas por

$$\omega' = k'c \tag{28-42}$$

puesto que la onda tiene la velocidad c.

Ahora supóngase que hay un observador en reposo en S en un punto P del plano xy. Las coordenadas de P son (x, y) en S y (x', y') en S'. El observador en S interpretará la onda como una onda esférica que se origina en una fuente puntual Q de ese sistema, por lo que la describirá por

$$\psi = \frac{\psi_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} \tag{28-43}$$

$$\omega = kc \tag{28-44}$$

puesto que la onda tiene también velocidad c en S en virtud del segundo postulado.

Como se mostró en la figura 28-5, la dirección de propagación de Q' a P puede describirse por medio del ángulo Q' que forma con el eje x', siendo Q el ángulo correspondiente en S. También se ve en la figura que

$$r' = x'\cos\theta' + y'\text{sen}\theta' \qquad r = x\cos\theta + y\text{sen}\theta \tag{28-45}$$

Ahora el valor *numérico* de la fase de la onda (cero, por ejemplo) debe ser independiente del sistema que se esté empleando para expresarlo: así, los exponentes en (28-41) y (28-43) deben ser siempre iguales. Además, las coordenadas y tiempos deben estar relacionados por la transformación de Lorentz (28-28). Igualando estos exponentes, sustituyendo de (28-42), (28-44). (28-45) y (28-28), se encuentra que se debe tener

$$\omega\left(\frac{x\cos\theta + y\text{sen}\theta}{c} - t\right) = \omega'\left[\frac{\gamma(x - \beta ct)\cos\theta' + y\text{sen}\theta'}{c} - \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)\right] \tag{28-46}$$

Esta igualdad debe ser válida para todos los valores posibles de x, y y t; esto sólo es posible si sus coeficientes son iguales por separado.

$$\omega = \omega'\gamma(1 + \beta\cos\theta') \tag{28-47}$$

la cual relaciona las frecuencias y es la fórmula del efecto Doppler relativista. Se ve que si $\beta \ll 1$, entonces $\gamma \sim 1$, y (28-47) se reduce a la fórmula clásica

$$\omega \simeq \omega'(1 + \beta\cos\theta') \tag{28-48}$$

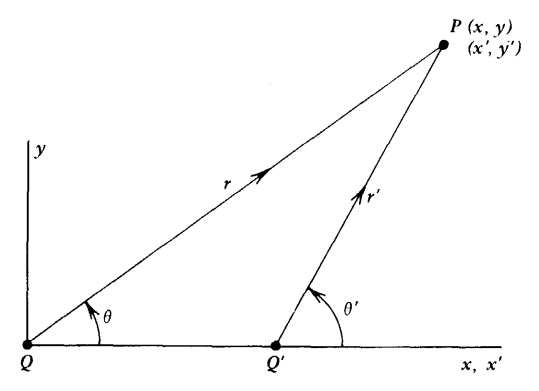


Figura 28-5. Coordenadas para el cálculo del efecto Doppler y de la aberración.

De manera similar, cuando se igualan los coeficientes de x, se encuentra que $\omega \cos \theta = \omega' \gamma(\cos \theta' + \beta)$, la cual se puede emplear para eliminar las frecuencias de (28-47), con el resultado

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \tag{28-49}$$

que relaciona las direcciones de propagación y que se denomina fórmula de la aberración.

Por último, igualando los coeficientes de y en (28-46) se obtiene $\omega \operatorname{sen} \theta = \omega' \operatorname{sen} \theta'$, de la cual se demuestra con facilidad que es consistente con (28-47) y (28-49).

La fórmula (28-47) difiere del resultado acústico clásico (28-48), porque aquélla predice un efecto *transversal*. Supóngase que la frecuencia se observa en S a ángulo recto respecto al movimiento, esto es, $\theta = 90°$. Entonces $\cos\theta = 0$ y (28-49) da $\cos \theta' = -\beta$. Si esto se sustituye en (28-47) y se emplea (28-27), se encuentra que $\omega = \omega'(1 - \beta^2)^{1/2} < \omega'$. Este efecto predicho se ha observado estudiando la radiación de una descarga eléctrica en hidrógeno y constituye cierta evidencia experimental de la exactitud básica de los postulados de la relatividad.

A fin de ver la motivación de lo que se hará en la siguiente sección, resulta útil apreciar algunos de los resultados obtenidos desde otro punto de vista. La transformación de Lorentz se aplica también a las diferenciales de las coordenadas, y se encuentra de (28-28) que

$$dx' = \gamma(dx - \beta c\, dt) \qquad dy' = dy \qquad dz' = dz \qquad dt' = \gamma\left(dt - \frac{\beta}{c} dx\right) \tag{28-50}$$

Además, (28-17) demuestra que la transformación de Lorentz corresponde a la igualdad

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c^2(dt')^2 \tag{28-51}$$

Factorizando $-(dt)^2$ y $-(dt')^2$ en cada miembro respectivamente, obteniendo la raíz cuadrada y empleando (28-34) y (1-6), se encuentra que la cantidad $d\tau$ dada por

$$d\tau = dt\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = dt'\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{28-52}$$

tiene el mismo valor para todos los marcos de referencia relacionados por la transformación de Lorentz. A esta cantidad invariante $d\tau$ se le denomina *intervalo temporal propio* y se ve de (28-52) que $d\tau = dt_0$ = intervalo de tiempo medido en el sistema en el que el punto está en reposo ($v = 0$).

Si ahora se dividen ambos miembros de cada término en (28-50) entre $d\tau$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{d\tau} &= \gamma\left(\frac{dx}{d\tau} - \beta c \frac{dt}{d\tau}\right) \qquad \frac{dy'}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} \\ \frac{dz'}{d\tau} &= \frac{dz}{d\tau} \qquad \frac{dt'}{d\tau} = \gamma\left(\frac{dt}{d\tau} - \frac{\beta}{c}\frac{dx}{d\tau}\right) \end{aligned} \tag{28-53}$$

Empleando (28-52), (28-34) y comparando (28-53) con (28-28), se ve que las cuatro cantidades

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{v_x}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}} \qquad \frac{dy}{d\tau}=\frac{v_y}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}}$$
$$\frac{dz}{d\tau}=\frac{v_z}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}} \qquad \frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}} \tag{28-54}$$

se transforman exactamente en la misma forma que x, y, z, t. Por lo tanto, puesto que se sabe de (28-25) que

$$x=\gamma(x'+Vt') \qquad t=\gamma\left[t'+(V/c^2)x'\right]$$

se pueden escribir en forma inmediata las ecuaciones de transformación para las cantidades *análogas* $dx/d\tau$ y $dt/d\tau$ como

$$\frac{v_x}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}}=\gamma\left\{\frac{v_x'}{\left[1-(v'^2/c^2)\right]^{1/2}}+V\frac{1}{\left[1-(v'^2/c^2)\right]^{1/2}}\right\} \tag{28-55}$$

$$\frac{1}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}}=\gamma\left\{\frac{1}{\left[1-(v'^2/c^2)\right]^{1/2}}+\frac{V}{c^2}\frac{v_x'}{\left[1-(v'^2/c^2)\right]^{1/2}}\right\} \tag{28-56}$$

Si ahora se divide (28-55) entre (28-56), se obtiene

$$v_x=\frac{v_x'+V}{1+(Vv_x'/c^2)}$$

la cual es exactamente la fórmula de transformación de velocidades (28-37). Se debe estar seguro de verificar que (28-39) y (28-40) se pueden obtener en forma similar.

El empleo de (28-55) y (28-56) es muy diferente del método previo para obtener (28-37), el cual comprendió diferenciaciones directas de las ecuaciones de transformación y la eliminación subsecuente de términos. Se estuvo en posibilidad de obtener (28-37) en esta última forma, en razón de que se sabía la forma en que todas las cantidades fueron afectadas por una transformación de Lorentz, esto es, *se conocían sus propiedades de transformación*.

Lo importante de este ejemplo es, entonces, demostrar que se está en posibilidad de escribir las fórmulas de transformación para ciertas cantidades con mayor facilidad, siempre que se conozca algo acerca de sus propiedades generales. Esto resulta ser una forma en extremo valiosa de ver las cosas y es lo que se considera en la siguiente sección.

28-3 Transformaciones generales de Lorentz, cuadrivectores y tensores

Princípiese por considerar los dos sistemas de coordenadas rectangulares mostrados en la figura 28-6. Ambos tienen un origen común pero difieren por una rotación; esto es, si se gira uno de los conjuntos de ejes como un cuerpo rígido, se le puede hacer coincidir con

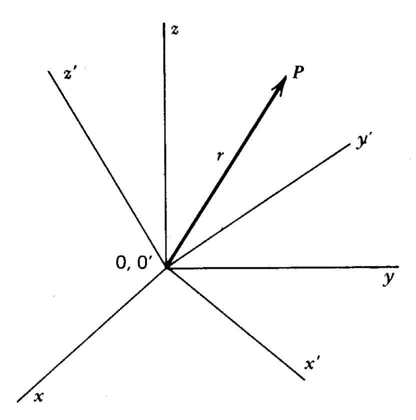


Figura 28-6. Los dos conjuntos de ejes estan girados uno con respecto al otro.

el otro. Se podría describir la rotación exacta, por ejemplo, especificando los cosenos directores de los ejes primos con respecto a los no primos, o *viceversa.*

Considérese un punto P que tenga las coordenadas x, y, z en un conjunto de ejes, mientras que sus coordenadas en el otro conjunto son x', y', z'. Ambos conjuntos de números ubican el mismo punto P. La distancia, r, de P al origen tiene el mismo valor numérico sin importar el sistema de coordenadas que se esté empleando. En otras palabras, r es *invariante* y se debe tener

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \qquad (28\text{-}57)$$

Será conveniente introducir la notación

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad (28\text{-}58)$$

porque entonces se puede escribir (28-57) en forma algo más compacta como

$$r^2 = \sum_{j=1}^{3} x_j^2 = \sum_{j=1}^{3} x_j'^2 \qquad (28\text{-}59)$$

Las ecuaciones que relacionan los dos conjuntos de coordenadas serán lineales, por lo que se pueden escribir las tres ecuaciones

$$x_j' = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} x_k \qquad (j = 1,2,3) \qquad (28\text{-}60)$$

entonces, las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \qquad (28\text{-}61)$$

El conjunto de nueve números a_{jk} caracteriza la rotación que relaciona los ejes primos y los no primos. Es evidente también que los a_{jk} no pueden ser todos independientes en virtud de que las ecuaciones de transformación (28-60) no han satisfecho aún el requisito físico fundamental en el sentido de que los ejes se relacionen por medio de una *rotación,* esto es, que r^2 sea invariante según quedó descrito por (28-59).

En este caso tridimensional en particular es fácil identificar los a_{jk}. El vector de posición de P en el sistema primo se puede escribir como $\mathbf{r}' = x'\,\hat{\mathbf{x}}' + y'\,\hat{\mathbf{y}}' + z'\,\hat{\mathbf{z}}'$, por (1-11), mientras que para el sistema no primo es $\mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$. Puesto que estas expresiones representan el mismo vector físico (esto es, el desplazamiento desde el origen), se debe tener también $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Entonces se puede emplear (1-21) para encontrar x' como

$$x' = \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{x}}' = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{x}}' = x\hat{\mathbf{x}}' \cdot \hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{x}}' \cdot \hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{x}}' \cdot \hat{\mathbf{z}} = l_{xx}x + l_{xy}y + l_{xz}z \qquad (28\text{-}62)$$

donde l_{xx} 'l_{xy} 'l_{xz} son los cosenos directores de $\hat{\mathbf{x}}'$ con respecto a los ejes x, y, z, respectivamente, de acuerdo con (1-8). [Estos cosenos directores satisfacen $l_{xx}^2 + l_{xy}^2 + l_{xz}^2 = 1$, por (1-9)]. Por lo que, comparando (28-62) con (28-61), se ve que $a_{11} = l_{xx}$, $a_{12} = l_{xy}$ y $a_{13} = l_{xz}$. En la misma forma, se encontrará que a_{2k} proporciona los cosenos directores de $\hat{\mathbf{y}}'$, y a_{3k} los de $\hat{\mathbf{z}}'$.

En la sección 1-1 se definió a un vector como cualquier cantidad con las mismas propiedades matemáticas que el desplazamiento de un punto. Ahora el vector de posición $\mathbf{r}$ es ciertamente tal cantidad y sus componentes son exactamente las coordenadas de un punto. Así, (28-60) describe el efecto de una rotación sobre los *componentes* de este vector particular. Por lo tanto, se puede decir de inmediato que si A_1, A_2 y A_3 son las componentes rectangulares de cualquier vector $\mathbf{A}$, entonces ellas satisfarán una relación como (28-60), esto es,

$$A_j' = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} A_k \qquad (j = 1, 2, 3) \qquad (28\text{-}63)$$

donde los a_{jk} constituyen el *mismo conjunto* de coeficientes que describen el efecto de una rotación rígida de ejes sobre las coordenadas de un punto.

Aunque se podría continuar con este caso tridimensional, resulta fácil desarrollar un análisis adicional para una situación más general que la que se está enfocando.

Si se revisa (28-17), se aprecia que esta condición básica para la transformación de Lorentz se puede también expresar requiriendo la invariamcia de la cantidad s^2 dada por

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \qquad (28\text{-}64)$$

Si ahora se introduce la notación

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \qquad x_3 = z \qquad x_4 = ict \qquad (28\text{-}65)$$

se ve que (28-64) se puede escribir como

$$s^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu'^2 \qquad (28\text{-}66)$$

Comparando (28-66) con (28-59), se ve que la transformación de Lorentz más general se

puede interpretar como una *rotación rígida de ejes en un espacio tetradimensional* con ejes $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$.

Se pueden escribir las ecuaciones de transformación que relacionan los dos conjuntos de coordenadas, como las cuatro ecuaciones lineales generales

$$x_\mu' = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 1,2,3,4) \tag{28-67}$$

Si la transformación no fuera lineal, se daría una condición de preferencia a cualquier origen que se hubiera elegido, o a algún otro punto; pero esto violaría el primer postulado, puesto que proporcionaría un medio objetivo de diferenciar un sistema de coordenadas de otro.

Para que (28-67) represente una transformación de Lorentz, se debe satisfacer también (28-66). Esto impondrá algunos requisitos sobre los 16 coeficientes $a_{\mu\nu}$, y es preciso saber cuáles son. Sustituyendo (28-67) en (28-66), se obtiene

$$\sum_\lambda x_\lambda'^2 = \sum_\lambda \left(\sum_\mu a_{\lambda\mu} x_\mu \right) \left(\sum_\nu a_{\lambda\nu} x_\nu \right) = \sum_{\mu\nu} \left(\sum_\lambda a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} \right) x_\mu x_\nu \tag{28-68}$$

Puesto que (28-68) debe ser también igual a $\sum_\mu x_\mu^2$, se ve que se debe tener

$$\sum_\lambda a_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} \tag{28-69}$$

con el empleo de (8-27), puesto que el coeficiente de $x_\mu x_\nu$ debe ser igual a 1 si $\nu = \mu$ y 0 si $\nu \neq \mu$.

Ahora, se podría haber escrito igualmente la transformación en la forma

$$x_\nu = \sum_{\lambda=1}^{4} b_{\nu\lambda} x_\lambda' \qquad (\nu = 1,2,3,4) \tag{28-70}$$

donde los $b_{\nu\lambda}$ constituyen un conjunto apropiado de coeficientes. Es evidente que los $g\lambda$ deben estar relacionados con los $a_{\mu\nu}$ y esto se puede determinar sustituyendo (28-70) en (28-67) para obtener

$$x_\mu' = \sum_\nu a_{\mu\nu} \left(\sum_\lambda b_{\nu\lambda} x_\lambda' \right) = \sum_\lambda x_\lambda' \left(\sum_\nu a_{\mu\nu} b_{\nu\lambda} \right) = \sum_\lambda \delta_{\mu\lambda} x_\lambda' \tag{28-71}$$

de nuevo con el empleo de (8-27). Comparando los dos últimos términos, se ve que

$$\sum_\nu a_{\mu\nu} b_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda} \tag{28-72}$$

Se puede resolver (28-72) para los b, multiplicando ambos miembros de dicha expresión por $a_{\mu\rho}$, sumando sobre μ, y empleando (28-69):

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\rho} a_{\mu\nu} b_{\nu\lambda} = \sum_\mu a_{\mu\rho} \delta_{\mu\lambda} = a_{\lambda\rho} = \sum_\nu b_{\nu\lambda} \left(\sum_\mu a_{\mu\rho} a_{\mu\nu} \right) = \sum_\nu b_{\nu\lambda} \delta_{\rho\nu} = b_{\rho\lambda} \tag{28-73}$$

Así, $b\rho\lambda = a\lambda\rho$, por lo cual se puede decir que

$$\text{si } x_\mu' = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \text{entonces } x_\mu = \sum_\nu a_{\nu\mu} x_\nu' \tag{28-74}$$

Además, se puede escribir (28-72) completamente en términos de los a sustituyendo el resultado de (28-73) en ella e intercambiando los índices λ y ν para llegar a

$$\sum_\lambda a_{\mu\lambda} a_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu} \tag{28-75}$$

Así, hay sólo un conjunto de coeficientes que describen la transformación y (28-69) y (28-75) representan las condiciones requeridas por (28-66).

Cuando la transformación de Lorentz particular (28-28) que se ha estado empleando se escribe en la notación de (28-65), resulta ser

$$\begin{aligned} x_1' &= \gamma x_1 + i\beta\gamma x_4 \qquad x_2' = x_2 \\ x_3' &= x_3 \qquad x_4' = \gamma x_4 - i\beta\gamma x_1 \end{aligned} \tag{28-76}$$

Comparando (28-76) con (28-67) se ve que los coeficientes $a_{\mu\nu}$, que representan esta transformación particular, pueden escribirse como la matriz

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{28-77}$$

Se dejará como ejercicio verificar que los $a_{\mu\nu}$ dados en (28-77) satisfacen los requisitos (28-69) y (28-75).

Es evidente que una rotación rígida de ejes en el espacio tridimensional mantendrá invariante también la expresión $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$, en virtud de (28-57) y de su independencia del tiempo. Así, se sabe incluir también tal rotación física de ejes en el grupo de transformaciones generales de Lorentz descritas por (28-67).

En esta etapa resulta útil introducir algunas cantidades nuevas, principalmente por analogía con el caso tridimensional. Recuérdese que un *invariante* es una cantidad cuyo valor numérico no cambia como resultado de una transformación de Lorentz. Son ejemplos, s^2 de (28-66) y el tiempo propio $d\tau$ de (28-52).

Como una generalización de lo que se encontró válido para un vector **A** en (28-63), se define un *cuadrivector* A_μ como un conjunto de cuatro cantidades (A_1, A_2, A_3, A_4) cuyas *propiedades de transformación* son las mismas que las de las coordenadas. Esto es, si la transformación de Lorentz se describe por (28-74), entonces los componentes A_μ y A_μ' se relacionan por medio de

$$A_\mu' = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} A_\nu \qquad \text{y} \qquad A_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\nu\mu} A_\nu' \tag{28-78}$$

donde los coeficientes $a_{\mu\nu}$ son exactamente los que aparecen en (28-67) y $\mu=1,2,3,4$. Puesto que se vio que una rotación rígida de ejes es también una transformación de Lorentz, se desprende de esta definición y de (28-63) que las primeras tres componentes (A_1, A_2, A_3) de A_μ deben ser las componentes de un vector **A** tridimensional ordinario.

La suma de dos cuadrivectores debe ser un cuadrivector, por lo que

$$C_\mu = (A + B)_\mu = A_\mu + B_\mu \tag{28-79}$$

en analogía con (1-10).

Se puede definir un producto escalar de dos cuadrivectores generalizando el resultado obtenido para $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ en (1-20):

$$(\text{Producto escalar}) = \sum_\mu A_\mu B_\mu \tag{28-80}$$

Después de revisar la definición tridimensional (1-15), es de sospecharse que este producto escalar es un invariante. Esto se comprueba con facilidad empleando (28-80), (28-78) y (28-69):

$$\sum_\mu A_\mu' B_\mu' = \sum_\mu \left(\sum_\nu a_{\mu\nu} A_\nu\right)\left(\sum_\lambda a_{\mu\lambda} B_\lambda\right)$$

$$= \sum_{\nu\lambda} A_\nu B_\lambda \left(\sum a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda}\right) = \sum_{\nu\lambda} A_\nu B_\lambda \delta_{\nu\lambda} = \sum_\nu A_\nu B_\nu$$

De (1-17), se llega a definir el cuadrado de la "longitud" de un cuadrivector con el productor escalar del cuadrivector consigo mismo; así

$$(\text{longitud})^2 = \sum_\mu A_\mu^2 \tag{28-81}$$

Además del de las coordenadas, se ha encontrado ya un cuadrivector; es la cuadrivelocidad U_μ cuyas componentes, según se encontró de (28-54) y (28-65), son

$$U_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{v_x}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \qquad U_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \frac{v_y}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}}$$

$$U_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \frac{v_z}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \qquad U_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{ic}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \tag{28-82}$$

donde $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 2$. Estas cuatro cantidades forman un cuadrivector en razón de lo que se demostró en (28-55) y (28-56), en el sentido de que sus propiedades de transformación son las mismas que las de las coordenadas.

Insertando (28-82) en (28-81), se obtiene el interesante resultado de que el cuadrado de la "longitud" de la cuadrivelocidad es negativo:

$$(\text{longitud})^2 = \sum_{\mu} U_{\mu}^2 = \frac{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2} - c^2}{1-(v^2/c^2)} = -c^2 \tag{28-83}$$

Se define un *tensor de segundo orden,* $T\mu\nu$, como un conjunto de 16 cantidades tales que cada índice se transforma en la misma forma que los índices de las coordenadas, esto es, si (28-67) es válida, entonces

$$T_{\mu\nu}{}' = \sum_{\lambda} \sum_{\rho} a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} T_{\lambda\rho} \tag{28-84}$$

Se necesitan dos índices para especificar cada componente; de ahí el término "segundo orden". De manera similar, un cuadrivector con índices sencillos se considera un tensor de primer orden, en tanto que un escalar invariante es un tensor de orden cero. Es posible definir tensores de orden superior por medio de una generalización directa de (28-84), pero aquí no habrá necesidad de ello.

Se dice que un tensor es *simétrico* si $T\mu\nu = T\nu\mu$, por lo que sólo tiene 10 componentes independientes. Un tensor es *antisimétrico* si $T\nu\mu = -T\mu\nu$, y tiene sólo 6 componentes independientes puesto que los elementos de la diagonal deben ser igual a cero, esto es, $T\mu\mu = 0$. Un tensor *no* tiene que ser simétrico o antisimétrico, pero si lo es, esta propiedad de simetría no cambia con una transformación de Lorentz; esto es, si $T\mu\nu$ es simétrico (o antisimétrico), $T'_{\mu\nu}$ es también simétrico (o antisimétrico). Se puede probar esto para ambos casos a la vez escribiendo $T\mu\nu = \pm\, T\nu\mu$ y empleando el signo superior para el caso simétrico y el inferior para el antisimétrico. Empleando esto en (28-84) se encuentra que

$$T_{\mu\nu}{}' = \sum_{\lambda\rho} a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} T_{\lambda\rho} = \pm \sum_{\lambda\rho} a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} T_{\rho\lambda} \tag{28-85}$$

Si ahora se intercambian μ y ν en (28-84) y después se intercambian λ y ρ, se obtiene

$$T_{\nu\mu}{}' = \sum_{\lambda\rho} a_{\nu\lambda} a_{\mu\rho} T_{\lambda\rho} = \sum_{\lambda\rho} a_{\nu\rho} a_{\mu\lambda} T_{\rho\lambda} \tag{28-86}$$

Comparando (28-86) con (28-85), se que que $T'_{\mu\nu} = \pm T'_{\nu\mu}$ eligiendo los signos de tal modo que sean los mismos que se eligieron originalmente. demostrándose así que no se ha cambiado la propiedad de simetría.

Un importante ejemplo es

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu} B_{\nu} - A_{\nu} B_{\mu} \tag{28-87}$$

Escribir estos 16 números como $F_{\mu\nu}$ *no* basta para probar que $F_{\mu\nu}$ sea en realidad un tensor, aunque si lo es, será antisimétrico. A fin de demostrar que $F_{\mu\nu}$ tiene en realidad las propiedades correctas de transformación, se sustituyen (28-78) en (28-87) y se encuentra que

$$F_{\mu\nu}' = A_\mu' B_\nu' - A_\nu' B_\mu' = \sum_{\lambda\rho} a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} A_\lambda B_\rho - \sum_{\lambda\rho} a_{\nu\rho} a_{\mu\lambda} A_\rho B_\lambda$$

$$= \sum_{\lambda\rho} a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} (A_\lambda B_\rho - A_\rho B_\lambda) = \sum_{\lambda\rho} a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} F_{\lambda\rho} \qquad (28\text{-}88)$$

que es exactamente lo que se requiere por la definición (28-84). Se ve también que si μ, $\nu = 1, 2, 3$, entonces las componentes de $F_{\mu\nu}$ son exactamente las del producto cruz tridimensional conocido, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, según se muestra en (1-27). Por consiguiente, se ve que el producto cruz es en realidad un tensor y no un vector.

De manera similar, se puede demostrar que las siguientes cantidades son cuadrivectores:

$$B_\mu = \sum_\nu A_\nu T_{\nu\mu} \qquad C_\mu = \sum_\nu T_{\mu\nu} A_\nu$$

De acuerdo con la regla de la cadena para diferenciación de una función de variables no primas dadas, con respecto a variables primas diferentes, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu'} = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\mu'} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \qquad (28\text{-}90)$$

según se ha empleado ya para obtener (28-8) de (28-7). Se ve de (28-74) que $\partial x_\nu / \partial x'_\mu = a_{\mu\nu}$, por lo que (28-90) resulta ser

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu'} = \sum_\nu a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \qquad (28\text{-}91)$$

Comparando (28-91) con (28-78), se ve que los cuatro operadores $\partial / \partial x_\mu$ se transforman exactamente como un cuadrivector. Este hecho permite definir un operador *del* tetradimensional, $\square$, con las componentes

$$\square = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right] \qquad (28\text{-}92)$$

y emplearlo de modo análogo al operador ∇ tridimensional dado en (1-41).

Si Ψ es un invariante, se puede definir un gradiente, $\square\Psi$, como el cuadrivector cuyas componentes son $\partial\Psi / \partial x_\mu$ como en (1-37). De manera similar, se puede definir

$$\sum_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \quad \text{(un invariante)} \qquad (28\text{-}93)$$

Laplaciano tetradimensional:

$$\square^2 = \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{(un invariante)} \qquad (28\text{-}94)$$

$$C_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad \text{(un tensor antisimétrico)} \qquad (28\text{-}95)$$

Divergencia de un tensor:

$$\sum_\nu \frac{\partial T_{\nu\mu}}{\partial x_\nu} = D_\mu \qquad \text{(un cuadrivector)} \qquad (28\text{-}96)$$

Se observa que el Laplaciano tetradimensional es en realidad el operador d'Alembertiano en el vacío dado por (22-17). Además, si μ, $\nu \neq 4$ en (28-95), entonces se ve de (1-43) que las componentes correspondientes de $C_{\mu\nu}$ son las componentes del rotacional tridimensional, $\nabla \times \mathbf{A}$.

A pesar de que todo el material de esta sección es tan interesante, resulta natural preguntarse por qué se discute aquí. Si en este texto se aborda la interrogante acerca del significado del primer postulado, se ve que expresa, en efecto, que no puede existir una manera de hacer una distinción absoluta entre dos sistemas que se mueven con velocidad constante uno respecto al otro. Además, se encontró del segundo postulado que las observaciones hechas en los dos sistemas están correlacionadas por medio de la transformación de Lorentz. Combinando estos dos resultados, se verá inmediatamente que se puede expresar que la consideración simultánea de ambos postulados requiere que las leyes de la física, formuladas apropiadamente sean de *forma invariable* cuando están sujetas a una transformación de Lorentz, esto es, deben ser *covariantes* con respecto a la transformación. A fin de demostrar que esto debe ser así véase, en un caso muy sencillo, cuáles serían las consecuencias en caso contrario. Supóngase que una ley particular bajo consideración tuviera la forma general $\mathcal{F} = \mathcal{G} + \mathcal{H}$. Supóngase también que al referir todo al sistema primo por medio de una transformación de Lorentz resulta que $\mathcal{F}' = \mathcal{G}' + \mathcal{H}' + \epsilon'$ donde ϵ' depende del sistema primo en particular. Esta ecuación evidentemente es no covariante y, de hecho la misma existencia del término ϵ' permitiría hacer distinción entre los diferentes sistemas de una manera absoluta. Puesto que esto alteraría el primer postulado, se puede apreciar la razón de la necesidad de la covariancia con respecto a una transformación de Lorentz.

Recién se ha visto que los cuadrivectores y los tensores de segundo orden son covariantes por definición. Así, resulta evidente que si se expresaran todas las leyes físicas en forma cuadrivectorial o tensorial, serían *de manera automática* covariantes con respecto a una transformación de Lorentz y, en consecuencia, satisfarían ambos postulados. Con esto en mente se puede ver, en esencia, lo que se hará después. Se observarán algunas leyes físicas para apreciar si se pueden escribir en términos de cuadrivectores o tensores. Si ya lo están o se les puede expresar con facilidad, no se necesita hacer nada más en razón de que se sabe que ya son válidas en relatividad especial. Si las leyes no son covariantes pero son correctas en el caso no relativista, entonces la tarea a desarrollar consiste en tratar de *generalizar* estos resultados de modo que se les pueda expresar en forma cuadrivectorial o tensorial y sean así compatibles con la relatividad especial. No obstabte, en esta última situación se deberán tener presentes dos puntos. Primero que todo, las generalizaciones se deberán reducir siempre a los resultados válidos conocidos en su límite no relativista. Segundo, las generalizaciones requerirán aún de su comprobación por la vía *experimental*, en razón de que el proceso de generalización a la forma cuadrivectorial o tensorial no conduce necesariamente a un resultado único.

28-4 Mecánica de las partículas

Siendo el electromagnetismo lo que aquí interesa principalmente, algo que resulta de igual importancia en física es la mecánica de los puntos masa, la cual proporciona una buena ilustración de lo examinado al final de la última sección y que se considerará en forma breve en ésta.

La ecuación básica de la mecánica no relativista de una masa punto sujeta a la fuerza neta f es

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{28-97}$$

donde

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{v} \tag{28-98}$$

es el momento lineal de la partícula en términos de su velocidad **v** y de su masa inercial (o en reposo)m_0. Es obvio que la ecuación 28-97 no está en forma cuadrivectorial o tensorial, dado que sólo tiene tres componentes y la derivada es con respecto al tiempo, del cual se sabe que no es un escalar invariante. Por lo tanto, estas ecuaciones se deben generalizar a fin de que satisfagan los requisitos de la relatividad especial.

Se inicia con el momento lineal. Aunque v no es un cuadrivector, está íntimamente relacionado con la cuadrivelocidad $V_\mu = dx_\mu/d\tau$. En consecuencia, una posible generalización de (28-98) consiste en emplear el escalar invariante m_0 y definir el *cuadrimomento* P_μ como

$$P_\mu = m_0 U_\mu \tag{28-99}$$

Se puede escribir esto en forma de componentes, empleando (28-82) para obtener

$$P_j = \frac{m_0 v_j}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \qquad (j=1,2,3) \qquad P_4 = \frac{i m_0 c}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \tag{28-100}$$

Se ve que conforme $v/c \to 0$, $P_j \to m_0 v_j$, lo cual es (28-98), por lo que (28-99) parece ser una elección razonable. Por el momento se hace caso omiso de la componente extra P_4 que se ha introducido en esta forma.

A fin de obtener una ecuación de movimiento análoga a (28-97), se deriva (28-99) con respecto al invariante $d\tau$ y se define la *cuadrifuerza* F_μ por medio de

$$F_\mu = \frac{dP_\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m_0 U_\mu) = m_0 \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} \tag{28-101}$$

para obtener la generalización deseada de la ecuación newtoniana; al cuadrivector F_μ se le denomina también *fuerza de Minkowski*.

Para relacionar (28-101) con las componentes ordinarias de fuerza, se puede sustituir $d\tau$ de (28-52), obteniéndose

$$F_\mu \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{d}{dt}(m_0 U_\mu) \tag{28-102}$$

y las primeras tres componentes de ésta según se encuentran empleando (28-82) son

$$F_j\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{m_0 v_j}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}}\right\}=f_j \tag{28-103}$$

donde las f_j deben ser las componentes x, y, z de la fuerza ordinaria f, puesto que (28-103) se debe reducir a (28-97) y (28-98) combinadas cuando $v/c \ll 1$. Por lo tanto, las primeras tres componentes de la fuerza de Minkowski están relacionadas con la fuerza ordinaria por medio de

$$F_j=\frac{f_j}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \tag{28-104}$$

En cálculos prácticos, por lo general, no se desea tratar con la cuadrifuerza sino que se prefiere emplear justamente las tres ecuaciones (28-103); así, resulta práctica común escribir

$$\mathbf{f}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{m_0\mathbf{v}}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}}\right\} \tag{28-105}$$

y llamar a esta expresión la *ecuación relativista de movimiento.* Además, si aún se desea considerar a la fuerza como la razón de cambio del momento lineal, se puede escribir (28-105) como $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$, donde

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v} \qquad \text{y} \qquad m=\frac{m_0}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \tag{28-106}$$

A la cantidad m introducida en esta forma se le denomina entonces la *masa* de la partícula, en razón de la *analogía* con (28-98). Si se sigue este procedimiento, (28-106) proporciona la base para el enunciado común de que la masa de una partícula ya no es una constante sino que se incrementa con la velocidad.

Por otra parte, no es del todo necesario interpretar en esta forma dichos resultados, y el hacerlo así obedece a un deseo natural de escribir el momento lineal como siempre, o sea, como el producto de la masa y de la *velocidad ordinaria* v y no como el producto de la masa en reposo m_0 por una *nueva función* de la velocidad. De hecho, tal enfoque contradice en realidad la filosofía básica del enfoque covariante de la relatividad, en razón de que (28-106) no está en forma cuadrivectorial. Se tiene una mayor concordancia con los conceptos relativistas al adjudicar una propiedad escalar invariante – la masa en reposo m_0 –a la partícula y después definir el momento cuadrivectorial como el producto de este invariante escalar con la velocidad cuadrivectorial, exactamente como se hizo en (28-99).

Se ha visto que el proceso de generalización condujo de la ecuación de tres componentes (28-98) a la (28-99), la cual tiene *cuatro* componentes. Se vio que a las primeras tres componentes de P_μ se les puede dar una interpretación adecuada, y ahora se debe considerar la componente "extra", la cual después de todo resulta familiar en cierta medida.

Defínase la cantidad W por medio de

$$P_4 = \frac{iW}{c} \tag{28-107}$$

por lo que (28-100) da

$$W = \frac{m_0 c^2}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \tag{28-108}$$

A fin de interpretar esta expresión, véase lo que resulta cuando $v/c \ll 1$. Desarrollando el denominador con el empleo de (8-6) se encuentra que

$$W = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \cdots\right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots \tag{28-109}$$

Se puede reconocer al momento el segundo término, dado que es simplemente la *energía cinética* de la partícula en mecánica newtoniana. Por consiguiente, parece muy razonable, en este caso más general, llamar a W la *energía total* de la partícula. Se ve que, si la partícula está en reposo ($v = 0$), el valor de E es $m_0 c^2$, el cual se denomina *energía en reposo*. En consecuencia es costumbre considerar a la energía total de la partícula como compuesta de dos partes–una parte intríseca debida a su masa en reposo (la energía en reposo) y la parte adicional, la cual aparece cuando la partícula está en movimiento. Así, si se considera a T como la energía cinética, se puede escribir

$$W = m_0 c^2 + T \tag{28-110}$$

$$T = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} - 1 \right\} \tag{28-111}$$

de acuerdo con (28-108).

Así, la cuarta componente del cuadrimomento ha resultado ser simplemente proporcional a la energía de la partícula. Esto demuestra que el momento lineal y la energía de una partícula no se deben considerar como entidades diferentes, sino simplemente como dos aspectos de los mismos atributos de la partícula, dado que ellos aparecen como componentes separados del mismo cuadrivector.

Esta última observación se puede ilustrar en forma cuantitativa. Puesto que P_μ es un cuadrivector, se transforma de acuerdo con (28-78), y si se emplea la segunda forma de ésta para la tranformación de Lorentz particular dada por (28-77), se obtiene

$$\begin{aligned} P_x &= \gamma\left(P_x' + \frac{\beta}{c} W'\right) \qquad P_y = P_y' \\ P_z &= P_z' \qquad W = \gamma(W' + \beta c P_x') \end{aligned} \tag{28-112}$$

demostrándose en forma clara que lo que aparece como energía en un sistema, aparece como momento lineal en otro; e inversamente, lo que aparece como momento lineal en un sistema es energía en otro.

Ejemplo

Partícula en reposo en S'. Aquí $v' = 0$ por lo que $P_x' = P_y' = P_z' = 0$ y $W' = m_0c^2$ por (28-100) y (28-108). Insertando estas expresiones en (28-112) y empleando (28-26) y (28-27), se encuentra que

$$P_x = \frac{m_0 V}{[1-(V^2/c^2)]^{1/2}} \qquad W = \frac{m_0 c^2}{[1-(V^2/c^2)]^{1/2}} \tag{28-113}$$

y $P_y = P_z = 0$. Estos resultados son exactamente lo que se debe esperar por (28-100) y (28-108), puesto que desde el punto de vista del observador en S, la partícula se está moviendo a lo largo del eje x con velocidad V. Así, la partícula tiene sólo energía (en reposo) en S', pero tiene tanta energía como impulso con respecto a S.

Se puede ver ahora el significado de la cuarta componente de la fuerza de Minkowski. Se encuentra de (28-101), (28-107) y (28-52) que

$$F_4 = \frac{dP_4}{d\tau} = \frac{i}{c}\frac{dW}{d\tau} = \frac{i}{c[1-(v^2/c^2)]^{1/2}}\frac{dW}{dt} \tag{28-114}$$

y es proporcional a la razón temporal de cambio de la energía, o a la razón con que la fuerza está efectuando trabajo sobre la partícula.

Esto se puede ver en otra forma muy diferente, la cual constituye una justificación adicional para la interpretación de W como la energía. Se encuentra de (28-99) y (28-83) que

$$\sum_\mu P_\mu^2 = m_0^2 \sum_\mu U_\mu^2 = -m_0^2c^2 \tag{28-115}$$

y, derivando esta expresión con respecto a τ y empleando (28-101), se obtiene

$$\sum_\mu P_\mu \frac{dP_\mu}{d\tau} = \sum_\mu P_\mu F_\mu = 0 \tag{28-116}$$

[Puesto que el producto escalar de P_μ y F_μ es cero, se puede decir que el cuadrimomento y la cuadrifuerza son siempre "perpendiculares", por analogía con (1-15)]. Si se escribe en forma completa y en detalle (28-116) y se emplean (28-100), (28-104) y (28-114), se obtiene

$$P_4F_4 = -\sum_{j=1}^{3} P_jF_j = -\mathbf{P}\cdot\mathbf{F} = -\frac{m_0\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}}{1-(v^2/c^2)}$$
$$= \left\{\frac{im_0c}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}}\right\}\left\{\frac{i}{c[1-(v^2/c^2)]^{1/2}}\frac{dW}{dt}\right\}$$

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \tag{28-117}$$

Este resultado demuestra en forma explícita que la razón temporal de cambio de W es igual a la razón con la cual la fuerza efectúa trabajo sobre la partícula y, puesto que ésta es la definición de la razón de incremento de la energía en mecánica, resulta justamente lo que debe esperarse encontrar a partir de la interpretación de W.

A la energía se le puede expresar también en términos del momento lineal escribiendo (28-115) en forma completa y empleando (28-107). El resultado es que

$$W^2 = c^2 \sum_{j=1}^{3} P_j^{\,2} + \left(m_0 c^2\right)^2 = (\mathbf{P}c)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2 \tag{28-118}$$

el cual es un punto conveniente para iniciar el desarrollo de la formulación Hamiltoniana de la mecánica relativista.

Otros aspectos importantes de la mecánica que aún no se han analizado en forma explícita son las leyes de la conservación del momento y de la energía. Puesto que se ha visto que ya no resulta adecuado considerar al momento lineal y a la energía como entidades separadas, parecería que la generalización relativista natural sería simplemente la conservación del cuadrimomento. De hecho, esto es exactamente lo que se ha encontrado como correcto en forma experimental y, además, esta ley generalizadora de la conservación es válida para un sistema de partículas, aun cuando el número de partículas y sus masas en reposo sean diferentes en los estados iniciales y finales. El concepto de la conservación del cuadrimomento es particularmente útil en el estudio de las colisiones. En forma cuantitativa, esta ley de conservación se puede escribir como las cuatro ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{N} P_\mu{}^b(j) = \sum_{k=1}^{N'} P_\mu{}^a(k) \qquad (\mu = 1,2,3,4)$$

donde $P_\mu{}^b(j)$ es la componente μ-ésima del cuadrimomento de la partícula j-ésima antes de la colisión (o interacción general); de manera similar, el índice superior derecho indica los valores después de la colisión. Esta ecuación permite también que el número de partículas cambie de N a N'. El hecho de que se conserve la suma de P_4 demuestra que las energías en reposo y la energías cinéticas *no* necesitan conservarse en forma individual aun cuando su suma sí. En otras palabras, la masa en reposo y la energía cinética se deben convertir una en la otra. Esta ley de conservación se ha verificado bien de manera experimental, particularmente en reacciones que comprenden núcleos atómicos y colisiones de partículas de alta energía de diferentes clases. La excelente concordancia con el aspecto experimental proporciona una evidencia adicional en favor de la corrección básica de la relatividad especial.

28-5 Electromagnetismo en el vacío

En contraste con la mecánica, se verá que el electromagnetismo, según lo describen las ecuaciones de Maxwell para el vacío, es ya covariante con respecto a transformaciones de Lorentz. No se requirió esto en forma directa, aun cuando el segundo postulado se ocupó de la invariancia de una de las consecuencias de las ecuaciones de Maxwell.

En principio, se sabe por (28-91) cómo se transforman los operadores diferenciales en las ecuaciones de Maxwell, pero serían también convenientes las propiedades de transformación de ρ, **J**, **E**, **B**, **A** y ϕ .

Se empieza con la ecuación de continuidad (12-13), la cual expresa la propiedad fundamental de la conservación de la carga. En realidad se desea que ésta sea covariante, esto es, se desea que

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \qquad \text{y} \qquad \nabla'\cdot\mathbf{J}'+\frac{\partial\rho'}{\partial t'}=0 \tag{28-119}$$

Si se introducen cuatro cantidades J_μ por medio de las respectivas igualdades dadas por

$$(J_1,J_2,J_3,J_4)=(J_x,J_y,J_z,ic\rho) \tag{28-120}$$

y se emplea (28-65), se encuentra que (28-119) se puede escribir como

$$\sum_\mu\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0 \qquad \text{y} \qquad \sum_\mu\frac{\partial J_\mu'}{\partial x_\mu'}=0 \tag{28-121}$$

La comparación de esto con (28-93) demuestra que tiene la forma de la divergencia de un cuadrivector, haciendo sospechar que el mismo J_μ es en realidad un cuadrivector.

Considérese un elemento de volumen $d\mathcal{V}$ en un sistema coordenado S en el cual las cargas tengan una velocidad **v**; la carga total en $d\mathcal{V}$ es $\rho d\mathcal{V}$. Ahora considérese un sistema coordenado S_0 en el cual las cargas estén en reposo ($\mathbf{v}_0 = 0$); a éste se le denomina *sistema en reposo*. En el elemento de volumen $d\mathcal{V}_0$ de S_0, que corresponde a $d\mathcal{V}$ de S, la carga total es $\rho_0 d\mathcal{V}_0$, donde ρ_0 es la densidad de carga en el sistema en reposo. No parece muy razonable esperar que la unidad de carga elemental básica-la de un protón o un electrón-cambiará sólo porque se le observe en otro sistema de coordenadas. Entonces, puesto que toda la carga es un múltiplo entero de esta unidad, como se mencionó con relación a (12-1), la forma de determinar la carga total es, en esencia, *contar* para encontrar un entero definido. Puesto que un entero es un invariante, se concluye que es razonable suponer que *la carga total es un invariante*. Esto da

$$\rho_0 d\mathcal{V}_0=\rho\, d\mathcal{V} \tag{28-122}$$

En este caso, la velocidad relativa de los sistemas S y S_0 es **v**. Puesto que se contraen las dimensiones a lo largo de la velocidad relativa, de acuerdo con (28-33), mientras que las dimensiones transversales al movimiento relativo no resultan afectadas, los dos volúmenes están relacionados por medio de

$$d\mathcal{V}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} d\mathcal{V}_0 \tag{28-123}$$

Combinando esto con (28-122) se obtiene la fórmula de transformación para densidades de carga:

$$\rho=\frac{\rho_0}{[1-(v^2/c^2)]^{1/2}} \tag{28-124}$$

En (12-3) se encontró que las densidades de corriente y de carga están relacionadas por $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$. Empleando esto, junto con (28-124) y (28-82), se encuentra que

$$J_x = \rho v_x = \frac{\rho_0 v_x}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}} = \rho_0 U_1$$

De manera similar, se encuentra que $J_y = \rho_0 U_2$, $J_z = \rho_0 U_3$, $ic\rho = \rho_0 U_4$, por lo que (28-120) se puede escribir como

$$J_\mu = \rho_0 U_\mu \tag{28-125}$$

Esto demuestra que $J\mu$ es en realidad un cuadrivector, puesto que es el producto de otro cuadrivector (la cuadrivelocidad) y el invariante escalar ρ_0 (densidad de carga del sistema en reposo). A este cuadrivector se le denomina *cuadricorriente*. Así, la ecuación de continuidad (28-121) ha sido escrita de manera correcta en forma covariante.

La propiedades de transformación de J_μ están dadas por (28-78) o, para poner esto en otra forma, se ve que J_x, J_y, J_z, ρ se transforman como x, y, z, t, respectivamente. Por lo tanto, para la transformación particular de Lorentz (28-24), se puede decir de inmediato que

$$\begin{aligned} J_x' &= \gamma(J_x - V\rho) \qquad J_y' = J_y \\ J_z' &= J_z \qquad \rho' = \gamma\left(\rho - \frac{V}{c^2}J_x\right) \end{aligned} \tag{28-126}$$

mientras que las ecuaciones inversas

$$J_x = \gamma(J_x' + V\rho') \qquad \rho = \gamma\left(\rho' + \frac{V}{c^2}J_x'\right) \tag{28-127}$$

proceden de (28-25).

Ejemplo

Corriente de convección. Supóngase que S' está fijo dentro de un cuerpo material que se mueve con velocidad constante v en relación con S. Entonces se puede emplear (28-127) si se sustituye V por v. Si se va ahora al límite no relativista donde $v/c \ll 1$, de manera que $\lambda \sim 1$, entonces (28-127) da

$$J_x \simeq J_x' + v\rho' \qquad \rho \simeq \rho' \tag{28-128}$$

Mientras la densidad de carga permanezca constante, la densidad de corriente observada en S es la suma de J_x' observada en S' y la *corriente de convección* $v\rho'$ debida al movimiento de la densidad de carga ρ' con respecto a S; se han mencionado ya corrientes de convección que aparecen justo en esta forma, al final de la sección 12-2.

Si se definen las cuatro cantidades A_μ por medio de

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = \left(A_x, A_y, A_z, \frac{i\phi}{c}\right) \tag{28-129}$$

entonces, con el empleo de (28-94) y (28-120), se pueden combinar las cuatro ecuaciones (27-1) y (27-2) en

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu \tag{28-130}$$

puesto que

$$\Box^2(i\phi/c) = -i\rho/c\epsilon_0 = -J_4/c^2\epsilon_0 = -\mu_0 J_4$$

La condición de Lorentz (27-3) resulta ser entonces simplemente

$$\sum_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \tag{28-131}$$

Puesto que (28-130) demuestra que operando sobre A_μ con un invariante se llega a un cuadrivector, se ve que $A\mu$ es un cuadrivector; a éste se le denomina *cuadripotencial.*

Las ecuaciones 28-130 y 28-131 son las formas covariantes de las ecuaciones de Maxwell cuando se escriben en términos de los potenciales. Ahora se pueden considerar los campos **E** y **B**.

Puesto que se ha estado obteniendo **B** de **B** = ∇ × **A**, parece que sería útil investigar la versión tetradimensional de esta ecuación según se expresa en (28-95). Porconsiguiente, se define el *tensor de campo electromagnético* antisimétrico, $f_{\mu\nu}$, por medio de

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \tag{28-132}$$

Después se encuentra, por ejemplo, con el empleo de (28-129), que

$$f_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z$$

De manera similar

$$f_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{i}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{ic}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{iE_x}{c}$$

puesto que $E = -\nabla\phi - (\partial \mathrm{A}/\partial t)$. Continuando en esta forma se encuentra que **E** y **B** aparecen en las componentes de $f_{\mu\nu}$ como sigue:

$$f_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\dfrac{iE_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\dfrac{iE_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\dfrac{iE_z}{c} \\ \dfrac{iE_x}{c} & \dfrac{iE_y}{c} & \dfrac{iE_z}{c} & 0 \end{bmatrix} \tag{28-133}$$

Puesto que se sabe cómo se transforman las componentes de un tensor, se pueden encontrar las propiedades de transformación de las componentes del campo; se regresará a esto en breve.

Se puede demostrar entonces que todas las ecuaciones de Maxwell, cuando se escriben en términos de los campos, están contenidas en el siguiente sistema covariante de ecuaciones:

$$\frac{\partial f_{\lambda\rho}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_{\rho\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_\rho} = 0 \tag{28-134}$$

$$\sum_\nu \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu \tag{28-135}$$

A fin de ver cómo ocurre esto, considérese la primera componente de (28-134), o sea, la forma en la cual *no* aparece el índice *uno*; empleando(28-133) se encuentra que es

$$\frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} = 0 = -\frac{i}{c}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{i}{c}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{1}{ic}\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

la cual se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

que es la componente x de $\times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$. De manera similar, se puede demostrar que las componentes restantes de (28-134) dan las componentes y y z de la ley de Faraday, así como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Si se hace $\mu = 1$ en (28-135), y se emplean (28-133) y (28-120), se obtiene

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = \mu_0 J_1 = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{iE_x}{c}\right)$$

lo cual también se puede escribir como

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 J_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

que es la componente x de $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + c^{-2}\,(\partial \mathbf{E}/\partial t)$, esto es la forma de (21-33) para el vacío. Las dos componentes restantes de esta ecuación se obtienen para $\mu = 4$ en (28-135) se encuentra, naturalmente que el resultado es la ecuación de Maxwell restante para la versión en el vacío de (21-30) a (21-33); esto es, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$.

De acuerdo con (28-84), las componentes del tensor de campo electromagnético se transformarán como

$$f_{\mu\nu}' = \sum_{\lambda\rho} a_{\mu\lambda} a_{\nu\rho} f_{\lambda\rho} \tag{28-136}$$

y se puede emplear esta expresión junto con (28-133) para obtener las fórmulas de transformación para **E** y **B**. Se hará esto sólo para la transformación particular de Lorentz descrita por medio de (28-77).

Como ejemplo se considera la componente 14 de (28-136). Recordando que $f_{\rho\lambda} = -f_{\lambda\rho}$, se obtiene

$$\begin{aligned} f_{14}' = -\frac{iE_x'}{c} &= \sum_{\lambda\rho} a_{1\lambda} a_{4\rho} f_{\lambda\rho} = \sum_{\lambda} a_{1\lambda}(a_{41} f_{\lambda 1} + a_{44} f_{\lambda 4}) \\ &= a_{11}(a_{41} f_{11} + a_{44} f_{14}) + a_{14}(a_{41} f_{41} + a_{44} f_{44}) \\ &= (a_{11} a_{44} - a_{14} a_{41}) f_{14} = (\gamma^2 - \beta^2\gamma^2) f_{14} \\ &= f_{14} = -\frac{iE_x}{c} \end{aligned}$$

y por lo tanto, $E_x' = E_x$. De manera similar, se encuentra que la componente 42 de (28-136) conduce a

$$\begin{aligned} f_{42}' = \frac{iE_y'}{c} &= \sum_{\lambda\rho} a_{4\lambda} a_{2\rho} f_{\lambda\rho} = \sum_{\lambda} a_{4\lambda} a_{22} f_{\lambda 2} \\ &= a_{41} f_{12} + a_{44} f_{42} = (-i\beta\gamma) B_z + \gamma\left(\frac{iE_y}{c}\right) \end{aligned}$$

por lo que $E_y' = \gamma(E_y - \beta c B_z) = \gamma(E_y - VB_z)$. Continuando este proceso se encuentra el conjunto completo de fórmulas de transformación, el cual es:

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x & B_x' &= B_x \\ E_y' &= \gamma(E_y - VB_z) & B_y' &= \gamma\left(B_y + \frac{VE_z}{c^2}\right) \\ E_z' &= \gamma(E_z + VB_y) & B_z' &= \gamma\left(B_z - \frac{VE_y}{c^2}\right) \end{aligned} \qquad (28\text{-}137)$$

Las transformaciones inversas son

$$E_x = E_x' \qquad E_y = \gamma(E_y' + VB_z'), \text{ etc.}$$

y se obtienen intercambiando las cantidades primas y no primas y cambiando el signo de V.

Ahora que se tienen estos resultados, se puede ver que ya no es necesaria la restricción al caso en el cual la velocidad relativa **V** de S' con respecto a S es a lo largo del eje x. Ya que la corriente del eje x es por completo arbitraria, se pueden introducir las componentes del campo paralelas (‖) y perpendiculares (⊥) a la dirección de la traslación relativa, y se puede escribir (28-137) en la forma general:

$$\mathbf{E}_{\|}'=\mathbf{E}_{\|} \qquad \mathbf{B}_{\|}'=\mathbf{B}_{\|}$$

$$\mathbf{E}_{\perp}'=\gamma(\mathbf{E}_{\perp}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}_{\perp}) \qquad \mathbf{B}_{\perp}'=\gamma\left(\mathbf{B}_{\perp}-\frac{\mathbf{V}}{c^2}\times\mathbf{E}_{\perp}\right) \tag{28-138}$$

$$=\gamma(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})_{\perp} \qquad =\gamma\left(\mathbf{B}-\frac{\mathbf{V}}{c^2}\times\mathbf{E}\right)_{\perp}$$

donde se tiene $\mathbf{E}=\mathbf{E}_{\|}+\mathbf{E}_{\perp}$ y $B=\mathbf{B}_{\|}+\mathbf{B}_{\perp}$.

Se nota que en el límite no relativista, $V/c \ll 1$, $\gamma \sim 1$ y (28-138) resulta ser $\mathbf{E}' \sim E +$ $\mathbf{V}\times\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}' \sim \mathbf{B}$. El primer resultado es exactamente (28-1) con **v** sustituida ahora apropiadamente por **V**, el cual se dedujo considerando la ley de Faraday con el auxilio de la ley de la fuerza de Lorentz.

Estos resultados demuestran en forma clara que los vectores **E** y **B** de los campos eléctrico y magnético, en realidad no tienen existencia independiente como entidades separadas. El complejo fundamental es el tensor de campo $f_{\mu\nu}$ y la resolución en componentes eléctrica y magnética es en todo relativa al movimiento del observador. Esto se puede ilustrar muy bien considerando dos ejemplos extremos.

Ejemplo

Caso eléctrico puro en S. Supóngase que $\mathbf{E} \neq 0$, pero que $\mathbf{B}=0$. Entonces se encuentra de (28-138) que en S' se tendrá

$$\mathbf{E}_{\|}'=\mathbf{E}_{\|} \qquad \mathbf{E}_{\perp}'=\gamma\mathbf{E}_{\perp}$$

$$\mathbf{B}_{\|}'=0 \qquad \mathbf{B}_{\perp}'=-\frac{\gamma}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{E}_{\perp}$$

por lo que

$$\mathbf{B}'=\mathbf{B}_{\perp}'=-\frac{\mathbf{V}\times\mathbf{E}_{\perp}'}{c^2}=-\frac{\mathbf{V}\times\mathbf{E}'}{c^2} \tag{28-139}$$

puesto que $\mathbf{V}\times\mathbf{E}_{\|}'=0$. Así, lo que parece ser puramente un campo eléctrico a un observador, aparece como un campo combinado eléctrico y magnético a un segundo observador en movimiento con respecto al primero.

Ejemplo

Caso magnético puro S. Ahora supóngase que $\mathbf{E}=0$ en tanto que $\mathbf{B}\neq 0$. Entonces se encuentra de (28-138) que en S' se tendrá

$$\mathbf{B}_{\|}'=\mathbf{B}_{\|} \qquad \mathbf{B}_{\perp}'=\gamma\mathbf{B}_{\perp}$$

$$\mathbf{E}_{\|}'=0 \qquad \mathbf{E}_{\perp}'=\gamma\mathbf{V}\times\mathbf{B}_{\perp}$$

por lo que

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}_{\perp}'=\mathbf{V}\times\mathbf{B}_{\perp}'=\mathbf{V}\times\mathbf{B}' \tag{28-140}$$

y lo que parece ser puramente un campo magnético para un observador parecerá ser tanto un campo eléctrico como uno magnético a un observador en movimiento relativo con respecto al primero.

Las ecuaciones de transformación (28-137) ó (28-138) a veces permiten resolver con mayor facilidad ciertos problemas, dado que es posible elegir un sistema de coordenadas en el cual se pueda encontrar con gran facilidad la respuesta y se puedan obtener después los resultados deseados por medio de una transformación retrospectiva al sistema real de interés. No se obtendrán de esta manera resultados que no se puedan obtener por medio de la solución de la ecuaciones de Maxwell, pero el problema resulta por lo general más fácil y rápido cuando es aplicable tal método. En las siguiente sección se ilustra este método con un ejemplo instructivo e importante.

28-6 Campos de una carga puntual en movimiento uniforme

Se considera una carga puntual, q, moviéndose con velocidad constante, **v**, con respecto al sistema S, según se muestra en la figura 28-7. Se tiene interés en los campos asociados con esta situación de estado estacionario, esto es, no se considerarán los efectos de la aceleración inicial de la carga durante la cual se sabe por (27- 70) que ella irradiará.

Una buena elección para S' podría ser el sistema en el cual q está en reposo en el origen, porque entonces el campo S' es justamente el campo coulombiano electrostático de una carga puntual; así se obtiene

$$\mathbf{E}' = \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \qquad \mathbf{B}' = 0 \tag{28-141}$$

donde $\mathbf{r}'$ es el vector de posición del punto donde el campo va a ser evaluado y

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{28-142}$$

Insertado (28-141) en (28-137) y empleando (28-142), (28-24) y (28-23), con v sustituyendo a V, se encuentra que una de las componentes del campo en S es

$$E_x = E_x' = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{q\gamma(x - vt)}{4\pi\epsilon_0\left[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} \tag{28-143}$$

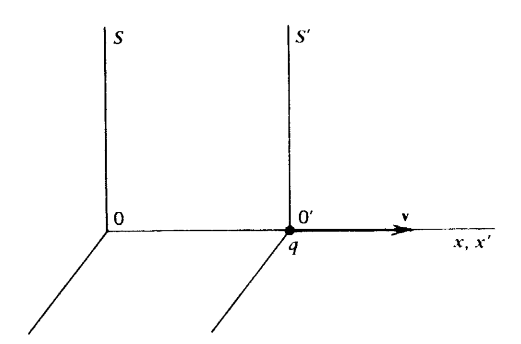


Figura 28-7. La carga puntual q se está moviendo con velocidad constante con respecto a S.

donde ahora

$$\gamma=\frac{1}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}} \tag{28-144}$$

Será conveniente expresar esto en términos de la posición de q con respecto a S. Si se hace $X = vt$, de modo que las coordenadas de q sean $(X, 0, 0)$, se puede también escribir (28-143) como

$$E_x=\frac{q\gamma(x-X)}{4\pi\epsilon_0\left[\gamma^2(x-X)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{28-145}$$

Las otras dos componentes de **E** se pueden encontrar a partir de las formas inversas apropiadas de (28-137), y los resultados son

$$E_y=\frac{q\gamma y}{4\pi\epsilon_0\left[\gamma^2(x-X)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{28-146}$$

$$E_z=\frac{q\gamma z}{4\pi\epsilon_0\left[\gamma^2(x-X)^2+y^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{28-147}$$

Estas últimas tres ecuaciones dan el campo eléctrico en el punto (x, y, z) en S, cuando la carga puntual q está en $(X, 0, 0)$ en el mismo sistema.

Se podría encontrar también el valor de **B** por medio de (28-137), pero es más sencillo emplear sólo el resultado (28-139) obtenido para el caso eléctrico puro. Así, cuando se toma en cuenta el intercambio de S y S' *se obtiene*

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{c^2} \tag{28-148}$$

de lo cual se podrían encontrar las componentes explícitas de **B** si se deseara. Se ve que las líneas de **B** son círculos cuyos centros están sobre la línea de movimiento de la carga; esto es razonable en virtud del reconocimiento previo de la equivalencia de una carga en movimiento con un elemento de corriente.

Así, se ha encontrado la solución exacta a este problema de una manera comparativamente sencilla. A fin de investigar las características de este campo, es algo más fácil observarlo en el instante en que la carga está en el origen en S, esto es, cuando $t = 0$. La estructura básica del campo será la misma en todos los tiempos posteriores, y se puede obtener simplemente trasladando el resultado para $t = 0$ a lo largo del eje x, con velocidad v. Haciendo $X = 0$ en (28-145) a (28-147), se encuentra que se puede escribir **E** en términos del vector de posición **r** del punto del campo en S como

$$\mathbf{E}=\frac{q\gamma\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{28-149}$$

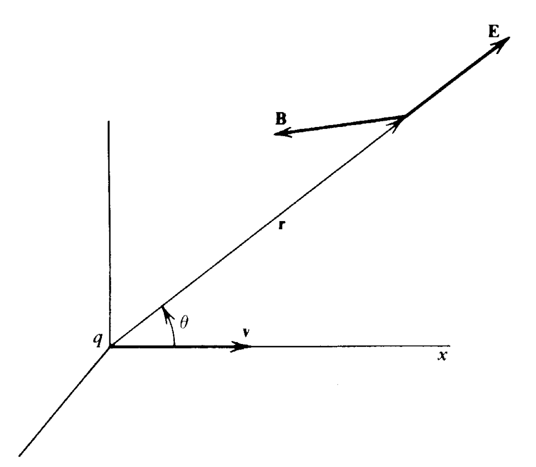


Figura 28-8. Los campos de una carga puntual con movimiento uniforme.

lo cual demuestra que **E** está dirigido en forma radial hacia afuera de la carga, en tanto que (28-148) demuestra que **B** es perpendicular al plano de **v** y **E**. En la figura 28-8 se ilustra esta situación.

Es útil expresar los resultados en términos de la distancia r desde la carga y el ángulo θ que forma **r** con la dirección de la velocidad. Se ve por la figura que $x = r \cos \theta$ mientras que $y^2 + z^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$, por lo que

$$\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \gamma^2 (1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \tag{28-150}$$

donde ahora $\beta = v/c$. Sustituyendo (28-150) en (28-149) se obtiene

$$\mathbf{E} = \frac{q(1-\beta^2)\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2}} \tag{28-151}$$

expresión que demuestra que el campo es cuadrado inverso en su dependencia de la distancia radial desde la carga, pero que a una distancia dada, su magnitud depende fuertemente de la dirección, en contraste con el simple campo coulombiano.

A fin de ilustrar la dependencia de la magnitud respecto de la dirección, considérese primero dos situaciones extremas. Directamente enfrente o detrás ($\theta = 0$ ó $180°$) se tiene

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(1 - \beta^2)$$

en tanto que a un lado ($\theta = 90°$) se encuentra que

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

Por lo que, para una carga con movimiento muy rápido para la cual $\beta \simeq 1$, se ve que, a una distancia dada, $E_{\parallel}$ es muy pequeño en tanto que $E_{\perp}$ es muy grande. (Cuando $\beta \rightarrow 0$, ambas componentes resultan iguales entre sí y al campo coulombiano estático).

En la figura 28-9 se ilustran también estos efectos, mostrándose la magnitud de **E** a

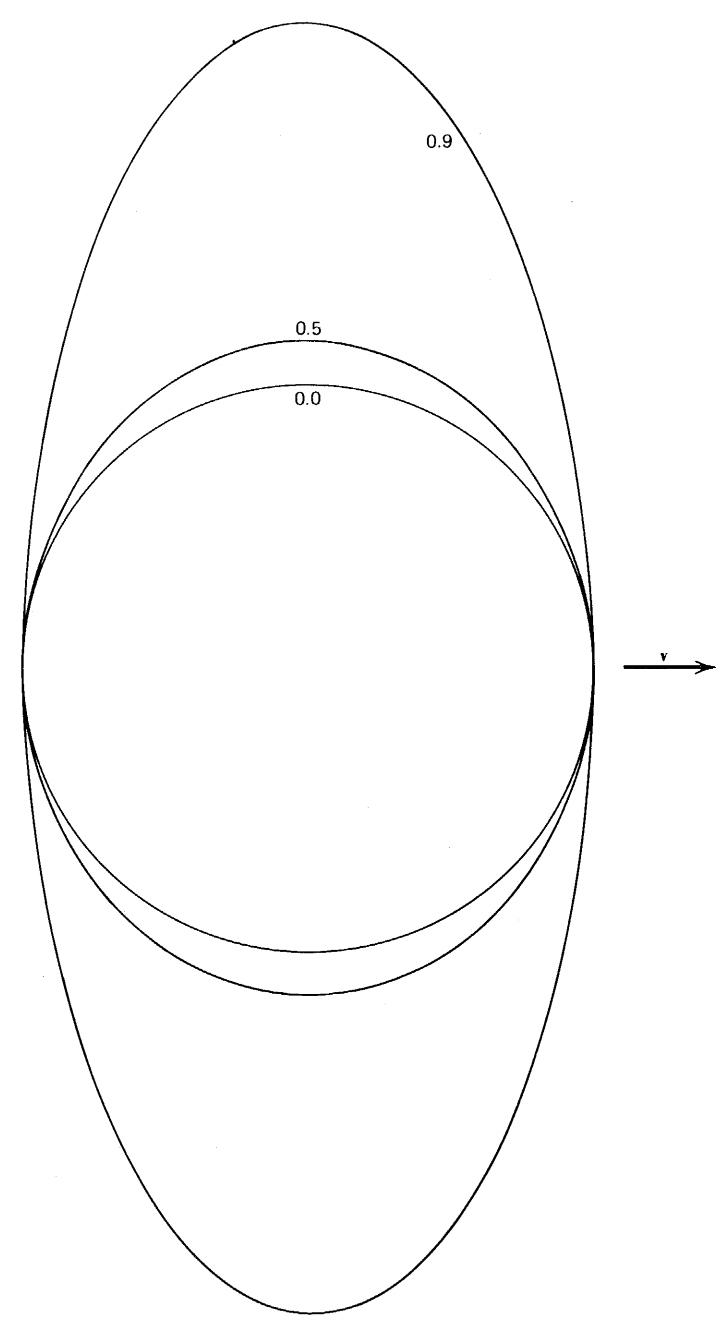


Figura 28-10. La magnitud del potencial escalar como una función del ángulo para tres valores diferentes de B.

una distancia dada, graficada como una función del ángulo θ para $\beta = 0.0, 0.5$ y 0.9; esto es, $E/[q/4\pi\epsilon_0 r^2]$ es lo que se muestra. Se ve de nuevo que para una carga con movimiento rápido, el campo se concentra en un ángulo pequeño alrededor del plano ecuatorial.

Es también aconsejable considerar este problema en términos de los potenciales. El campo electrostático en S', descrito por (28-141), corresponde a los potenciales

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \qquad \mathbf{A}' = 0 \tag{28-152}$$

y por lo tanto, $A_1{}' = A_2{}' = A_3{}' = 0$ y $A_4{}' = i\phi/c$ por (28-129). Insertando estos valores en la segunda forma de (28-78) y empleando (28-77) y (28-24), se encuentra que los potenciales correspondientes en S son

$$\frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0\left[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}} \tag{28-153}$$

$$\frac{\beta\gamma\phi'}{c}\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0\gamma q\mathbf{v}}{4\pi\left[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2\right]^{1/2}} \tag{28-154}$$

puesto que $A_y = A_z = 0$.

Si se observa el caso especial para $t = 0$ y se emplea (28-150), se encuentra que los potenciales se pueden escribir como

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r(1-\beta^2\operatorname{sen}^2\theta)^{1/2}} \tag{28-155}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q\mathbf{v}}{4\pi r(1-\beta^2\operatorname{sen}^2\theta)^{1/2}} \tag{28-156}$$

donde r es la distancia desde la carga al punto de campo.

Se nota que el potencial vectorial tiene la dirección de la velocidad de la carga y que, cuando $\beta \ll 1$, $\mathbf{A} \simeq (\mu_0/4\pi)(q\mathbf{v}/r)$, en acuerdo con (16-14), justificándose así las observaciones de la sección 14-5 acerca de la aplicabilidad de los resultados anteriores a cargas moviéndose lentamente.

Ambos potenciales dependen en la misma forma de θ. Directamente delante (o detrás) de la carga, donde $\theta = 0°$ (ó $180°$), $\phi = q/4\pi\epsilon_0 r$ e igual al valor estático. No obstante, cuando $\theta = 90°$, $\phi = q/[4\pi\epsilon_0 r(1-\beta^2)^{1/2}] = \gamma\phi_{\text{estático}}$ y es mayor por el factor γ. En la figura 28-10 se ilustra la dependencia angular general, mostrando a $\phi/[q/4\pi\epsilon_0 r]$ como una función de θ para $\beta = 0.0, 0.5$ y 0.9, correspondiendo a los valores de la figura 28-9.

Ejercicios

28-1 Demuéstrese por sustitución directa de (28-24) en (28-7), que la transformación de Lorentz conserva la forma de la ecuación de onda, esto es, si $\partial^2\psi/\partial x^2 = \partial^2\psi/c^2\partial t^2$, entonces $\partial^2\psi/\partial x'^2 = \partial^2\psi/c^2\partial t$.

28-2 Si la contracción de Lorentz (28-33) se supone que representa una contracción física real de la barra en movimiento, demuéstrese que esto explicaría el resultado del experimento de Michelson-Morley.

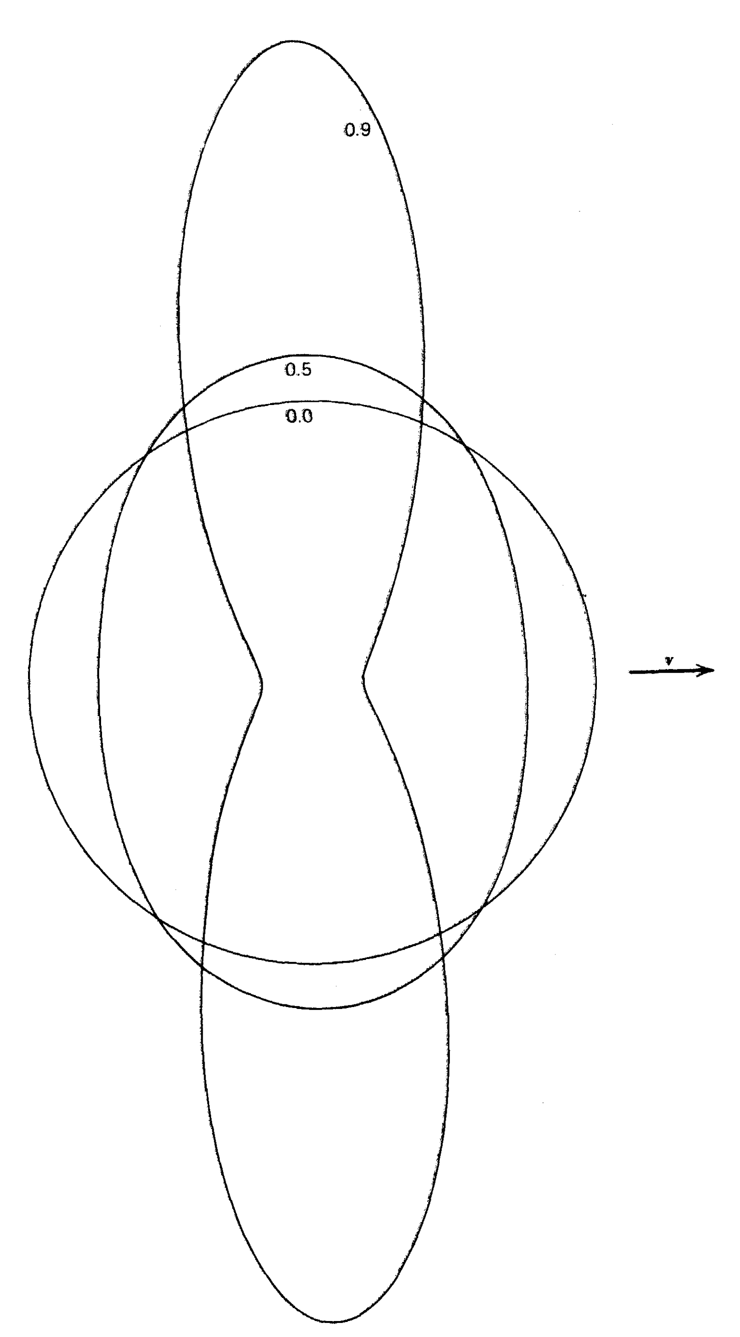


Figura 28-9. La magnitud del campo eléctrico como una función del ángulo para tres valores diferentes de B.

28-3 La vida promedio de un mesón μ antes del decaimiento radiactivo, cuando se mide en su sistema "en reposo", es 2.22×10^{-6} segundo. ¿Cuál será su vida promedio para un observador con respecto al cual el mesón tiene la velocidad de 0.99 c? ¿Cuánto viajará el mesón en este tiempo?

28-4 Una barra rígida de longitud L forma un ángulo θ con el eje x del sistema en el cual se encuentra en reposo. Demuéstrese que, para un observador moviéndose con respecto a la barra, la longitud aparente L' y el ángulo θ' están dados por

$$\frac{m_0}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{f}-\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f})}{c^2}\mathbf{v}$$

28-5 Demuéstrese que dos transformaciones de Lorentz sucesivas correspondientes a las velocidades V_1 y V_2 en la misma dirección, son equivalentes a una transformación de Lorentz única con una velocidad $V = (V_1 + V_2)/[1 + (V_1 V_2/c^2)]$. ¿Este resultado es compatible con (28-37)?

28-6 Demuéstrese que las fórmulas de transformación de velocidades se pueden escribir en forma vectorial como $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_{\parallel}' + \mathbf{V} + (\mathbf{v}_{\perp}'/\gamma)]/[1 + (\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}')/c^2]$, donde $\mathbf{v}_{\parallel}'$ es la componente de velocidad paralela a la velocidad relativa $\mathbf{V}$ de S y S', mientras que $\mathbf{V}_{\perp}$ es la componente perpendicular a $\mathbf{V}$.

28-7 Encuéntrese las leyes de transformación para las componentes de la aceleración, $a_x = dv_x/dt$, y así sucesivamente.

28-8 Fizeau midió el índice de refracción de la luz en el agua corriente. Su resultado se puede expresar en términos de la velocidad de fase v en el medio en movimiento, de índice de refracción n y velocidad de flujo V, como $v = v_0 + V[1 - (1/n^2)]$, donde $v_0 = c/n$ es la velocidad de fase en el medio estacionario. Demuéstrese que esto procede de (28-37) para el caso $V/c \ll 1$.

28-9 Si los ángulos θ y θ' de la figura 28-5 son ambos pequeños y si $\beta \ll 1$, demuéstrese que los ángulos están relacionados aproximadamente por $\theta \simeq (1 - \beta)\theta'$, por lo que su diferencia fraccional es $(\theta' - \theta)/\theta' \simeq \beta = V/c$.

28-10 Demuéstrese que $[1 - (v'^2/c^2)]^{1/2}/[1 - (v^2/c^2)]^{1/2} = \gamma[1 + (\beta v_x'/c)] = \{\gamma[1 - (\beta v_x/c)]\}^{-1}$.

28-11 Verifíquese que los $a_{\mu\nu}$ dados en (28-77) satisfacen los requisitos (28-69) y (28-75).

28-12 Demuéstrese que si $\Sigma_\mu A_\mu B_\mu$ es un invariante para cualquier cuadrivector A_μ arbitrario, entonces B_μ es también un cuadrivector.

28-13 Demuéstrese que las cantidades definidas en (28-89) son cuadrivectores.

28-14 La *cuadriaceleración* está definida por $a_\mu = dU_\mu/d\tau = d^2x_\mu/d\tau^2$. Demuéstrese que sus componentes están relacionadas con la aceleración ordinaria **a** y la velocidad **v** por medio de

$$a_1=\frac{1}{\left[1-(v^2/c^2)\right]}\left\{a_x+\frac{(v_x/c^2)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})}{\left[1-(v^2/c^2)\right]}\right\}, \text{ etc.}$$

$$a_4=\frac{(i/c)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^2}$$

28-15 Si **k** y ω son el vector de propagación y la frecuencia angular de una onda plana en el espacio libre, demuéstrese que $k_\mu = (K, i\omega/c)$ es un cuadrivector. Empléense las propiedades de transformación de k_μ para deducir las fórmulas de Doppler y de la aberración, (28-47) y (28-49) respectivamente.

28-16 Dedúzcase el conjunto de coeficientes $a_{\mu\nu}$ que describen una transformación general de Lorentz que consiste en una rotación de 30° respecto del eje y más una traslación a lo largo del eje x' girando, con una velocidad constante $V = \frac{1}{2}c$.

28-17 Empleando las propiedades de tranformación de la fuerza de Minkowski F_μ, encuéntrense las leyes de transformación para la fuerza **f** y la potencia dW/dt ordinaria. (Los resultados del ejercicio 28-10 podrían ser de utilidad).

28-18 Para muchos propósitos fuera del alcance de este libro, a la radiación electromagnética se le puede tratar como compuesta de pequeños "paquetes" localizados de radiación, denominados *fotones*. Demuéstrese que, si se considera un fotón como una partícula de masa en reposo cero y energía total $W = h\nu$, donde h es la constante de Planck, se pueden obtener las fórmulas de Doppler y de la aberración (28-47) y (28-49 a partir de la leyes de transformación para el cuadrimomento P_μ.

28-19 Dos partículas, cada una de ellas de masa en reposo $\frac{1}{2} M_0$, están unidas por medio de un resorte comprimido de masa en reposo despreciable. Las partículas se mantienen juntas con una cuerda sin masa y el sistema íntegro está en reposo en un marco de coordenadas S_0. Se corta entonces la cuerda y las dos partículas se separan en direcciones opuestas, cada una de ellas con velocidad v_0. ¿Cuál es la energía potencial inicial del sistema en S_0? Transformando las velocidades a otro marco S, encuéntrese la energía final y el momento lineal, y en consecuencia la energía inicial y el momento, en S. Encuéntrese después la masa en reposo del sistema inicial en el marco S, e interprétese el resultado.

28-20 (*a*) Demuéstrese que las cantidades $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}^2 - c^2\mathbf{B}^2$ son invariantes. (*b*) Evalúense estas cantidades para una onda plana. (*c*) Demuéstrese que el enunciado acerca de que **E** y **B** son perpendiculares tiene un significado absoluto, esto es, que si son perpendiculares para un observador, serán perpendiculares para todos los observadores. (*d*) Demuéstrese que un campo que es puramente magnético en un marco, no puede ser transformado en uno que sea puramente eléctrico en otro marco de referencia diferente, e inversamente.

28-21 Una carga q está instantáneamente en reposo en S' y sujeta a un campo eléctrico $\mathbf{E}'$, de modo que la fuerza sobre ella es $\mathbf{f}' = q\mathbf{E}'$. Empléense las leyes de transformación para la fuerza que se encontraron en el ejercicio 28-17 y para los campos encontrados en (28-137) para demostrar que la fuerza en S es exactamente la fuerza de Lorentz $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V}\mathbf{X}\mathbf{B})$.

28-22 Demuéstrese que la ecuación relativista de movimiento (28-105) se puede escribir en la forma

$$\frac{m_0}{\left[1-(v^2/c^2)\right]^{1/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{f})}{c^2}\mathbf{v}$$

y que si **f** es la fuerza de Lorentz sobre una carga puntual, $q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\mathbf{X}\mathbf{B})$, el segundo miembro resulta ser $q\{\mathbf{E} + \mathbf{v}\mathbf{X}\mathbf{B} - [(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})/c^2]\mathbf{v}\}$

28-23 Demuéstrese que la ecuación de movimiento de una partícula de carga q en un campo electromagnético donde la fuerza está dada por $\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\mathbf{X}\mathbf{B})$ se puede escribir como

$$m_0\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = q\sum_\nu f_{\mu\nu}U_\nu$$

28-24 Encuéntrese la expresión explícita para el **B** debido a una carga puntual que se mueve de manera uniforme, en términos de **R**, el vector de posición relativa del punto de campo y de la ubicación de la carga. Demuéstrese que el resultado se reduce a (14-28) cuando $\beta \ll 1$.

28-25 Demuéstrese que los potenciales ϕ y **A** encontrados para una carga que se mueve de manera uniforme, en (28-153) y (28-154), dan los valores correctos de **E** y **B**.

28-26 Encuéntrese el vector de Poynting **S** para la carga puntual que se mueve de manera

uniforme. [Empléese, por sencillez, (28-149)]. Demuéstrese que la potencia neta irradiada por esta carga es cero.

28-27 Una carga puntual q_1 en $\mathbf{r}_1$ tiene una velocidad constante $\mathbf{v}_1$. Una segunda carga puntual q_2 está ubicada en $\mathbf{r}_2$ y tiene una velocidad instantánea $\mathbf{v}_2$. Encuéntrese la fuerza electromagnética total sobre q_2 debida a q_1. Demuéstrese que cuando el resultado se aplica al sistema de la figura 28-2, y si $V/c \ll 1$, entonces la fuerza magnética que se encuentra se reduce en forma correcta a (28-10).

28-28 Una línea recta infinitamente larga, cargada, con densidad de carga lineal λ, coincide con el eje x del sistema S. Encuéntrense los campos $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$ en un sistema S' con velocidad V en la dirección de x positiva. Compárese la expresión para $\mathbf{B}'$ con la correspondiente a un alambre conductor de corriente, según se da en (14-17), y demuéstrese que concuerdan. Nótese que $\mathbf{E}'$ es diferente de cero en el sistema en movimiento. ¿Cuál es la diferencia física entre un alambre conductor de corriente y una línea cargada moviéndose en la dirección de su longitud, que explicaría la aparición de $\mathbf{E}'$?

28-29 Un solenoide ideal infinitamente largo está en reposo en el marco S', con su eje paralelo al eje y'. Tiene n' vueltas por unidad de longitud y conduce una corriente estacionaria I'. Encuéntrese $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ dentro y fuera del solenoide para un observador en S para quien el solenoide está viajando con velocidad constante $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$. Bosquéjense las líneas de $\mathbf{E}$ e indíquese la naturaleza de la distribución de carga que se debe asociar con tal campo eléctrico. Demuéstrese que esta distribución de carga está en concordancia cualitativa con (28-127). ¿Observará un campo eléctrico alguien que vea al solenoide moviéndose con velocidad constante en la dirección de su eje?

28-30 Un dipolo eléctrico puntual de momento $\mathbf{p}'$ está en reposo en el origen de S'. Encuéntrense los potenciales escalar y vectorial producidos por este dipolo cuando le observa alguien en S. ¿Cómo se tranforman las componentes del momento dipolar? Explicar cualitativamente el hecho de que $\mathbf{A} \neq 0$.

28-31 En (27-72) se encontró una expresión para la rapidez total de radiación de una carga acelerada. Resultó proporcional al cuadrado del valor retardado de la aceleración, esto es, a $[\mathbf{a}]^2 = [\mathbf{a}] \cdot [\mathbf{a}]$. Una forma posible de generalizar esto sería sustituir el cuadrado de la aceleración real por el "cuadrado" de la cuadriaceleración a_μ. En esta forma se obtiene

$$\mathcal{P} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \sum_\mu [a_\mu]^2$$

Empléense los resultados del ejercicio 28-14 para expresar esto en términos de la aceleración y velocidad ordinarias, y verfíquese que el resultado se reduce a (27-72) en el límite apropiado. (A este resultado general se le conoce como fórmula de Lienard).

Apéndice

A
Movimiento de partículas cargadas

El interés principal hasta aquí ha sido en relación con las propiedades del campo electromagnético macroscópico. Se ha encontrado cómo es producido por sus fuentes y se ha aprendido cómo describir los efectos integrales de la presencia de la materia. Un empleo importante de **E** y **B** es controlar el movimiento de las partículas cargadas. Tales efectos tienen aplicación en el diseño de aparatos en donde se producen partículas con energías cinéticas grandes, que después se emplean en el estudio de reacciones en física nuclear y en física de "altas energías". Aparecen otras aplicaciones en astrofísica y geofísica, en física del plasma en general, en magnetohidrodinámica, en el estudio de reacciones termonucleares y en la construcción de dispositivos que emplean haces de partículas cargadas. No obstante aquello, este estudio se reducirá sólo a situaciones relativamente sencillas y básicas.

Se supone que la fuerza neta, **f**, sobre una partícula de carga q y posición **r** es la fuerza de Lorentz, $q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$, donde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad de la partícula. Igualando esto con la masa m_0 por la aceleración, se obtiene la ecuación de movimiento

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \tag{A-1}$$

El empleo de m_0 demuestra que se considerarán sólo casos no relativistas. En la situación más generalizada tanto **E** como **B** pueden ser cada una función de la posición y del tiempo. En muchas aplicaciones las partículas empleadas pueden interactuar entre sí, y también con otras partículas, principalmente por colisiones. Por lo tanto, el efecto de las colisiones debe incluirse en alguna forma en (A-1), pero aquí se tratará de no hacerlo.

Como se sabe por la mecánica, se necesita por lo general conocer también las condiciones iniciales del movimiento, esto es, la posición inicial $\mathbf{r}_0$ y la velocidad $\mathbf{v}_0$ en $t = 0$, a fin de obtener una solución completa de (A-1).

A-1 Campo eléctrico estático

Se supone que **E** es independiente del tiempo. Si $\mathbf{B} = 0$, entonces (A-1) se reduce a

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} \tag{A-2}$$

Si ahora se supone también que **E** es independiente de la posición, de manera que **E** sea un campo estático uniforme, entonces $d\mathbf{v}/dt$ es constante. Inmediatamente se puede integrar (A-2) dos veces para obtener la solución completa

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}(t)=\frac{q}{m_0}\mathbf{E}t+\mathbf{v}_0 \tag{A-3}$$

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=\frac{q}{2m_0}\mathbf{E}t^2+\mathbf{v}_0t+\mathbf{r}_0 \tag{A-4}$$

Para aplicar estos resultados a problemas específicos se puede, por ejemplo, escribir las componentes de (A-3) y (A-4) en coordenadas rectangulares. Así se encuentra $v_x(t) = q/m_0)E_x t + v_{0x}$, $x(t) = (q/2m_0)E_x t^2 + v_{0x}t + x_0$, con expresiones similares para las componentes y y z.

Para otras aplicaciones, a menudo resulta útil escribir algunas cantidades en términos de sus componentes paralela (||) y perpendicular (⊥) al campo **E**; así, se podría escribir

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_{\parallel}+\mathbf{v}_{\perp} \qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp} \tag{A-5}$$

Aplicando esto a (A-3) y (A-4) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\parallel}&=\frac{q}{m_0}\mathbf{E}t+\mathbf{v}_{0\parallel} \qquad \mathbf{v}_{\perp}=\mathbf{v}_{0\perp} \\ \mathbf{r}_{\parallel}&=\frac{q}{2m_0}\mathbf{E}t^2+\mathbf{v}_{0\parallel}t+\mathbf{r}_{0\parallel} \qquad \mathbf{r}_{\perp}=\mathbf{v}_{0\perp}t+\mathbf{r}_{0\perp} \end{aligned} \tag{A-6}$$

lo cual demuestra de manera explícita que sólo la componente de **v** paralela a **E** resulta afectada, mientras que su componente perpendicular a **E** permanece constante. Este problema es similar al de un punto masa en un campo gravitacional uniforme y, tal en ese caso, la trayectoria descrita por (A-4) es una parábola.

Si **E** no es uniforme, las trayectorias de la partícula pueden ser más o menos complicadas dependiendo de la dependencia precisa de **E** con respecto a la posición. Se considerará sólo una consecuencia integral de (A-2), que involucra cambios de energía.

Si la partícula se mueve de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$, el trabajo efectuado sobre la partícula *por* el campo es

$$\begin{aligned} W_{1\to2}&=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}=q\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-q\Delta\phi \\ &=-q[\phi(\mathbf{r}_2)-\phi(\mathbf{r}_1)] \end{aligned} \tag{A-7}$$

por (5-11), donde $\Delta\phi$ es el cambio en el potencial escalar. Ahora se sabe, también por la mecánica, que el trabajo efectuado por la fuerza neta es igual al cambio en la energía cinética.

$$T=\tfrac{1}{2}m_0v^2 \tag{A-8}$$

por lo que $W_{1\to2} = \Delta T = T_2 - T_1$. Igualando esto con (A-7) se encuentra que $T_2 + q\phi(\mathbf{r}_2) = T_1 + q\phi(\mathbf{r}_1)$ demostrando que

$$T+q\phi(\mathbf{r})=\tfrac{1}{2}m_0v^2+q\phi(\mathbf{r})=\text{const.} \tag{A-9}$$

lo cual es justamente el enunciado de la conservación de la energía, siendo $q\phi$ (**r**) la energía potencial de la partícula en el campo. Este último resultado, por supuesto, está de acuerdo con (5-48) donde se llegó a la misma conclusión.

A-2 Campo magnético estático

Se supone $\mathbf{B} \neq 0$ e independiente del tiempo. Si $\mathbf{E} = 0$, entonces (A-1) resulta ser

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{A-10}$$

Puesto que f y v son siempre perpendiculares, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$ y la inducción magnética no trabajó sobre la partícula; como consecuencia, la energía cinética (A-8) será constante.

Si se descompone v en sus componentes paralela y perpendicular, dadas por (A-5), se encuentra que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{\|}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m_0}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{q}{m_0}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$$

puesto que $\mathbf{v}_{\|} \times \mathbf{B} = 0$ por (1-22). Así se obtiene

$$\frac{d\mathbf{v}_{\|}}{dt} = 0 \qquad \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m_0}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} \tag{A-11}$$

ya que $\mathbf{v}\perp \times \mathbf{B}$ es también perpendicular a **B**.

Ahora supóngase que **B** es independiente de la posición, de manera que se tiene una inducción magnética uniforme. Se ve entonces que $\mathbf{v}_{\|}$ = constante, por lo que la partícula se mueve con velocidad uniforme en la dirección de **B**. Se ve que $d\mathbf{v}\perp/dt$ es siempre perpendicular tanto a $\mathbf{v}\perp$ como a **B**, y así la propia $\mathbf{v}\perp$ tiene una magnitud constante $v\perp$. En consecuencia, la magnitud de $vd\perp/dt$ será constante e igual a $(q/m_0)v\perp b$. En la figura A-1 se ilustra esta situación para q positiva y **B** saliendo del papel. Recuérdese que una aceleración de magnitud constante que siempre es perpendicular a la velocidad da por resultado un movimiento en una trayectoria circular. Se puede encontrar el radio, r_C, del círiculo observando que $d\mathbf{v}\perp/dt$ debe tener la magnitud de la aceleración centrípeta necesaria $v\perp^2/r_C$. Igualando esto con $(q/m_0)v\perp B$ se obtiene

$$r_C = \frac{m_0 v}{qB} \tag{A-12}$$

lo cual implica las propiedades de la partícula sólo mediante la razón de la carga a la masa. Se puede obtener también el periodo de revolución, τ_C, y la frecuencia angular, ω_C, notando que en un periodo la partícula recorre una distancia total $2\pi r_C$, por lo que $\tau_C = (2\pi r_C/v\perp)$; entonces ω_C queda dada por $\omega_C = 2\pi/\tau_C$. Combinando estas expresiones con (A-12) se encuentra que

$$\tau_C = \frac{2\pi m_0}{qB} \qquad \omega_C = \left(\frac{q}{m_0}\right)B \tag{A-13}$$

A ω_C se le da el nombre de *frecuencia de ciclotrón*. Se ve que las dos cantidades en (A-13) son independientes tanto de r_C como de $v\perp$. Las partículas más rápidas se mueven en círculos de mayor radio, por (A-12), pero todas las partículas del mismo valor de q/m_0 emplean el mismo tiempo en recorrer su trayectoria.

Se pueden escribir también estos resultados en otra forma. Sea $\mathbf{r}_C$ el vector de posición de la partícula con respecto al centro G de la órbita circular (por "centro de guía"). Entonces se tendrá

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_C \tag{A-14}$$

donde $\mathbf{r}_G$ es el vector de posición de G con respecto al origen del sistema coordenado fijo. Se ve ahora en la figura que el movimiento de la partícula se puede describir como una ro-

tación rígida de $\mathbf{r}_C$ alrededor de G con velocidad angular ω_C. Se puede saber por cinemática que, en tal caso, se puede escribir la rapidez de cambio del vector $v\perp$ en la forma

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{v}_\perp \tag{A-15}$$

Igualando (A-15) con (A-11) se encuentra que la velocidad angular vectorial es

$$\boldsymbol{\omega}_C = -\left(\frac{q}{m_0}\right)\mathbf{B} \tag{A-16}$$

cuyo signo está de acuerdo con la figura A-1, puesto que ω_C está entrando a la página.

Si $\mathbf{v}_{||} \neq 0$, el movimiento total de la partícula se puede describir como una velocidad constante $\mathbf{v}_{||}$ del centro de guía en la dirección de **B**, con el movimiento circular debido a $\mathbf{v}\perp$ superpuesto a ella. En otras palabras, el movimiento será una *hélice*, como se muestra en la figura A-2 para q positiva y $\mathbf{v}_{||}$ en la misma dirección que **B**.

Si se combinan (A-8) y (A-5) se encuentra que se puede describir

$$T = T_{||} + T_\perp = \tfrac{1}{2} m_0 v_{||}^2 + \tfrac{1}{2} m_0 v_\perp^2 \tag{A-17}$$

donde a $T_{||}$ y a $T\perp$ se les puede identificar con las contribuciones a la energía cinética asociada respectivamente con el movimiento paralelo y perpendicular a **B**. Anteriormente se ha visto que $v_{||}$ y $v_\perp$ son ambas independientemente constantes para una inducción uniforme, por lo que cada contribución es a su vez constante:

$$T_{||} = \tfrac{1}{2} m_0 v_{||}^2 = \text{const.} \qquad T_\perp = \tfrac{1}{2} m_0 v_\perp^2 = \text{const.} \tag{A-18}$$

Una carga puntual que se mueve alrededor del círculo de la figura A-1 es equivalente a un elemento de corriente $Ids = q\mathbf{v}\perp$, por (14-29), y tendrá así un momento dipolar magnético **m**. Se ve de la figura A-1 que **m** estará dirigido hacia la página y, en consecuencia, en la dirección de ω_C. De acuerdo con (19-27), $m = IS = I\pi r_C^2$, donde I es la corriente equivalente. Puesto que la carga total q pasa por un punto dado sobre el perímetro en cada

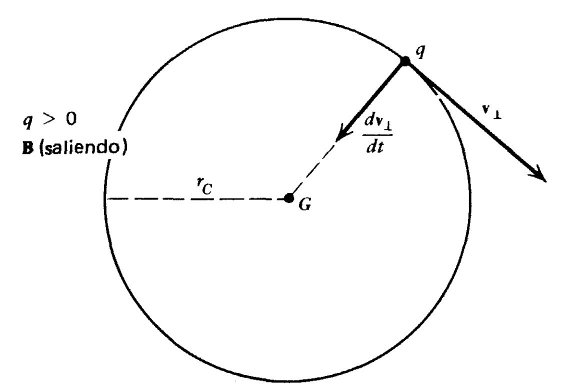


Figura A-1. Movimiento circular de una carga puntual en una inducción uniforme.

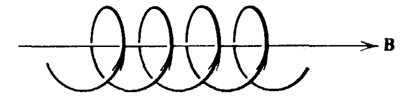


Figura A-2. El movimiento general en una inducción uniforme sigue una hélice.

vuelta, y puesto que recorrer cada circuito le lleva un tiempo τ_C, la corriente equivalente es $I = q/\tau_C = \omega_C q/2\pi$. En esta forma se encuentra que

$$m = I\pi r_C^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{q}\right)\frac{(m_0 v_\perp^2)}{B^2}\omega_c = \frac{m_0 v_\perp^2}{2B} = \frac{T_\perp}{B} \tag{A-19}$$

empleando (A-12), (A-13) y (A-18). Si se toma en cuenta la dirección de **m**, se puede escribir

$$\mathbf{m} = \left(\frac{m_0}{q}\right)\frac{T_\perp}{B^2}\omega_C = -\frac{T_\perp}{B^2}\mathbf{B} \tag{A-20}$$

empleando (A-16). Se ve que **m** es opuesta a la dirección de **B** y en consecuencia es diamagnética, en el sentido que se analizó a continuación de (20-52).

La magnitud del flujo magnético encerrado por la órbita circular es

$$\Phi = B\pi r_C^2 = 2\pi\left(\frac{m_0}{q}\right)\frac{T_\perp}{B} = 2\pi\left(\frac{m_0}{q}\right)m \tag{A-21}$$

y es, por supuesto, constante.

Ejemplo

Coordenadas rectangulares. Aun cuando se sabe que el movimiento general en una inducción uniforme será una hélice, como se muestra en la figura A-2, sería instructivo ver cómo se presenta esto en detalle en términos de un sistema de coordenadas específico. Empléense coordenadas rectangulares y hágase $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$, donde $\mathbf{B}$ = constante. Entonces $\mathbf{v}_{||} = v_z\hat{\mathbf{z}}$, en tanto que $\mathbf{v}_\perp = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}}$, y se encuentra que (A-11) da

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m_0}v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m_0}v_x \tag{A-22}$$

De la primera de estas expresiones se obtiene $v_z = v_{0z}$ = constante, por lo que $z = z_0 + v_{0z}t$.

Si se diferencia la segunda ecuación de (A-22) y se le inserta la tercera, se obtiene una ecuación para v_x sola:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m_0}\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m_0}\right)^2 v_x \tag{A-23}$$

Esta tiene por solución

$$v_x = v_{0x}\cos\left(\frac{qB}{m_0}\right)t \tag{A-24}$$

Puesto que $v_x = dx/dt$, se puede integrar (A-24) una vez más para obtener

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{m_0}{qB}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{qB}{m_0}\right)t \tag{A-25}$$

Ahora se puede encontrar v_y directamente de la segunda ecuación de (A-22) y (A-24):

$$v_y = \frac{m_0}{qB}\frac{dv_x}{dt} = -v_{0x}\operatorname{sen}\left(\frac{qB}{m_0}\right)t \tag{A-26}$$

y por lo tanto, puesto que $v_y = dy/dt$, se obtiene

$$y = y_0 + v_{0x}\left(\frac{m_0}{qB}\right)\left[\cos\left(\frac{qB}{m_0}\right)t - 1\right] \tag{A-27}$$

Antes que nada, se ve de (A-24) y (A-26) que $v_\perp{}^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 = v_{0x\,2} =$ const. en acuerdo con (A-18). Si se define $y_0{}' = y_0 - v_{ox}\ (m_0 x/qB)$, entonces (A-27) se puede escribir en forma algo más sencilla como

$$y = y_0' + v_{0x}\left(\frac{m_0}{qB}\right)\cos\left(\frac{qB}{m_0}\right)t \tag{A-28}$$

Se encuentra ahora de (A-25) y (A-28) que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0')^2 = \left(\frac{m_0 v_{0x}}{qB}\right)^2 \tag{A-29}$$

la cual es la ecuación de una circunferencia con centro en (x_0, y_0') y de radio $r_C = m_0 v_{0x}/qB = m_0 v_\perp/qB$ de acuerdo con (A-12) y la figura A-1. Se nota que el centro de esta circunferencia *no* está en la posición inicial en el plano xy, esto es, en (x_0, y_0) sino que la coordenada y del centro es $y_0{}'$ según se da en (A-28) y (A-27).

También se ve que todas las coordenadas xy y las componentes de la velocidad oscilan con la frecuencia circular qB/m_0 estando en acuerdo con (A-13).

Por último, se ve que si $x - x_0$ se incrementa desde cero, digamos, entonces $y - y_0{}'$ estará decreciendo desde r_C. Así, el vector de posición en el plano xy, $\mathbf{r}_C = (x - x_0)\hat{\mathbf{x}} + (y - y_0{}')\hat{\mathbf{y}}$, estará girando en el sentido de las manecillas del reloj, como se aprecia observando el plano xy desde la dirección del eje z positivo, esto es, opuesto a la dirección de **B**. Pero ésta es exactamente la rotación mostrada en la figura A-1, por lo que se han verificado en detalle todos los resultados anteriores por medio de estos cálculos específicos.

Ejemplo

Ciclotrón. Se ha visto que el tiempo τ_C que se requiere para recorrer la trayectoria circular es independiente del radio de ésta y de la velocidad de la partícula. Este hecho ha sido aprovechado como la base para el dispositivo empleado para acelerar partículas cargadas hasta grandes energías cinéticas y denominado *ciclotrón*. En la figura A-3 se muestran los aspectos principales. Se corta un cilindro conductor delgado circular y hueco, a lo largo de un diámetro y las dos porciones se separan por una pequeña abertura. Un campo **B** uniforme es normal al plano de éstas, "Des", al mismo tiempo que se aplica una diferencia de potencial alterna, $\Delta\phi$, de frecuencia ω_C entre ellas. Una partícula que se produce dentro de la abertura se acelerará hacia una de las Des, introduciéndose en ella. En su interior la partícula quedará fuera de los efectos de **E**, pero se desplazará en una trayectoria semicircular cuyo radio está dado por (A-12). Entrará de nuevo en la abertura después de un tiempo $\frac{1}{2}\tau_C$, donde encontrará que **E** en la abertura se ha invertido. Se acelerará al cruzar la abertura, ganando energía cinética $q|\Delta\phi|$ de acuerdo con (A-7), y entrará de nuevo en la otra D. Puesto que $v_\perp$ es ahora mayor, su radio será mayor por (A-12), pero recorrerá su nuevo semicírculo en el mismo tiempo $\frac{1}{2}\tau_C$ y entrará de nuevo en la abertura para encontrar a **E** invertido otra vez. Se acelerará de nuevo al cruzar la abertura y recorrerá un nuevo semicírculo de radio mayor. El proceso completo continuará de esta manera, con la partícula ganando energía cinética $q|\Delta\phi|$ cada vez que cruce la abertura, en esta forma

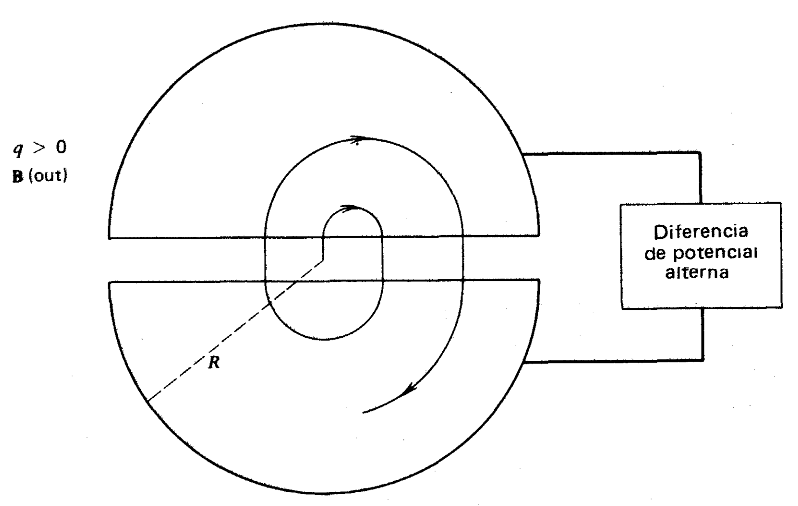


Figura A-3. Ilustración esquemática de un ciclotrón.

recorriendo una trayectoria de radio siempre creciente. Por último, cuando el radio llegue a ser de un valor cercanamente igual al radio R de las Des, se podrá extraer el haz de partículas por medio de un campo deflector en las proximidades de la pared de una de las Des. Puesto que $r_{C\ máx} = R$, se encuentra de (A-12) que la velocidad máxima $v_{\perp\ máx}$ que se le puede dar a la partícula es qBR/m_0, por lo que la energía cinética final de una partícula en el haz saliente es

$$T_{\text{máx}} = \frac{1}{2} m_0 v_{\perp\ \text{máx}}{}^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m_0} \tag{A-30}$$

la cual es proporcional a B^2 y a R^2.

Cuando la velocidad de la partícula llega a ser muy grande, se tiene que emplear la ecuación relativista de movimiento 28-105). Si se interpreta ésta como la correspondiente a un incremento en la masa de la partícula, se ve de (A-13) que la frecuencia de ciclotrón ya no será una constante sino que variará con la velocidad de la partícula. En consecuencia, se debe alterar correspondientemente la frecuencia de la diferencia de potencial aplicada, para en sincronía con las partículas a fin de evitar que se encuentren con un E de signo incorrecto al entrar a la abertura, ya que esto las desaceleraría y disminuiría su energía cinética.

Ejemplo

Enfoque magnético. En la figura A-4 se muestra una partícula que se proyecta en $t = 0$ desde un punto P con una velocidad inicial v_0, la cual forma un ángulo θ con la dirección de una B uniforme. La partícula recorrerá una trayectoria helicoidal como la de la figura

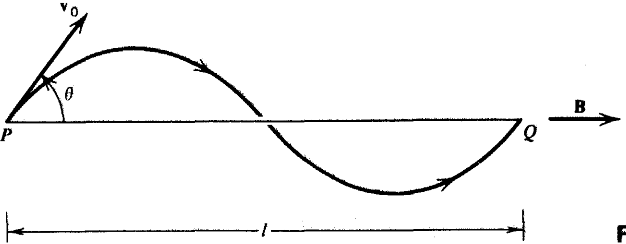


Figura A-4. Enfoque magnético.

A-2. Después de un tiempo τ_C, habrá dado una vuelta sobre la hélice y estará en el punto Q, el cual tiene la mismas coordenadas que P en el plano perpendicular a B. Esto se puede ver también de (A-25) y (A-27), puesto que cuando $t = \tau_C = 2\pi\, m_0/qB$, el argumento del seno y del coseno es 2π, y $x(\tau_C) = x_0$ y $y(\tau_C) = y_0$. Durante este tiempo, la partícula ha recorrido la distancia horizontal.

$$l = v_{\|}\tau_C = 2\pi\left(\frac{m_0}{q}\right)\frac{v_0\cos\theta}{B} \tag{A-31}$$

Considérese ahora un grupo de partículas para las cuales P, v_0 y θ son las mismas, pero cuyos ángulos azimutales φ respecto del eje de **B** son diferentes. Cada una de ellas recorrerá su propia hélice, pero todas tocarán la línea PQ en el mismo punto Q. En otras palabras, han sido llevadas a un *foco* en Q, y se puede llamar a la distancia l *longitud focal*. Se ve de (A-31) que se puede emplear entonces una medición de l como una forma de medir la razón carga a masa q/m_0. Sin embargo este arreglo no conlleva gran exactitud para tal medición; la propiedad de enfoque no obstante, sí resulta ser de utilidad en otras aplicaciones.

Por lo general, cada caso en el cual **B** no es uniforme debe ser considerado por separado. Sin embargo, existe una situación de considerable interés práctico que se puede examinar de manera aproximada. Se trata de aquélla para la cual **B** tiene simetría axial y está variando lentamente con la posición. Así, si se toma el eje z de coordenadas cilíndricas como el eje de simetría, se puede escribir **B** (z, ρ) y suponer que la variación de **B** con z y ρ no es grande. Esto correspondería a líneas de **B** como las de la figura A-5. Se puede esperar que el movimiento de la partícula aún sea aproximadamente helicoidal, como se indica en la figura.

Habrá ahora una componente radial $B\rho$ además de B_z. Empleando $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ se puede encontrar su valor aproximado, el cual, con el empleo de (1-87), resulta ser

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho) = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{A-32}$$

Para una B_z que varía lentamente se puede hacer $\partial B_2/\partial_z \simeq$ const., e integrar (A-32) para obtener

$$B_\rho = -\frac{1}{2}\rho\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{A-33}$$

puesto que $B\rho\ (0) = 0$ de la figura A-5, esto es, por la forma en que se ha elegido el eje z.

Empleando (1-76) se encuentra que la componente z de (A-10) resulta ser

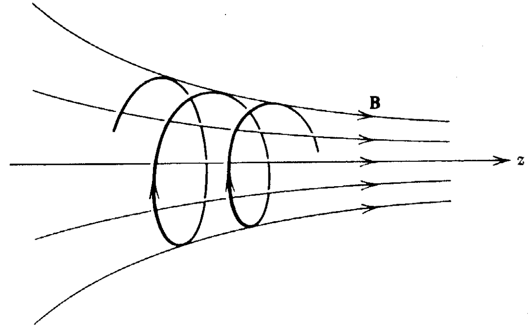


Figura A-5. Movimiento general en una **B** no uniforme con simetría axial.

$$m_0 \frac{dv_z}{dt} = -qv_\varphi B_\rho \tag{A-34}$$

Para una **B** que varía lentamente, el radio de la hélice no cambiará mucho para cada vuelta, por lo que se puede tomar $v\rho \ll v\varphi$ y entonces $v\varphi \simeq -v\perp$ puesto que v $\perp$ y $\hat{\varphi}$ están en direcciones opuestas para q positiva. Haciendo esta sustitución en (A-34), junto con (A-33), y empleando (A-12) para expresar ρ como el radio de la órbita, se encuentra que

$$m_0 \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{2} qv_\perp \rho \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{m_0 v_\perp{}^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -m \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{A-35}$$

empleando (A-19). Si ahora se multiplican ambos miembros de esta expresión por v_z, se obtiene

$$m_0 v_z \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_0 v_z{}^2\right) = -m \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} = -m \frac{dB_z}{dt} \tag{A-36}$$

donde db_z/dt en la rapidez de cambio total de B_z vista por la partícula mientras ésta se mueve.

Puesto que la fuerza magnética no trabaja sobre la partícula, la energía cinética total T es constante y se encuentra de (A-17) y (A-19) que

$$\frac{dT_\parallel}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_0 v_z{}^2\right) = -\frac{dT_\perp}{dt} = -\frac{d}{dt}(mB_z) \tag{A-37}$$

al mismo orden de aproximación que se ha venido empleando. Igualando los segundos miembros de (A-36) y (A-37) se encuentra que $d(mB_2)/dt = m(dB_2/dt) + B_2\ (dm/\mathrm{d}t) = m(dB_2/dt)$ y por lo tanto

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad m = \text{const.} \tag{A-38}$$

En otras palabras, la partícula se mueve de manera tal que su momento dipolar magnético es aproximadamente constante. Si se observa de nuevo (A-21), se ve que una forma equivalente de decir esto es que durante el movimiento la órbita de la partícula encierra la misma cantidad de flujo Φ. Así, conforme se mueve en regiones de mayor magnitud de flujo, su radio decrecerá. Puesto que Φ es constante, se puede decir también que la órbita encerrará las mismas líneas de **B**, como se indica en la figura A-5.

Se puede integrar (A-37) y se encuentra que

$$\tfrac{1}{2} m_0 v_z{}^2 + mB_z = T_\parallel - \mathbf{m}\cdot\mathbf{B} = \text{const.} = \mathcal{E} \tag{A-39}$$

si se toman en cuenta las direcciones opuestas de **m** y **B** mostradas en (A-20). Se ve de esto que conforme la partícula se mueve en una región de B_z mayor, su energía cinética longitudinal decrecerá, y cuando mB_z resulta ser igual a E la partícula invierte su dirección y regresa a la región de campo más débil; esto está de acuerdo con (A-35), la cual indica una fuerza sobre la partícula, opuesta a la dirección de B_z creciente. En otras palabras, la partícula habrá sido *reflejada*. Este hecho es la base de los *espejos magnéticos*, a los cuales se les emplea en esfuerzos para confinar las partículas ionizadas producidas en las altas temperaturas de los reactores de fusión.

Durante el proceso descrito arriba, en el cual $T_{||}$ decrece, $T_{\perp}$ se incrementa a fin de mantener T constante. Así, la partícula avanzará describiendo su hélice de radio decreciente con cada vez más velocidad, hasta alcanzar el punto de reflexión. Esta misma conclusión se desprende de (A-38) y (A-19), puesto que si B se incrementa, $T_{\perp}$ debe también incrementarse a fin de mantener constante la razón m.

A-3 Campos eléctrico y magnético estáticos

Se supone ahora que tanto **E** como **B** son diferentes de cero. También se supone que son independientes de la posición y del tiempo. Se debe emplear entonces la ecuación completa de movimiento (A-1). Resultado útil considerarla en etapas.

Primera se introducen las componentes de **v** y **E** paralelas y perpendiculares *a la dirección de la inducción magnética*. Entonces (A-1) se convierte en

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}_{||}}{dt} + m_0 \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{||} + \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) \tag{A-40}$$

puesto que $\mathbf{v}_{||} \times \mathbf{B} = 0$. Esto conduce a las dos ecuaciones

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}_{||}}{dt} = q\mathbf{E}_{||} \tag{A-41}$$

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) \tag{A-42}$$

La solución de (A-41) está dada por las partes paralelas (A-6), con $\mathbf{E}_{||}$ sustituyendo a **E**; así, $\mathbf{v}_{||}$ no resulta afectada por **B**.

Se puede incluir el efecto de la porción restante de **E** escribiendo

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}' \tag{A-43}$$

donde $\mathbf{v}_D$ se elige en una forma que se determinará en breve. Se nota que $\mathbf{v}_D$ y **v** son cada una perpendiculares a **B**. Empleando (A-43) se puede escribir (A-42) como

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B} + \mathbf{v}' \times \mathbf{B}) \tag{A-44}$$

y sería deseable encontrar v_D tal que

$$\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B} = 0 \tag{A-45}$$

Esta expresión se puede resolver para $\mathbf{v}_D$ multiplicando **B** por ella en producto cruz y empleando (1-30); el resultado es $\mathbf{B} \times \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{B} \times (v_D \times \mathbf{B}) = 0 = \mathbf{B} \times \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{B}^2 v_D$, puesto que $\mathbf{v}_D \cdot \mathbf{B} = 0$. Así se encuentra que

$$\mathbf{v}_D = -\frac{\mathbf{B} \times \mathbf{E}_{\perp}}{B^2} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2} = \text{const.} \tag{A-46}$$

Puesto que $\mathbf{v}_D$ es constante, se encuentra que (A-44) se reduce a

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B} \tag{A-47}$$

la cual es exactamente la misma forma que la segunda ecuación de (A-11) y a la cual se sabe la solución completa por la última sección, es decir, un movimiento circular como el de la figura A-1.

El movimiento general en la presencia simultánea de **E** y **B** uniforme es, entonces, la superposición de tres partes. Existe una aceleración constante en la dirección de **B** producida por $\mathbf{E}_{\|}$. Existe una velocidad constante en la dirección de $\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}$ y por ende perpendicular a **B**. Por último, existe el movimiento circular en torno al eje de **B** con radio y frecuencia dados por (A-12) y (A-13), con la velocidad constante v' sustituyendo a $v\perp$ A la velocidad $\mathbf{v}_D$ se le conoce como *velocidad de deriva*; su magnitud es $E\perp/B$ y es independiente tanto la carga como de la masa de la partícula.

Por sencillez, se concentrará la atención en la deriva y el movimiento circular combinados, esto es, en la proyección del movimiento sobre el plano perpendicular a **B**; $\mathbf{E}_\perp$ y $\mathbf{v}_D$ están ambos en este plano. Este movimiento combinado se puede describir en términos geométricos convenientes. El movimiento circular asociado con $\mathbf{v}'$ tiene un radio $r'_C = m_0 v'/qB$ y efectuará una rotación completa en el tiempo $\tau_C = 2\pi m_0/qB$. Durante este tiempo el centro de guía G habrá recorrido una distancia $d_G = v_D\,\tau_C = 2\pi m_0 E\perp/qB^2$. Esta es justamente la circunferencia de un círculo de radio $r_G = m_0 E_\perp/qB^2 = v_D/\omega_C$. Así, el movimiento de G corresponde al de un círculo de este radio, que rueda sin resbalarse sobre una línea horizontal y con velocidad angular ω_C, según se ilustra en la figura A-6. Puesto que el movimiento circular descrito por $\mathbf{v}'$ es alrededor de G, se ve que el movimiento neto de la carga será el mismo que si ella estuviera sujeta en forma rígida al círculo que rueda, en el punto P y a una distancia r'_C del centro G. Esta es exactamente la situación que produce la curva conocida como *cicloide*. Si $\mathbf{r}'_C = \mathbf{r}_G$, entonces P está sobre la periferia del círculo y la curva que describe P es la cicloide ordinaria que se muestra en la figura A-7*a*. Si $\mathbf{r}'_C >$ r_G, entonces P está fuera del círculo y produce la *cicloide alargada* de (*b*) de la figura, mientras que $r'_C > \mathbf{r}_G$, la curva es la *cicloide cortada* que se muestra en (*c*). De los resultados anteriores se tiene

$$\frac{r_C'}{r_G} = \frac{(m_0 v'/qB)}{(v_D \tau_C/2\pi)} = \frac{v'}{v_D} = \frac{B}{E_\perp} v' \tag{A-48}$$

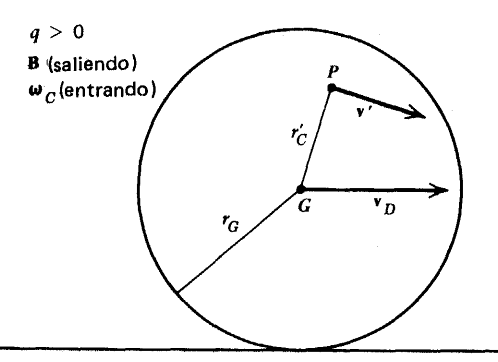


Figura A-6. Cálculo del movimiento en **E** y **B** uniformes.

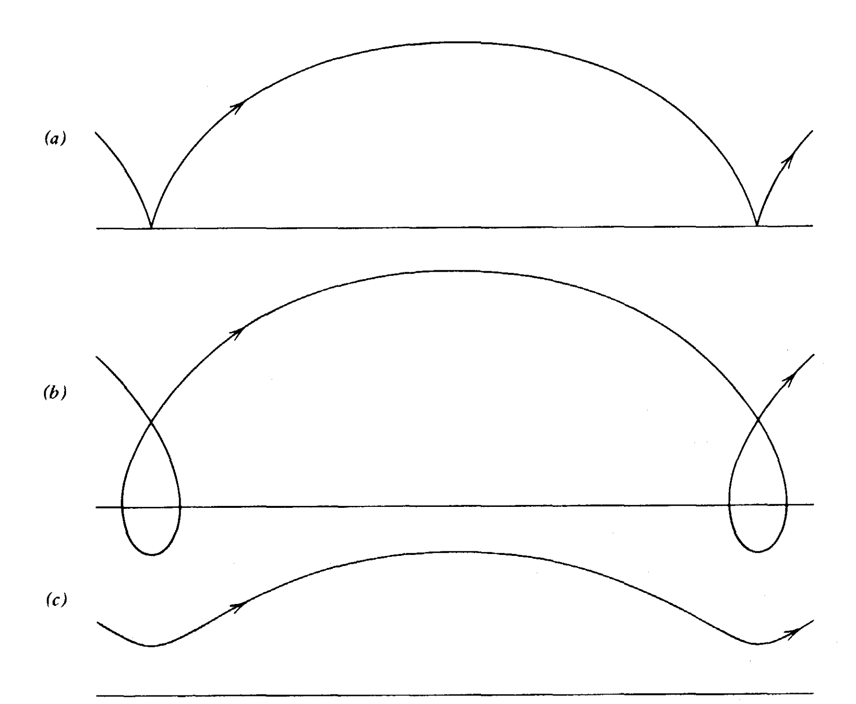


Figura A-7. Tipos posibles de trayectorias cicloidales.

Ejemplo

Coordenadas rectangulares. Tal y como se hizo en la última sección, ahora se verificarán estos resultados en términos de un sistema de coordenadas específico. Se supone que $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Así, $\mathbf{E}_{||} = 0$ y $v_{||} = v_z$ serán constantes; se elige $v_z = 0$, de manera que el movimiento esté confinado al plano xy. Se ve también de (A-46) que $\mathbf{v}_D = v_D\hat{\mathbf{x}} = (E/B)\hat{\mathbf{x}}$ en este caso. Sin embargo, se comenzará de nuevo con (A-1), la cual, para estos campos, conduce a las dos ecuaciones de interés:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m_0} v_y = \omega_C v_y \tag{A-49}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m_0}(E - Bv_x) = -\omega_C(v_x - v_D) \tag{A-50}$$

Si se deriva (A-49) y se sustituye (A-50) en el resultado se obtiene

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \omega_C \frac{dv_y}{dt} = -\omega_C{}^2(v_x - v_D)$$

la cual tiene como solución

$$v_x = v_D + (v_{0x} - v_D)\cos\omega_C t \tag{A-51}$$

Se puede encontrar ahora v de (A–49) y (A-51):

$$v_y = \frac{1}{\omega_C}\frac{dv_x}{dt} = -(v_{0x} - v_D)\operatorname{sen}\omega_C t \tag{A-52}$$

Antes de proceder a encontrar las coordenadas, se puede veriricar que estos resultados para las componentes de la velocidad son consistentes con los anteriores. Las componentes de $\mathbf{v}'$ según (A-43) son

$$v_x' = v_x - v_D \qquad v_y' = v_y \tag{A-53}$$

por lo que (A-51) y (A–52) se pueden escribir también como

$$v_x' = v_{0x}' \cos \omega_C t \qquad v_y' = -v_{0x}' \operatorname{sen} \omega_C t \qquad v_{0x}' = v_{0x} - v_D \tag{A-54}$$

Las expresiones para v_x y v_y' son justamente las esperadas para una velocidad $\mathbf{v}'$ de magmitud $|\mathbf{v}'| = v' = |v_0 = |$ girando en el sentido de las manecillas del reloj con velocidad angular ω_C, tal como muestra la figura A-6.

Se pueden encontrar las coordenadas de la partícula integrando (A-51) y (A-52) y evaluando las constantes de integración en términos de la posición inicial. Los resultados son

$$x = x_0 + v_D t + \frac{(v_{0x} - v_D)}{\omega_C} \operatorname{sen} \omega_C t \tag{A-55}$$

$$y = y_0 + \frac{(v_{0x} - v_D)}{\omega_C} (\cos \omega_C t - 1) \tag{A-56}$$

expresiones que se pueden poner en la forma

$$x = x_0 + \frac{v_D}{\omega_C}(\omega_C t) - \frac{(v_D - v_{0x})}{\omega_C} \operatorname{sen} \omega_C t$$

$$y = y_0 + \frac{(v_D - v_{0x})}{\omega_C}(1 - \cos \omega_C t)$$

Estas expresiones tienen la forma paramétrica usual de la ecuación de una cicloide con radios asociados $r_G = v_D/\omega_C$, $r_C' = v_D - v_{0x}|/\omega_C = v'/\omega_C$ en concordancia con los resultados anteriores.

Aparece un caso de especial interés cuando $v_{0x} = v_D$, porque entonces (A-55) y (A-56) resultan ser simplemente $x = x_0 + v_D t$, $y = y_0$, demostrando que la partícula se desplaza en una línea recta con velocidad constante igual a la velocidad de deriva y en ninguna otra forma resulta afectada por los campos. Se ve de (A-45) que esto ocurre en virtud de que con esta velocidad inicial la fuerza neta es cero y permanece así puesto que no hay aceleración que cambie a $\mathbf{v}$ de su valor inicial $\mathbf{v}_D$. Se nota que este movimiento en línea recta es independiente tanto de q como de m_0. En este sentido la combinación de campos actúa como un selector de velocidad puesto que todas las partículas que viajan horizontalmente deben tener la misma velocidad definida $\mathbf{v}_D$.

Ejemplo

Magnetrón. Este es un ejemplo del caso en que **B** es uniforme pero **E** no lo es. (Véase la figura (A-8). El sistema consiste en dos cilindros conductores coaxiales de radios a y b con una inducción uniforme **B** paralela al eje. Hay una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre los cilindros, de manera que se produce un campo radial **E**. Supóngase que se introduce una carga q en la superficie del cilindro interior. El campo **E** la acelerará hacia el cilindro ex-

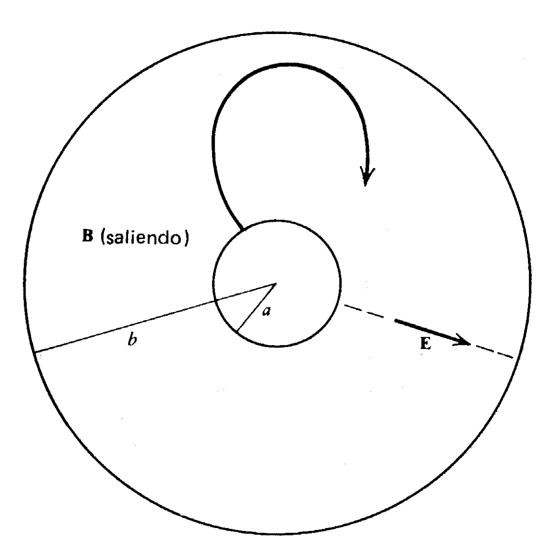


Figura A-8. Magnetrón.

terior. A causa de **B**, no obstante, se curvará la trayectoria y la partícula puede regresar antes de que alcance el cilindro exterior. En este caso, no habrá corriente entre los cilindros. Para una **B** de valor más pequeño, la carga q puede alcanzar la placa y habrá una corriente. Así, el conocimiento de las condiciones para la transición entre ambos casos (cuando no hay corriente y cuando sí la hay), permitirá el empleo de este dispositivo para medir **B**. (En un magnetrón real el cilindro interno es un filamento caliente y las partículas que se producen son electrones de carga $-e$. No obstante, es muy fácil analizar este problema para una carga q arbitraria).

Se puede encontrar con facilidad la variación de **E** y de ϕ con la posición, empleando la ley de Gauss (4-1) o la expresión general (11-141). Como se verá, en realidad no se necesita saber estos detalles. Puesto que **B** no efectúa trabajo sobre la carga, resulta aplicable la expresión de la conservación de la energía (A-9). Si se emplean coordenadas cilíndricas y se nota que $\phi = \phi\ (\rho)$, por simetría, se puede escribir (A-9) como

$$\frac{1}{2} m_0\left(v_\rho^{\,2} + v_\varphi^{\,2}\right) + q\phi(\rho) = \frac{1}{2} m_0\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] + q\phi(\rho) = \text{const.} \tag{A-57}$$

donde las componentes de la velocidad se pueden encontrar por medio de (1-82). Se puede evaluar la constante haciendo $\rho = a$; si se supone que la partícula se produce en el cilindro interior con velocidad despreciable, su energía cinética es cero y la constante en (A-57) es justamente $q\ \phi\ (a)$; entonces se tiene

$$\frac{1}{2} m_0\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] + q\phi(\rho) = q\phi(a) \tag{A-58}$$

Se desea la condición en que la partícula apenas alcanza el cilindro en $\rho = b$. Si este es el caso, su trayectoria será tangente a la superficie del cilindro, por lo que $v_p\ (b) = d\rho/dt)_b = 0$, y (A-58) da

$$b^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_b^2 = \frac{2q}{m_0}[\phi(a) - \phi(b)] = \frac{2q\,\Delta\phi}{m_0} \tag{A-59}$$

Se puede obtener otra expresión para la cantidad de la izquierda volviendo a la ecuación de movimiento.

Con $v = v_p\hat{\rho} + v_\varphi\hat{\varphi}$, $E = E\hat{\rho}$ y $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ se encuentra, con el empleo de (1-76) y un resultado de la cinemática, que la componente φ de (A-1) es

$$m_0 a_\varphi = m_0\left[\rho\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = -qBv_\rho = -qB\frac{d\rho}{dt}$$

Si se multiplican ambos miembros de ésta por ρ es fácil ver que se le puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\left[m_0\rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\right] = -qB\rho v_\rho = -qB\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right) \qquad \text{(A-60)}$$

En esta forma quizá resulte más familiar. El término entre corchetes de la izquierda es el momento angular de la partícula respecto del eje z, mientras que la expresión intermedia es la componente z de la torsión según se encuentra de $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \rho\hat{\rho} \times q[E\hat{\rho} + (v_p\hat{\rho} + v\varphi\hat{\varphi}) \times B\hat{z}]$ empleando (1-76) de nuevo. Igualando la primera y tercera expresiones de (A-60), se puede integrar el resultado para obtener.

$$\rho^2\frac{d\varphi}{dt} + \frac{qB}{2m_0}\rho^2 = \text{const.} \qquad \text{(A-61)}$$

Se puede evaluar la constante considerando la situación inicial en el cilindro interior $\rho = a$. Como se ha supuesto que la partícula parte con velocidad inicial despreciable, se tiene $(d\varphi/dt)_a = 0$ y la constante es igual a $(qB/2m_0)a^2$, por lo que (A-61) se vuelve

$$\rho^2\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{qB}{2m_0}(\rho^2 - a^2) \qquad \text{(A-62)}$$

Obsérvese que puesto que $\rho \geqslant a$, $d\varphi/dt$ es negativa para $q >$, lo cual concuerda con la trayectoria que se muestra en la figura A-8.

Si ahora se hace $\rho = b$ en (A-62), se obtiene

$$b^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_b = -\frac{qB}{2m_0}(b^2 - a^2)$$

Si se resuelve ésta para $(d\varphi/dt)_b$ y se sustituye el resultado en (A-59), se encuentra que

$$B^2 = \frac{8m_0 b^2 \Delta\phi}{q(b^2 - a^2)^2} \qquad \text{(A-63)}$$

la cual relaciona el valor de B con el valor de la diferencia de potencial $\Delta\phi$ para el cual sencillamente desaparece la corriente entre los cilindros.

A-4 Un campo magnético dependiente del tiempo

Aun cuando una inducción magnética constante en el tiempo no efectúa trabajo sobre una partícula cargada, una inducción con variación temporal sí puede efectuarlo por medio de la fem inducida descrita por la ley de Faraday. Se ha utilizado este hecho como base para el acelerador de partículas cargadas conocido como *betatrón*; el nombre obedece a que originalmente se le empleó para producir electrones de gran energía cinética, lográndose una similitud con las partículas beta de la radiactividad.

En la figura A-9 se muestran los aspectos esenciales de este dispositivo. Se obliga a una partícula a moverse en un círculo de radio R que encierra una inducción cilíndricamente simétrica $\mathbf{B} = B_z\hat{z}$, normal al plano de la órbita. La inducción $\mathbf{B}$ varía como el tiempo, por lo que el trabajo efectuado sobre la partícula en cada circuito completo es igual a su carga por la fem inducida E_{ind}, la cual está dada por (17-6) como

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{d\langle B_z \rangle}{dt} \tag{A-64}$$

donde $\langle B_z \rangle$ es el valor promedio de la inducción sobre el área encerrada por la órbita. En virtud de la simetría cilíndrica se puede escribir $\mathbf{E} = E_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ y la integral resulta ser $2\pi R E_\varphi$. Así, la magnitud del campo eléctrico inducido es

$$E_\varphi = \frac{1}{2} R \frac{d\langle B_z \rangle}{dt} \tag{A-65}$$

y producirá una fuerza tangencial de magnitud

$$f_\varphi = qE_\varphi = \frac{1}{2} qR \frac{d\langle B_z \rangle}{dt} = m_0 \frac{dv_\varphi}{dt} \tag{A-66}$$

Se requiere que la partícula esté limitada a moverse en un círculo de R fijo. Esto se puede hacer con una inducción normal al plano de la órbita y con un valor B_R ; a éste se le conoce como "campo guía". El valor requerido de B_R se puede obtener de (A-12) y es $B_R = (m_0 v_\varphi / qR)$ puesto que $v_\varphi = v_\perp$ en este caso. Puesto que v_φ está cambiando, por (A-66), B_R debe estar cambiando también a fin de mantener a R constante, y se encuentra que es necesario que

$$\frac{dB_R}{dt} = \frac{m_0}{qR} \frac{dv_\varphi}{dt} \tag{A-67}$$

Cuando se elimina m_0 (dv_φ/dt) entre (A-66) y (A-67), se encuentra que se debe tener $(dB_R/dt) = 1/2\, (d\langle B_2 \rangle/dt)$, lo cual conduce a

$$B_R = \tfrac{1}{2}\langle B_z \rangle + \text{const.} \tag{A-68}$$

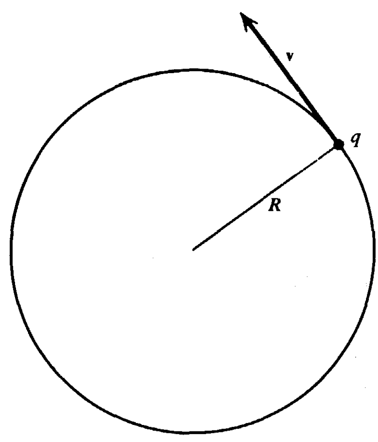


Figura A-9. Aspectos esenciales que describen la acción de una betatrón.

que se conoce como la condición del betatrón y se debe satisfacer siempre como condición para que dicho dispositivo funcione. Normalmente, los dos campos B_R y $<B_z>$ cambian en forma simultánea, partiendo ambos desde cero. En ese caso la constante en (A-68) debe ser cero y la condición se simplifica a $B_R = \frac{1}{2} <B_z>$. En otras palabras, la inducción en la posición de la partícula debe ser siempre igual a la mitad de la inducción encerrada por la órbita circular.

Ejercicios

A-1 En $t = 0$, una partícula está en el origen con velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{x}}$ y entra en una región de campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$. Encuéntrese la ecuación de su trayectoria y su deflexión d del eje x después que ha recorrido una distancia D sobre x. Encuéntrese el ángulo α que forma $\mathbf{v}$ con el eje x en este punto.

A-2 Una partícula se mueve en dos dimensiones en una región donde el potencial escalar es $\phi = 1/2\ A\ (x^2 - y^2)$, donde A es una constante con el mismo signo que q. En $t = 0$, la partícula está en reposo en (x_0, y_2), donde A es una constante con el mismo signo que q. En $t = 0$, la partícula está en reposo en (x_0, y_0). Encuéntrese x y y para tiempos subsecuentes y bosquéjese la trayectoria resultante de la partícula.

A-3 Supóngase que $\mathbf{B} = 0$ para el sistema de cilindros coaxiales de la figura A-8. Demuéstrese que es posible tener órbitas circulares cuando $\Delta\phi \neq 0$. Evalúese la energía cinética y demuestre que es independiente del radio de la órbita circular.

A-4 Una partícula cargada se está desplazando en forma horizontal con velocidad v_0 y entra en una región de $\mathbf{B}$ uniforme dirigida verticalmente hacia abajo. Encuéntrese la deflexión d relativa a su dirección original de desplazamiento cuando la proyección de su posición sobre su dirección original es D, siendo $D \leqslant r_C$.

A-5 En cierto tipo de espectrómetro de masa produce en reposo una partícula de carga q que después se acelera bajo una diferencia de potencial $\Delta\phi$. Luego entra en una región de $\mathbf{B}$ uniforme, el cual es perpendicular a la velocidad. Después de recorrer un semicírculo, la partícula toca un detector a una distancia D de su punto de entrada. Encuéntrese una expresión de la cual se pueda obtener la masa m_o en términos de las cantidades dadas.

A-6 Supóngase que la figura A-4 muestra el plano xz, con $\mathbf{B}$ a lo largo del eje z positivo, y que P es el origen. Encuéntrese el vector de posición $\mathbf{r}_G$ del centro de guía de este movimiento, como una función de t.

A-7 En la figura A-4, supóngase que se proyectan desde P partículas de las mismas q, m_0 y v_o sobre un intervalo de ángulos $\theta_o - \Delta\theta \leqslant \theta \leqslant \theta_o + \Delta\theta$. Sus puntos focales Q variarán sobre un intervalo de posición correspondiente, Δl. Encuéntrese Δl y la razón $\Delta l/l_0$ donde l_0 es la longitud focal para el ángulo central θ_0. ¿Cuál es el mayor valor permisible de $\Delta\theta$ si $\theta_o = 10^\circ$ y si se requiere que la expresión Δl sea menor del 5% de l_0?

A-8 Después de ser acelerado bajo una diferencia de potencial de 100 volts, un haz de electrones se dispersa formando un cono de ángulos muy pequeños. Un solenoide ideal largo de 10 vueltas por centímetro tiene su eje alineado con el eje del cono. ¿Qué corriente se requerirá en el solenoide para reenfocar los electrones dentro de una distancia de 10 centímetros?

A-9 Supóngase que se producen partículas cargadas de velocidad despreciable en una de las placas de un condensador de placas paralelas cuya separación entre placas es d. Existe una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre las placas y una inducción uniforme $\mathbf{B}$ que es paralela a ellas. Demuéstrese que no habrá corriente entre las placas si $\Delta\phi$ es menor que $1/2\ (q/m_0)B^2d^2$.

A-10 Las curvas de la figura A-7 se dibujaron bajo la suposición de que q era positiva. ¿Qué cambios (si procede) habrá en esta figura, si $\mathbf{E}_\perp$ y $\mathbf{B}$ permanecen sin alteración pero q se hace negativa?

A-11 En $t = 0$, una partícula cargada en el origen tiene una velocidad $v_0\hat{\mathbf{z}}$. Está en presencia de los campos uniformes paralelos $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{x}}$. Encuéntrese las coordenadas x y y cuando la partícula ha alcanzado la mitad de su valor máximo de z por primera vez.

A-12 Una partícula cargada está en una región de **B** uniforme y está también sujeta a un campo gravitacional uniforme, de manera que la fuerza gravitacional sobre ella es $m_0\mathbf{g}$. Demuéstrese que tiene una velocidad de deriva igual a $m_o\,(\mathbf{g}_\perp \mathbf{X}\mathbf{B})/qB^2$. (Nòtese que esta velocidad de deriva depende de la razón carga a masa de la partícula).

A-13 En $t = 0$, una partícula cargada en el origen tiene una velocidad $\mathbf{v}_o = v_o\hat{\mathbf{x}}$. Hay presente un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$. Resuélvase la ecuación relativista (28-105) de movimiento para encontrar las coordenadas para tiempos posteriores. Verifíquese que para valores pequeños de t la trayectoria de la partícula es aproximadamente una parábola.

Apéndice

B

Propiedades electromagnéticas de la materia

Se han descrito los efectos que en su totalidad produce la materia sobre los campos electromagnéticos, en términos de parámetros tales como la susceptibilidad eléctrica, χ_e. Desde un punto de vista puramente macroscópico, se supone que tales parámetros son característicos de un material dado y que sus valores numéricos han de determinarse experimentalmente. En otras palabras, la formulación que del campo electromagnético se ha obtenido no intenta predecir sus valores. El hecho observado de que diversos materiales tienen diferentes valores de estas cantidades, indica que éstas dependen de los detalles de la estructura microscópica del material, esto es, de las propiedades atómica y molecular de sus constituyentes, así como de su estado de agregación, ya sea sólido, líquido o gaseoso.

En este apéndice se consideran algunos de los aspectos principales incluidos en un enfoque microscópico; se vio ya un ejemplo de esto en el breve análisis de la conductividad, en las secciones 12-5 y 24-8. Se pueden escribir, y se han escrito, libros completos sobre estos temas generales, por lo que necesariamente lo que aquí se haga será muy limitado. En particular, aunque la mecánica cuántica es la forma apropiada para abordar el estudio de los átomos y moléculas, se pueden obtener resultados suficientemente buenos empleando la mecánica clásica para investigar la respuesta mecánica de una colección de puntos masa cargados que interactúan con un campo electromagnético aplicado. Los resultados obtenidos de esta forma no son completamente exactos en todos los detalles, pero son sorprendentemente buenos y permiten una comprensión adecuada de lo que se persigue.

B-1 Propiedades eléctricas estáticas

Se desea evaluar la susceptibilidad eléctrica χ_e definida en (10-50) para materiales isotrópicos lineales por medio de

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{B-1}$$

Esta expresión demuestra que se debe calcular el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen, **P**. A su vez, **P** está relacionado con el momento dipolar promedio de las moléculas dentro del volumen.

Al principio de la seccióm 10-1, se analizó la posibilidad de que un material pudiera ser polarizado por la producción de un momento dipolar inducido. Este momento inducido

aparece cuando un campo eléctrico aplicado a una molécula neutral, sin momento dipolar permanente, desplaza las posiciones de las distribuciones de cargas positivas y negativas, unas respecto de las otras. El desplazamiento relativo es finito debido a que las fuerzas electrostáticas sobre las cargas experimentarán la oposición de fuerzas internas dentro de la misma molécula y se producirá un nuevo estado de equilibrio mecánico.

Para ser específicos, considérese una molécula neutra construida de n átomos. El átomo i-ésimo tiene un núcleo positivo de carga $z_i e$ junto con z_i electrones cada uno de carga $-e$, siendo z_i el número atómico. El número total de electrones será, por lo tanto, $z_t = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$. Si $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición del i-ésimo núcleo y $\mathbf{r}_j$ el del j-ésimo electrón, el momento dipolar total según (8-19) es

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} Z_i e \mathbf{r}_i - e \sum_{j=1}^{Z_t} \mathbf{r}_j \qquad \text{(B-2)}$$

Puesto que la molécula carece de momento monopolar, se sabe por (8-43) que se puede emplear cualquier origen conveniente para el sistema de coordenadas, por ejemplo, uno en el centro de la masa; para una molécula monoatómica, se podría elegir el origen donde se localiza el núcleo, por lo que el primer término de (B-2) sería cero. Puesto que las cargas se pueden suponer en movimiento, y particularmente los electrones recorriendo algunas "órbitas", $\mathbf{p}$ puede ser una complicada función del tiempo. Sin embargo, aquí sólo se hará referencia a valores promediados en el tiempo, por lo que aquello que realmente interesa es

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \sum_i Z_i e \langle \mathbf{r}_i \rangle - e \sum_j \langle \mathbf{r}_j \rangle \qquad \text{(B-3)}$$

por lo tanto,

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p} \rangle \qquad \text{(B-4)}$$

donde N es el número de moléculas por unidad de volumen.

Si los valores en ausencia de campo aplicado se designan por medio del subíndice cero, se puede escribir (B-3) como

$$\mathbf{p}_0 = \langle \mathbf{p} \rangle_0 = \sum_i Z_i e \langle \mathbf{r}_i \rangle_0 - e \sum_j \langle \mathbf{r}_j \rangle_0 \qquad \text{(B-5)}$$

Si $\mathbf{p}_0 \neq 0$ la molécula tiene un momento permanente, mientras que si $\mathbf{p}_0 = 0$ no lo tiene, y $\mathbf{P}$ según (B-4) puede deberse sólo a momentos inducidos. Por ejemplo, en una molécula monoatómica se puede suponer que la distribución de carga electrónica presenta simetría esférica respecto del núcleo. Así, si se elige el origen en el núcleo, se puede tomar $\langle \mathbf{r}_i \rangle_0 = 0$ y entonces $\langle \mathbf{r}_j \rangle_0$ será cero también, dado que habrá valores positivos y negativos igualmente probables para x_j, y_j, z_j, por lo que $\langle x_j \rangle_0 = \langle y_j \rangle_0 = \langle z_j \rangle_0$. El resultado será que $\mathbf{p}_0 = 0$, como se esperaba.

En presencia de un campo polarizante se puede esperar que cada $\langle \mathbf{r} \rangle$ sea diferente de $\langle \mathbf{r} \rangle_0$. Puesto que el desplazamiento resulta del equilibrio entre una fuerza electrostática y una fuerza "de restitución" mecánica interna, $\mathbf{F}_m$, se puede escribir

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = 0 = \mathbf{F}_m + q\mathbf{E}_p \qquad \text{(B-6)}$$

para la nueva situación de equilibrio y para cualquier carga q, como se hizo en (2-9). En (B-6), $\mathbf{E}_p$ es el campo eléctrico "efectivo" o "polarizante" que está produciendo el des-

plazamiento de las cargas. [Algunas veces se le denomina campo local, pero este nombre se ha empleado antes enseguida de (10-70) referido al campo producido por las cargas ligadas.] No es necesariamente igual al campo promedio macroscópico **E** en el material, puesto que la molécula en cuestión está contribuyendo ella misma a **E**; se regresará a este punto en breve.

Puesto que $\mathbf{F}_m$ describe alguna forma de fuerza de restitución, es de esperar que sea una función del desplazamiento ($\langle \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle_0$), y también que $\mathbf{F}_m(0) = 0$. Además, no se espera que el desplazamiento sea grande, por lo que es apropiado desarrollar $\mathbf{F}_m$ en serie de potencias de su argumento y conservar sólo el primer término; esto da

$$\mathbf{F}_m(\langle \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle_0) = -K(\langle \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle_0) \qquad \text{(B-7)}$$

donde K es una "constante de resorte" efectiva para esta carga q. Sustituyendo (B-7) en (B-6) se obtiene

$$\langle \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle_0 = \frac{q}{K}\mathbf{E}_p \qquad \text{(B-8)}$$

Si ahora se sustituye esta expresión en (B-3), empleando la carga apropiada en cada caso, y usando después (B-5) con la suposición de que $\mathbf{p}_0 = 0$, se encuentra que el momento dipolar inducido promedio es

$$\langle \mathbf{p} \rangle = e^2\left(\sum_i \frac{Z_i^2}{K_i} + \sum_j \frac{1}{K_j} \right)\mathbf{E}_p = \alpha \mathbf{E}_p \qquad \text{(B-9)}$$

y es linealmente proporcional al campo polarizante $\mathbf{E}_p$. La constante de proporcionalidad α se denomina *polarizabilidad.* [Recuérdese que en (11-112) se encontró un resultado similar para la esfera conductora conectada a tierra en un campo previamente uniforme]. Se ve que cuando se sustituye (B-9) en (B-4) la polarización será proporcional al campo inductor $\mathbf{E}_p$, como es de esperar para un material isotrópico lineal.

La polarizabilidad en (B-9) se expresa en términos de sumas que comprenden las diferentes "constantes de resorte" de la molécula. Se puede obtener también una estimación aproximada de su valor de una manera diferente, como sigue. Considérese que hay un átomo solo y que la distribución de carga electrónica no sólo presenta simetría esférica, sino que también es *uniforme* en toda la extensión de una esfera de radio a. Se supone además que el efecto del campo $\mathbf{E}_p$ es desplazar la distribución de carga negativa *rígidamente* con respecto al núcleo, de manera que el resultado final es un desplazamiento relativo $\mathbf{l}$ entre sus centros, como se muestra en la figura B-1. Por lo tanto, el momento dipolar inducido será $\langle \mathbf{p} \rangle = (z_e)\mathbf{l}$, por (8-44). La carga nuclear z_e se puede considerar entonces en equilibrio bajo la influencia de $\mathbf{E}_p$ y del campo eléctrico en la superficie de la esfera de carga negativa uniforme cuyo radio es l. Igualando E_p con la magnitud de este campo, dado por (4-21), se obtiene $E = (z_e)l/4\pi\epsilon_0 a^3 = E_p$ y, por lo tanto, $\langle p \rangle = z_e l = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_p$. Así, la polarizabilidad es

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 \qquad \text{(B-10)}$$

y es proporcional al volumen del átomo. [Observese que (B-10) es lo mismo que se encontró para la esfera conductora en (11-113)].

Ahora se vuelve al problema de la evaluación del campo polarizador $\mathbf{E}_p$. Se supone que el material es homogéneo, así como lineal e isotrópico. Se desea el campo eléctrico total en la posición de la molécula, excepto aquél que aparece debido a la propia molé-

cula. Si se considera el caso usual de un material dentro de un capacitor, el campo $\mathbf{E}_p$ tendrá contribuciones procedentes de las cargas libres sobre las placas, de las cargas superficiales ligadas sobre las fronteras del dieléctrico y de *todo el efecto* de los dipolos en el material. Así, se puede escribir

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_f + \mathbf{E}_b + \mathbf{E}_D \tag{B-11}$$

[Si se supone que no hay carga libre dentro del dieléctrico, tampoco habrá densidad volumétrica de carga ligada, por (10-58); en la figura 10-6 se ilustran las cargas que contribuyen a $\mathbf{E}_f$ y a $\mathbf{E}_b$, para un capacitor de placas paralelas]. Ahora se sabe que el campo promedio macroscópico se produce sólo para las cargas superficiales libres y ligadas, por lo que $\mathbf{E}_f + \mathbf{E}_b$ es en realidad $\mathbf{E}$, pudiéndose así escribir

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E} + \mathbf{E}_D \tag{B-12}$$

EL momento dipolar de cada uno de los dipolos restantes contribuye a $\mathbf{E}_D$. Alejándose a considerable distancia de la molécula en cuestión, los dipolos aparecerán como distribuidos en forma continua, por lo que será apropiado describirlos en términos del momento dipolar uniforme por unidad de volumen, $\mathbf{P}$. Por otra parte, los otros dipolos que están muy próximos a escala microscópica aparecerán como dipolos discretos localizados en puntos específicos; en otras palabras, no se les puede manejar como una distribución continua. Esto sugiere que si se dibuja una esfera de algún radio apropiado R en torno al punto en cuestión, se puede dividir el espacio en dos regiones en el exterior de la esfera los dipolos serán descritos por $\mathbf{P}$ y contribuirán con $\mathbf{E}_0$ a $\mathbf{E}_D$, mientras que en el interior de la esfera se les trata en forma individual y su contribución a $\mathbf{E}_D$ se escribirá como $\mathbf{E}_I$. Así, (B-12) resulta ser

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E} + \mathbf{E}_O + \mathbf{E}_I \tag{B-13}$$

En la figura B-2 se muestra esta esfera hipotética. Es evidente que el valor apropiado para R no es único, puesto que la distinción entre las distribuciones "continua" y "discreta" no resulta muy clara; sin embargo, se puede elegir un valor razonable para R. Para el material en el exterior de la esfera, $\rho_b = 0$ por (10-58), y se ve que es completamente equi-

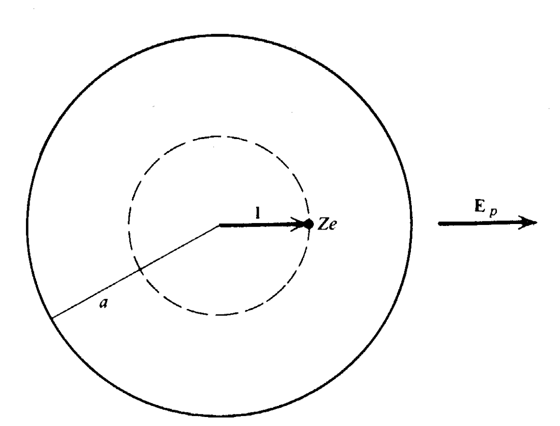


Figura B-1. El núcleo y la distribución de carga electrónica están rígidamente desplazados por l.

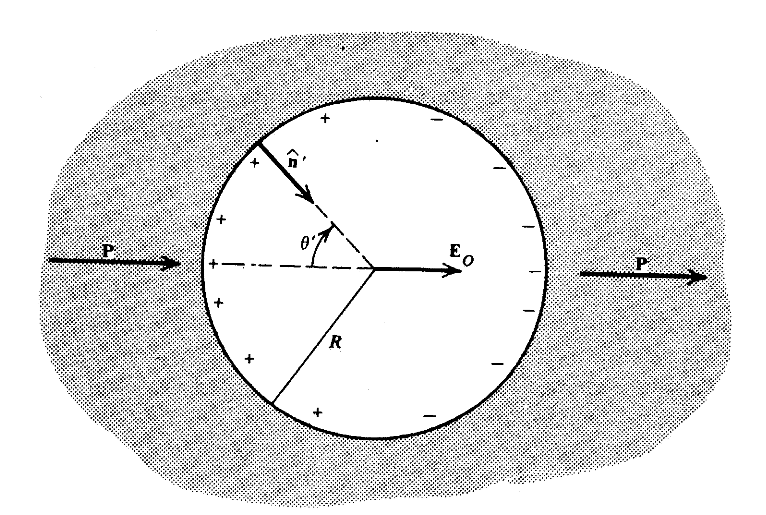


Figura B-2. Cavidad esférica hipotética empleada para calcular el campo eléctrico debido al material polarizado en su exterior.

valente sólo a las cargas superficiales ligadas sobre la superficie de la esfera que aparecen por la discontinuidad de **P** ahí. La densidad superficial de esas cargas ligadas se puede encontrar de (10-8) y es $\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}' = P\cos\theta'$ Esta es exactamente la densidad superficial de carga de (10-27), la cual se ilustra en la figura 10-9. Se encontró que el campo producido por ella tenía la longitud $P/3\epsilon_0$, en (10-37), y se ve por los signos de la distribución de carga de la figura B-2 que tendrá la misma dirección que **P**. Así, $\mathbf{E}_0 = \mathbf{P}/3\epsilon_0$ y (B-13) resulta

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} + \mathbf{E}_I \tag{B-14}$$

En la situación más general $\mathbf{E}_I$ puede ser diferente de cero, pero se considerará un gran número de casos para los cuales $\mathbf{E}_I = 0$. A continuación se ve cómo ocurre esto. La ecuación 8-84 da el campo eléctrico producido por un dipolo puntual localizado en el origen. Si en vez de eso se localiza el dipolo $\mathbf{p}_k$ en un punto $\mathbf{r}_k$ respecto del origen elegido en el centro de la esfera, se puede sustituir a $\mathbf{r}$ en (8-84) por $-\mathbf{r}_k$, por lo que la distribución de $\mathbf{p}_k$ al campo en el centro será

$$\mathbf{E}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{\mathbf{p}_k}{r_k^3} + \frac{3(\mathbf{p}_k\cdot\mathbf{r}_k)\mathbf{r}_k}{r_k^5}\right] \tag{B-15}$$

Cuando se suma (B-15) sobre todos los dipolos dentro de la esfera, se obtiene $\mathbf{E}_I$. Haciendo esto y notando que en un material polarizado de manera uniforme todas las moléculas tienen el mismo momento dipolar promedio, se puede hacer $\mathbf{p}_k = \langle \mathbf{p} \rangle$ y obtener así

$$\mathbf{E}_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\langle\mathbf{p}\rangle\sum_k \frac{1}{r_k^3} + 3\sum_k \frac{(\langle\mathbf{p}\rangle\cdot\mathbf{r}_k)\mathbf{r}_k}{r_k^5}\right] \tag{B-16}$$

La componente x de esta expresión es

$$E_{Ix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\langle p_x\rangle\sum_k \frac{1}{r_k^3} + 3\langle p_x\rangle\sum_k \frac{x_k^2}{r_k^5} + 3\langle p_y\rangle\sum_k \frac{y_k x_k}{r_k^5} + 3\langle p_z\rangle\sum_k \frac{z_k x_k}{r_k^5}\right) \tag{B-17}$$

Si los dipolos están distribuidos de manera isotrópica, entonces para cada molécula con coordenadas (x,y,z) habrá una con coordenadas $(-x, -y, -z)$ o $(-x, y, z)$, y así sucesivamente. Puesto que en realidad habrá un gran número de moléculas dentro de la esfera, los términos en las últimas dos sumas serán positivos y negativos con igual probabilidad, para una magnitud dada de r_k, por lo que

$$\sum_k \frac{y_k x_k}{r_k^5} = \sum_k \frac{z_k x_k}{r_k^5} = 0$$

De manera similar, para un r_k dado, los cuadrados de las coordenadas aparecerán con igual probabilidad, por lo que en el promedio, $\langle x_k^2 \rangle = \langle y_k^2 \rangle = \langle z_k^2 \rangle$ y $r_k^2 = \langle x_k^2 \rangle + \langle y_k^2 \rangle + \langle z_k^2 \rangle = 3\langle x_k^2 \rangle$. Puesto que esto será cierto para cada r_k, cuando se suma sobre el gran número de moléculas se obtiene

$$\sum_k \frac{x_k^2}{r_k^5} = \frac{1}{3}\sum_k \frac{1}{r_k^3}$$

por lo que (B-17) resulta ser $E_{Ix} = 0$. Se obtendrán resultados similares para las componentes y y z. Así, $\mathbf{E}_I = 0$ y (B-14) resulta simplemente

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \tag{B-18}$$

El razonamiento que condujo de (B-16) a (B-18) sería aplicable si los polos estuvieran distribuidos según un arreglo cúbico sencillo. De manera similar, $\mathbf{E}_I$ sería cero si las posiciones de los dipolos fueran completamente aleatorias, como sería el caso en un líquido o en un gas. En consecuencia, hay un gran número de situaciones para las cuales se puede esperar que (B-18) sea adecuada.

Si ahora se combinan (B-18), (B-9) y (B-4), se encuentra que

$$\mathbf{P} = N\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}\right) \tag{B-19}$$

por lo que, cuando se resuelve ésta para **P** y se emplea (B-1), se ecuentra que

$$\chi_e = \frac{(N\alpha/\epsilon_0)}{1-(N\alpha/3\epsilon_0)} \tag{B-20}$$

la cual relaciona la susceptibilidad macroscópica con la polarizabilidad microscópica α y con la densidad numérica N. En forma inversa, si se escribe $X_e = k_e - 1$ por (10-52) y se resuelve (B-20) para α, se obtiene

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0(\kappa_e - 1)}{N(\kappa_e + 2)} \tag{B-21}$$

a la cual se le conoce como la *relación de Clausius-Mossotti*. Puesto que α es una constante, (B-21) expresa que si se varía la densidad del material, la constante dieléctrica κ_e variará también en tal forma que la cantidad sobre el segundo miembro permanecerá constante. Por otra parte, se pueden emplear valores estimados de κ_e para evaluar α; si esto se combina entonces con (B-10), se puede encontrar el radio atómico a. Los valores de a así obtenidos concuerdan muy bien con los obtenidos por otros procedimientos.

Ahora supóngase que la molécula tiene un momento dipolar permanente, esto es, $\mathbf{p}_0$ de (B-5) es diferente de cero. También se consideró esta posibilidad en la sección 10-1 y se concluyó que, en presencia del campo, el momento de torsión sobre $\mathbf{p}_0$ descrita por (8-75) tenderá a alinear los dipolos permanentes en la dirección del campo. Esta tendencia encontrará oposición en procesos de tipo aleatorio como colisiones asociadas con agitación térmica de las moléculas. No obstante, es de esperar que en el estado final de equilibrio aún habrá un momento dipolar neto en la dirección de $\mathbf{E}_p$, por lo que $\langle \mathbf{p} \rangle \neq 0$, pero también se espera que $\langle \mathbf{p} \rangle < \mathbf{p}_0$. En tal caso, se puede esperar también que $\langle \mathbf{p} \rangle$ tenga una dependencia con respecto a la temperatura absoluta T, y esto a su vez hará que la susceptibilidad dependa de la temperatura, además de existir cierta variación asociada con un cambio en la densidad numérica N al variar T.

A fin de encontrar el momento dipolar promedio para condiciones de equilibrio a una temperatura dada, se debe recurrir a un resultado de la mecánica estadística que expresa que la probabilidad de encontrar un sistema en un estado cuántico de energía W_m está dada por

$$\mathcal{P}_m(W_m) = \frac{e^{-\beta W_m}}{\sum_m e^{-\beta W_m}} \tag{B-22}$$

donde $\beta = 1/kT$, siendo k la constante de Boltzmann, cuyo valor es 1.38×10^{-23} joule/k. Es necesario el denominador que aparece en (B-22) a fin de que la probabilidad total de encontrar el sistema en algún estado sea la unidad, esto es, para que $\Sigma_m \quad _m = 1$.

Si ψ es una variable dinámica de interés cuyo valor en el estado m-ésimo es ψ_m, entonces su valor promedio estará dado por la definición usual de un promedio:

$$\langle \psi \rangle = \sum_m \psi_m \mathcal{P}_m = \frac{\sum_m \psi_m e^{-\beta W_m}}{\sum_m e^{-\beta W_m}} \tag{B-23}$$

Hablando de manera estricta, (B-22) y (B-23) se aplican a los estados cuánticos de un sistema único de interés. Se puede demostrar que si el sistema consiste en una colección de moléculas independientes, o aproximadamente independientes, entonces estos resultados se pueden también aplicar a una molécula única, siendo W_m ahora la energía de una molécula y $\langle \psi \rangle$ es el valor promedio para una molécula dada. Además, se puede demostrar también que en el límite, donde es aplicable la mecánica clásica, es posible sustituir la suma en (B-23) por integrales sobre las componentes del momento lineal y las coordenadas de posición. Así, en coordenadas rectangulares (B-23) resultaría ser

$$\langle \psi \rangle = \frac{\int \psi e^{-\beta W} dv_x\, dv_y\, dv_z\, dx\, dy\, dz}{\int e^{-\beta W} dv_x\, dv_y\, dv_z\, dx\, dy\, dz} \tag{B-24}$$

puesto que $dp_x = d(m_0 v_x) = m_0 dv_x$, y así sucesivamente, y los factores m_0^3 se cancelarían en numerador y denominador. Las integrales por lo general serán séxtuples, con límites apropiados de integración, y para poder emplear (B-24) se necesita conocer tanto W como ψ en función de (v_x, v_y, v_z, x, y, z). [Por ejemplo, si se estuviera tratando con un gas ideal en el cual se pudieran despreciar las interacciones entre las moléculas, entonces W sería simplemente la energía cinética dada por (A-8) como $\frac{1}{2}m_0 v^2$, por lo que (B-22) daría

$\psi \sim e^{-m_0 v^2/2kT} dv_x dv_y dv_z dx dy dz$, la cual es la conocida función de distribución de velocidad de Maxwell].

En general, W incluirá tanto la energía potencial como la energía cinética. Aquí resulta de particular interés la energía de interacción u "orientación" de un dipolo en un campo eléctrico aplicado; ésta se obtiene de (8-73) como $U_D = -p_0 E_p \cos\theta$, que ahora se está tratando con un dipolo permanente $\mathbf{p}_0$ en un campo polarizador $\mathbf{E}_p$ y el ángulo entre ellos se está escribiendo ahora como θ. Entonces, W' designa a todo el resto de la energía, se puede escribir

$$W = W' - p_0 E_p \cos\theta \tag{B-25}$$

suponiendo a W' independiente de θ. La cantidad que interesa aquí es la componente de $\mathbf{p}_0$ en la dirección de $\mathbf{E}_p$, por lo que se hace $\psi = p_0 \cos\theta$. Si se escribe el elemento de volumen como $dxdydz = r^2$ sen $\theta d\theta d\varphi$ y se inserta $p_0 \cos\theta$ en (B-24), se ve que las integrales que incluyen W', r, φ y cada componente de $\mathbf{v}$ se cancelarán en numerador y denominador y quedará

$$\langle p_0 \cos\theta \rangle = \frac{\int_0^\pi p_0 \cos\theta\, e^{\beta p_0 E_p \cos\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\int_0^\pi e^{\beta p_0 E_p \cos\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta} = \frac{\int_{-1}^{1} p_0 \mu e^{\beta p_0 E_p \mu} d\mu}{\int_{-1}^{1} e^{\beta p_0 E_p \mu} d\mu} \tag{B-26}$$

empleando (2-22). Por último, si se hace

$$y = \beta p_0 E_p = \frac{p_0 E_p}{kT} \tag{B-27}$$

se puede escribir (B-26) como

$$\langle p_0 \cos\theta \rangle = p_0 \frac{d}{dy} \ln \int_{-1}^{1} e^{y\mu} d\mu = p_0 \frac{d}{dy} \ln\left(\frac{2\operatorname{senh} y}{y}\right) = p_0 L\left(\frac{p_0 E_p}{kT}\right) \tag{B-28}$$

donde

$$L(y) = \coth y - \frac{1}{y} \tag{B-29}$$

que se denomina la *función de Langevin* y da el valor del cociente entre la componente de $\mathbf{p}_0$ y su valor máximo p_0. En la figura B-3 se muestra la función $L(y)$ como una función

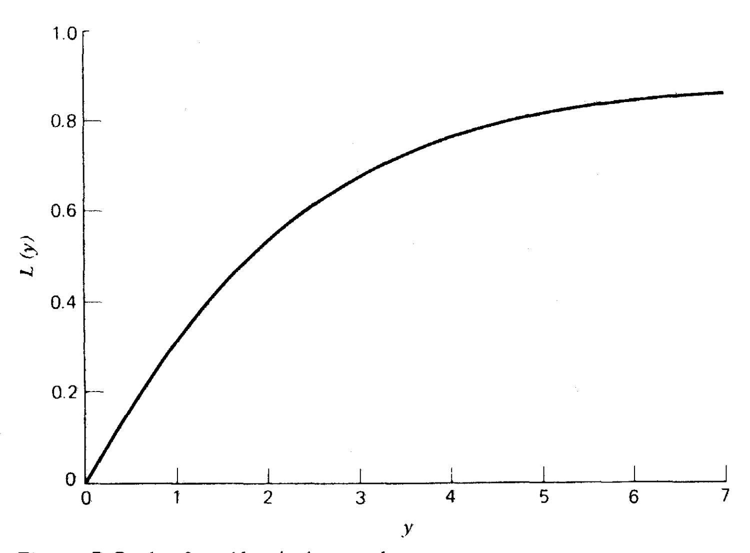


Figura B-3. La función de Langevin.

de y. Se ve que $L(y) \to 1$ cuando y adopta valores muy grandes, esto es, para campos polarizadores grandes y/o muy bajas temperaturas. En este caso, $\langle p_0 \cos\theta \rangle \simeq p_0$, lo cual corresponde a un alineamiento casi completo de dos tipos permanentes con el campo polarizador. Se dice entonces que el material está saturado.

Por lo tanto, el comportamiento de $\langle p_0 \cos\theta \rangle$ es no lineal en E_p, como se podría haber esperado. Para valores muy pequeños de y, correspondientes a E_p pequeño y/o alta temperatura, se puede desarrollar $L(y)$ en serie de potencias y se encuentra que

$$L(y) \simeq \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{3} - \frac{y^3}{45} + \cdots \right) - \frac{1}{y} \simeq \frac{y}{3} \qquad (y \ll 1) \tag{B-30}$$

Combinando esta expresión con (B-28), (B-27) y (B-4), se encuentra que la magnitud de la polarización es

$$P = N\langle p_0 \cos\theta \rangle = \frac{N p_0^2}{3kT} E_p \tag{B-31}$$

la cual es lineal en E_p. La polarizabilidad correspondiente es

$$\alpha_C = \frac{p_0^2}{3kT} \tag{B-32}$$

y es inversamente proporcional a la temperatura. Al resultado (B-31) se le conoce como *ley de Curie* para los dieléctricos.

Se pueden hacer algunas estimaciones numéricas para ver si (B-30) es una aproximación razonable. El valor p_0 será típicamente del orden de magnitud de la carga electrónica por alguna fracción del radio a de la molécula. Puesto que a es del orden de 10^{-10} metros, se obtiene $p_0 \approx 10^{-30}$ coulomb-metro. A temperaturas alrededor de la temperatura ambiente ($T \simeq 290°$K), se encuentra que (B-31) es por lo general una muy buena aproximación.

Bajo estas mismas condiciones, la polarizabilidad, según se encuentra de (B-32), es $\alpha_C \approx 10^{-40}$ (metros)^3. Se encuentra que la polarizabilidad asociada con la polarización inducida dada por (B-10) es $\alpha \approx 10^{-40}$ (metros)^3, por lo que estas cantidades son de magnitud comparable. En consecuencia, para moléculas polares resulta apropiado hablar de una polarizabilidad total como la suma de ambas:

$$\alpha_t = \alpha + \alpha_C = \alpha + \frac{p_0^2}{3kT} \tag{B-33}$$

La expresión comparable a la relación de Clausius-Mossotti sería entonces

$$\frac{3\epsilon_0(\kappa_e - 1)}{N(\kappa_e + 2)} = \alpha + \frac{p_0^2}{3kT} \tag{B-34}$$

expresión a la que se conoce como *ecuación de Debye*. Si se evalúa la cantidad en el primer miembro a partir de valores estimados y después se le grafica como una función de $1/T$, se ve que el resultado debe ser una línea recta cuya intersección dará la polarizabilidad inducida α. De manera similar, la pendiente de la línea dará $p_0^2/3k$, de lo cual se puede encontrar p_0.

Los materiales ferroeléctricos, que pueden tener una polarización en ausencia de campo, se examinan de una manera más conveniente después de que se consideren los materiales magnéticos, en cierta medida análogos; esto se hará al final de la siguiente sección.

B-2 Propiedades magnéticas estáticas

Inicialmente se consideran sólo materiales magnéticos isotrópicos lineales, por lo que el interés aquí es encontrar la susceptibilidad magnética χ_m definida en (20-52) mediante $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$. Prácticamente para todos los materiales que se pueden escribir de manera adecuada por medio de esta relación, se encuentra que $|\chi_m| << 1$, por lo que, de (20-56), será casi igualmente exacto emplear $\mathbf{M} = X_m\ \mathbf{B}/\mu_0$. Por lo tanto, para los propósitos de la presente sección la ecuación de definición puede escribirse

$$\mathbf{M}=\chi_m\mathbf{H}=\chi_m\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\right) \tag{B-35}$$

y dentro del material por lo general sólo se emplea $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ para relacionar los dos campos.

En la última sección se introdujo el campo polarizante $\mathbf{E}_p$ como el campo en la posición de la molécula debido a todo el resto del material. De manera similar se desea definir un campo magnetizante $\mathbf{H}_m$ (y en consecuencia $\mathbf{B}_m$), el cual es el campo que afecta a la molécula y aparece debido a todas las corrientes excepto aquélla que se puede atribuir a la propia molécula. En este caso, se pueden repetir casi al pie de la letra los argumentos que condujeron a (b-13), por lo que se puede poner por escrito

$$\mathbf{H}_m=\mathbf{H}+\mathbf{H}_O+\mathbf{H}_I \tag{B-36}$$

donde $\mathbf{H}_0$ es el campo magnético debido a la distribución continua de la magnetización $\mathbf{M}$ en el exterior de la esfera de radio R que se muestra en la figura B-4. Puesto que existe una discontinuidad en la componente normal de $\mathbf{M}$ en la superficie de esta esfera y no hay corrientes libres dentro del material, se puede encontrar $\mathbf{H}_0$ en el centro, ya sea *vía* las corrientes superficiales ligadas dadas por (20-8) como $K_m = \mathbf{M}\mathrm{X}\hat{\mathbf{n}}'$, o a partir de la densidad superficial de los polos $\sigma_m = \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{n}}'$ de acuerdo con (20-42); el resultado será el mismo en una u otra forma. En este caso, se ve por la figura que $\sigma_m = M \cos\theta'$ y tiene el signo indicado; así, la dirección de $\mathbf{H}_0$ es la misma que la de $\mathbf{M}$. Esta distribución

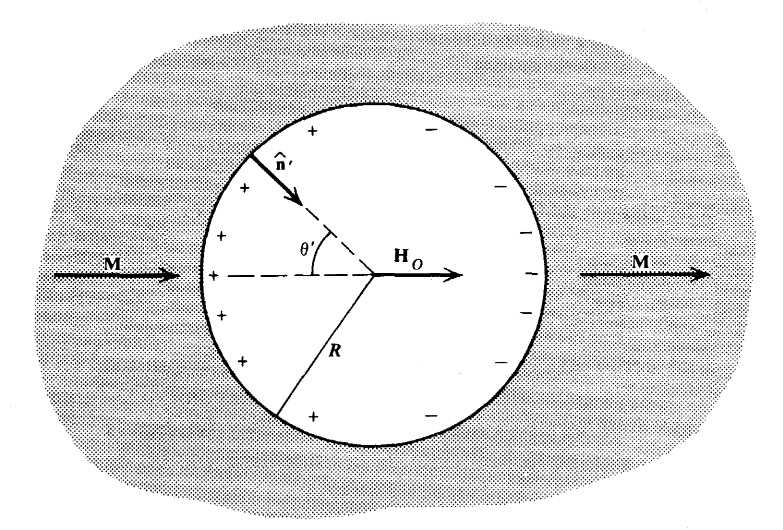


Figura B-4. Cavidad esférica hipotética empleada para calcular el campo magnético debido al material magnetizado en su exterior.

polar es exactamente la de (20-48), para la que se encontró la magnitud de $\mathbf{H}_0$ a partir de (20-49) como $M/3$; sustituyendo esto en (B-36) se obtiene

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3} + \mathbf{H}_I \tag{B-37}$$

y la inducción correspondiente sería $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{M}/3$. [La discrepancia aparente en signo entre (B-37) y (20-49), así como la diferencia en valor de **B** dentro de las esferas, obedece al hecho de que (20-49) fue obtenida para una esfera de magnetización **M** para la cual ésta es diferente de cero en el interior, mientras que en el presente caso el interés reside en el campo del interior de una esfera vacía situada dentro de un material magnetizante de manera uniforme. Esto se puede ver comparando las figuras 20-8 y B-4; nótese que las distribuciones polares tienen la misma dependencia angular en los dos casos, pero *signos opuestos* con respecto a la dirección de **M** –los ángulos θ' están definidos de manera diferente en las dos figuras.]

De manera similar, los argumentos que demostraron que hay un gran número de casos para los cuales $\mathbf{E}_I = 0$ en el caso eléctrico, pueden ser igualmente empleados en el caso magnético, a causa de la completa analogía entre (8-84) y (19-55) que dan los campos de los dipolos correspondientes. Consecuentemente, se hace restricción a los casos en los cuales $\mathbf{H}_I$ puede considerarse cero, y combinando (B-37) con la aproximación $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ se puede escribir

$$\mathbf{B}_m = \mu_0\mathbf{H}_m = \mu_0\left(\mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{3}\right) = \mu_0\left(1 + \frac{1}{3}\chi_m\right)\mathbf{H} \tag{B-38}$$

como la inducción que actúa sobre la molécula en cuestión.

Se señaló después de (20-52) que, en contraste con el caso eléctrico, la susceptibilidad puede ser negativa. A tal material se le denomina *diamagnético*, y se ve ahora que ello se debe a los dipolos inducidos que aparecen por el movimiento orbital alterado de los electrones cuando se aplica un campo; como se verá, los momentos inducidos están en dirección opuesta al campo inductor.

Supóngase que un electrón en un átomo está girando en una órbita circular de radio a con una velocidad angular ω_0, en ausencia de un campo. Habrá necesariamente una fuerza centrípeta, $\mathbf{F}_c$, sobre él, la cual se debe a interacciones internas dentro del átomo y cuya magnitud está dada por

$$F_c = \frac{m_e v_0^2}{a} = m_e\omega_0^2 a \tag{B-39}$$

donde m_e es la masa en reposo del electrón. En presencia de un campo $\mathbf{B}_m$ habrá una fuerza adicional sobre el electrón dada por $\mathbf{F}_m = -e\mathbf{v}\mathrm{X}\mathbf{B}_m$, de acuerdo con (14-30). Si se supone que **v** y $\mathbf{B}_m$ son perpendiculares, por sencillez, la magnitud de esta fuerza será evB_m y estará dirigida en forma radial, hacia afuera dependiendo del sentido de **v** en relación con $\mathbf{B}_m$. En la figura B-5 se muestra esto para el caso en el cual $\mathbf{B}_m$ está dirigida hacia afuera de la página; se ve que la velocidad angular vectorial ω sale de la página en (a) y en consecuencia es paralela a $\mathbf{B}_m$, mientras que entra a la página y es antiparalela a $\mathbf{B}_m$ en (b). Si se supone por ahora que el radio de la órbita permanece constante, y así F_c lo será también, la nueva fuerza centrípeta se puede escribir como

$$F_c \pm evB_m = F_c \pm e\omega aB_m = m_e\omega^2 a \tag{B-40}$$

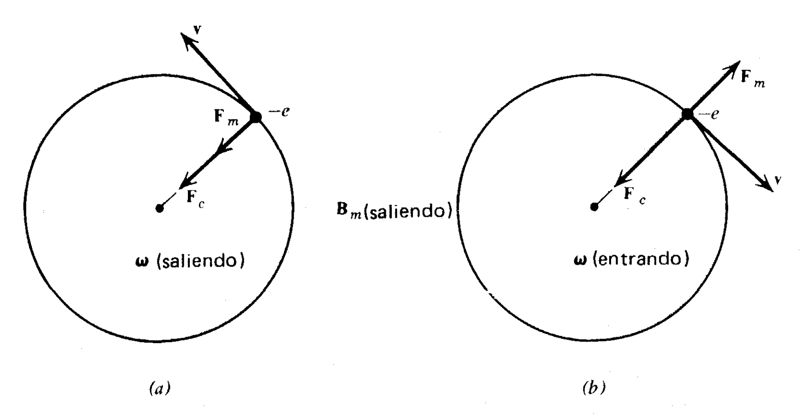


Figura B-5. Fuerzas que actúan sobre un electrón de un átomo en presencia de un campo magnetizante.

donde la elección de signos corresponde al signo de ω en relación con $\mathbf{B}_m$, esto es, el signo superior para (*a*) y el signo inferior para (*b*) en la figura. Se ve que ω debe ser diferente en presencia de $\mathbf{B}_m$.

Sustituyendo F_c de (B-39) se encuentra que (B-40) conduce a

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = \pm \frac{e}{m_e}\omega B_m \tag{B-41}$$

Resulta que el cambio de frecuencia $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ es muy pequeño, incluso para valores muy grandes de $\mathbf{B}_m$. Como resultado, se puede aproximar a $\omega + \omega_0$ como $2\omega_0$ y sustituir a ω por ω_0 en el segundo miembro; por lo tanto, se encuentra que

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \pm \frac{e}{2m_e} B_m \tag{B-42}$$

por lo que ω resulta incrementada para ω paralela a $\mathbf{B}_m$ y disminuida si ω es antiparalela Al valor numérico de $eB_m/2m_e$ se le denomina *frecuencia de Larmor.*

Ya que se ha supuesto a constante, un nuevo valor de ω significa que ha cambiado la velocidad $v = \omega a$ del electrón. Esto significa que ha cambiado la energía cinética, por lo que se debe haber efectuado trabajo sobre el electrón. Se puede evaluar este trabajo y ver si es compatible con los resultados obtenidos. Durante el proceso de cambio de la inducción desde cero a $\mathbf{B}_m$, existe una fem inducida dada por (17-6) que es

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \oint \mathbf{E}_{\text{ind}} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB_m}{dt} \tag{B-43}$$

y corresponde a un campo eléctrico inducido $\mathbf{E}_{\text{ind}}$, el cual está en el sentido de las manecillas del reloj en la figura B-5. No obstante, a causa de la carga negativa del electrón la fuerza correspondiente $-e\mathbf{E}_{\text{ind}}$ será opuesta al campo inducido. En consecuencia, el trabajo efectuado *sobre* el electrón por cada recorrido de su órbita será $\pm e|\mathcal{E}_{\text{ind}}|$ con la misma elección de signos que antes. Puesto que el número de veces que la recorre en un segundo es la frecuencia $\omega'/2\pi$, donde ω' es un valor intermedio de la frecuencia circular, la rapidez a la cual la inducción al cambiar está efectuando trabajo sobre la carga es

$$\frac{dW}{dt} = \pm \frac{\omega' e}{2\pi}|\mathcal{E}_{\text{ind}}| = \pm \frac{1}{2} e a^2 \omega' \frac{dB_m}{dt}$$

Suponiendo de nuevo que el radio a es constante, se puede hacer esto igual a la rapidez a la cual está cambiando la energía cinética $\frac{1}{2}m_e v'^2 = \frac{1}{2}m_e a^2 \omega'^2$; así, resulta

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_e a^2\omega'^2\right) = m_e a^2 \omega' \frac{d\omega'}{dt} = \pm \frac{1}{2} e a^2 \omega' \frac{dB_m}{dt}$$

Esto demuestra que $d\omega' = \pm(e/2m_e)dB_m$ u así el cambio total en ω será

$$\Delta\omega = \int_0^{B_m} \pm\left(\frac{e}{2m_e}\right) dB_m = \pm \frac{e}{2m_e} B_m$$

en concordancia con (B-42).

Es conveniente poner estos resultados en forma vectorial. En la figura B-6 se muestra lo que es esncialmente una vista lateral de la figura B-5; las partes (a) y (b) de las dos figuras corresponden, mientras que (c) muestra la dirección de $\mathbf{B}_m$. Puesto que (a) corresponde al signo superior de (B-42), la magnitud de ω aumenta y se ve que $\Delta\omega$ está en la misma dirección que $\mathbf{B}_m$; el signo inferior de (B-42) indica una disminución de la magnitud de ω, y (b) de la figura B-6 muestra que $\Delta\omega$ está de nuevo en la misma dirección que $\mathbf{B}_m$. Por lo tanto, se tiene el resultado general de que

$$\Delta\omega = \frac{e}{2m_e}\mathbf{B}_m \qquad \text{(B-44)}$$

para los electrones en órbitas definidas. Ahora se necesita relacionar estos resultados con los momentos dipolares inducidos.

Un electrón que recorre uno u otro de los círculos de la figura B-5 es quivalente a un elemento de corriente $I d\mathbf{s} = q\mathbf{v} = -e\mathbf{v}$, por (14-29), y tendrá un momento dipolar magnético $\mathbf{m}$. Se ve de la figura B-5 que $\mathbf{m}$ estará dirigido hacia el interior de la página y por ello será opuesto a ω; $\mathbf{m}$ es también opuesto a ω para (b), ya que en este caso sale de la página. De acuerdo con (19-27), $m = IS = I\pi a^2$, donde I es la magnitud de la corriente equivalente. Puesto que la carga total e pasa una vez en cada vuelta por un punto dado sobre el perímetro, y debido a que cada circuito le lleva un tiempo igual al período $\tau = 2\pi/\omega$, la corriente equivalente es $I = e/\tau = e\omega/2\pi$ y, por lo tanto, $m = \frac{1}{2}ea^2\omega$. Combinando ésta con el hecho de que $\mathbf{m}$ y ω están en direcciones opuestas, se obtiene

$$\mathbf{m} = -\tfrac{1}{2}ea^2\boldsymbol{\omega} \qquad \text{(B-45)}$$

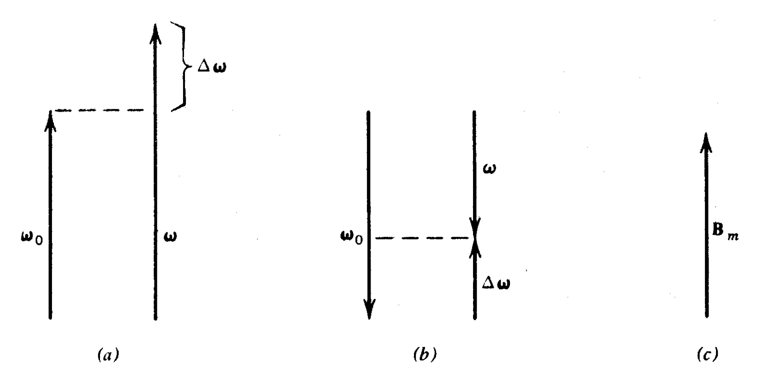


Figura B-6. Cambios en la velocidad angular de un electrón en un átomo producidos por un campo magnetizante.

para un electrón en una órbita definida.

En realidad, el interés reside en el *momento inducido* producido por $\mathbf{B}_m$, esto es, el cambio $\Delta\mathbf{m}$. Calculando $\Delta\mathbf{m}$ de (B-45) y empleando (B-44), se obtiene

$$\Delta\mathbf{m} = -\tfrac{1}{2}ea^2\Delta\omega = -\frac{e^2}{4m_e}a^2\mathbf{B}_m \tag{B-46}$$

la cual se nota que en realidad es independiente del signo de la carga, puesto que es $\sim e^2$. Cada electrón en la molécula dará una distribución así, siempre que a^2 tenga el valor apropiado. Aquí se obtuvo (B-46) suponiendo que $\mathbf{B}_m$ era perpendicular al punto de la órbita; si $\mathbf{B}_m$ estuviera en al dirección del eje z, se tendría $a^2 = x_j^2 + y_j^2$ para el electrón j-ésimo. En consecuencia, si se suma sobre todos los electrones y se promedia sobre todas las orientaciones, se encuentra que el momento dipolar inducido promedio para una molécula es

$$\langle\Delta\mathbf{m}\rangle = -\frac{e^2}{4m_e}\langle\sum_j (x_j^2+y_j^2)\rangle\mathbf{B}_m = -\frac{e^2}{4m_e}\left[\sum_j (\langle x_j^2\rangle + \langle y_j^2\rangle)\right]\mathbf{B}_m$$

y si se multiplica esto por el número de moléculas por unidad de volumen, N, y se emplea (B-38), se encuentra que la magnetización es

$$\mathbf{M} = -\frac{\mu_0 N e^2}{4m_e}\left[\sum_j (\langle x_j^2\rangle + \langle y_j^2\rangle)\right]\mathbf{H}_m \tag{B-47}$$

Se verá en breve que $|\chi_m| << 1$ en este caso, por lo que $\mathbf{H}_m \simeq \mathbf{H}$ por (B-38); al comparar (B-47) con (B-35) se encuentra que la susceptibilidad es

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 N e^2}{4m_e}\sum_j (\langle x_j^2\rangle + \langle y_j^2\rangle) \tag{B-48}$$

y es negativa puesto que todos los términos en esta expresión son positivos. Así, el mecanismo que se ha venido analizando en realidad origina diamagnetismo.

Para un átomo con distribución de carga isotrópica, se puede emplear el resultado obtenido después de (B-17) en el sentido de que $\langle x_j^2\rangle = \langle y_j^2\rangle = \frac{1}{3}r_j^2$, para una distancia dada r_j desde el núcleo, y cuando se pone esto en (B-48) se obtiene finalmente

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 N e^2}{6m_e}\sum_j r_j^2 = -\frac{\mu_0 N Z e^2}{6m_e}\langle r^2\rangle \tag{B-49}$$

donde z es el número de electrones.

Como un ejemplo numérico, supóngase que se considera helio a temperatura y presión normales (0° C y 1 atmósfera) para el cual $N \simeq 3\times10^{25}$ (metros)$^{-3}$. Tomando también $z = 2$ y $\langle r^2\rangle \approx 10^{-20}$ (metros)^2, se encuentra que $\chi_m \approx -3\times10^{-9}$. Esto es aproximadamente igual a lo que se observa, y también justifica la aseveración de que $|\chi_m| << 1$.

El caso paramagnético, para el cual χ_m es positiva, surge debido a la existencia de dipolos magnéticos permanentes. En (B-45) se encontró un momento dipolar magnético para un electrón en una órbita definida; si se multiplica y divide a éste por la masa del electrón m_e, se obtiene

$$\mathbf{m}_{\text{orb}} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)(m_e a^2)\omega = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{l} \tag{B-50}$$

donde $\mathbf{l}$ es su momento angular orbital, puesto que $m_e a^2$ es el momento de inercia de la partícula. El factor de proporcionalidad $(-e/2m_e)$ se denomina *relación giromagnética.* Así, (B-50) constituye una conexión entre las propiedades magnéticas y mecánicas de un electrón, y se ve que $\mathbf{m}$ está siempre en dirección opuesta a $\mathbf{l}$. [Si se repitiera la deducción que condujo a (B-45) para una carga arbitraria q, se obtendría $\mathbf{m}_{\text{orb}} = (q/2m_q)\mathbf{l}$, donde m_q es la masa de la partícula; así, $\mathbf{m}$ e $\mathbf{l}$ están en la misma dirección para una carga positiva.] Si se suma (B-50) sobre todos los electrones de la molécula, se encuentra el momento total como

$$\mathbf{m}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m_e}\sum_j \mathbf{l}_j = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L} \qquad \text{(B-51)}$$

donde $\mathbf{L}$ es momento angular orbital total de la molécula.

No obstante, las cosas son más complicadas que esto. Se ha demostrado con los momentos de la mecánica cuántica que, además de su momento angular orbital, un electrón tiene un *momento angular intrínseco* (o *espín*) $\mathbf{s}$ y un momento magnético asociado $\mathbf{m}_s$; la relación entre ellos es el doble de (B-50):

$$\mathbf{m}_s = -2\left(\frac{e}{2m_e}\right)\mathbf{s} \qquad \text{(B-52)}$$

Si se suma (B-52) sobre todos los electrones de una molécula y se agrega el resultado a (B-51), el momento dipolar magnético total es

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e}(\mathbf{L}+2\mathbf{S}) \qquad \text{(B-53)}$$

donde $\mathbf{S} = \Sigma_j \mathbf{s}_j$. Para que la molécula tenga un momento dipolar permanente, esta cantidad debe ser diferente de cero. Además, se puede demostrar que bajo muchas circunstancias se puede escribir (B-53) en términos de un momento angular total, $\mathbf{j} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, como

$$\mathbf{m} = -g\frac{e}{2m_e}\mathbf{J} \qquad \text{(B-54)}$$

donde g es una cantidad adimensional a la que se conoce como el *factor g de Landé*; g tiene un valor numérico del orden de la unidad y se le debe calcular de manera específica por medio de la mecánica cuántica. Puesto que los valores numéricos de $\mathbf{J}$, según se puede demostrar, son múltiplos de $h/2\pi$, donde h es la constante de Planck, es práctica común medir los momentos dipolares atómicos en unidades del *magnetón de Bohr* $\mu_e = eh/4\pi m_e = 9.27 \times 10^{-24}$ ampere–(metro)^2.

Lo más interesante de (B-54) es que demuestra la posibilidad de un momento dipolar magnético permanente $\mathbf{m}_0$. En presencia de la inducción $\mathbf{B}_m$, el momento tendrá una energía de interacción u "orientacional" dada por (19-40) como $U_D' = -\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{B}_m = -\mu_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{H}_m$, empleando (B-38). Si se compara esto con (B-25), la cual condujo a (B-28), se ve que se podría llegar exactamente al mismo cálculo que antes, y se encontraría la componente promedio de $\mathbf{m}_0$ en la dirección del campo magnetizante como

$$\langle m_0 \cos\theta \rangle = m_0 L\left(\frac{\mu_0 m_0 H_m}{kT}\right) \qquad \text{(B-55)}$$

donde $L(y)$ es de nuevo la función de Langevin (B-29). De manera similar, para condiciones en las cuales $L(y) \simeq \frac{1}{3}y$, la magnetización será

$$M = N\langle m_0 \cos\theta \rangle = \frac{N\mu_0 m_0^2}{3kT} H_m \tag{B-56}$$

con una susceptibilidad resultante

$$\chi_m = \frac{N\mu_0 m_0^2}{3kT} \tag{B-57}$$

la cual es positiva, correspondiendo así a paramagnetismo. Este resultado es la *ley de Curie* para materiales magnéticos.

Como un ejemplo numérico, tómese m_0 como un magnetón de Bohr y considérese un gas en condiciones normales, de manera que $N \simeq 3\times10^{25}$ (metros)$^{-3}$. Se encuentra que $\chi_m \simeq 3\times10^{-7}$, lo cual es lo aproximadamente lo que se observa. Se nota que esto tiene una magnitud que es alrededor de 100 veces mayor que el caso diamagnético comparable. Esto es lo que ocurre por lo general. En tanto que todos los materiales tienen una contribución diamagnética a la susceptibilidad, cuando también tienen un momento permanente, la susceptibilidad paramagnética correspondiente es tan grande que es casi la susceptibilidad total. Se nota también que $\chi_m \ll 1$, como se afirmó; en consecuencia, H_m en (B-56) puede por lo general ser simplemente remplazada por H, como se ve de (B-38).

Una propiedad interesante de los materiales ferromagnéticos es que se puede alinear a los dipolos permanentes en cierta medida, incluso de un campo **B** externo, y entonces se dice que tienen una *magnetización permanente*. Es posible ver como ocurre esto, por medio de una teoría fenomenológica simple introducida por Weiss. Se supone que el campo magnetizante se le puede describir en analogía con (B-38) como

$$H_m = H + \lambda M \tag{B-58}$$

donde se considera sólo el caso en que **M** y **H** son paralelos. El coeficiente λ se encuentra por medio del experimento; se verá en breve el porqué no se toma $\lambda = \frac{1}{3}$ como se podría haber esperado de (B-38). Si se supone además que se puede emplear aún (B-55), entonces se puede escribir

$$M = N m_0 L(y) \tag{B-59}$$

$$y = \frac{\mu_0 m_0}{kT}(H + \lambda M) \tag{B-60}$$

Si se resuelve (B-60) para M resulta

$$M = \left(\frac{kT}{\lambda\mu_0 m_0}\right) y - \frac{H}{\lambda} \tag{B-61}$$

Las ecuaciones B-59 y B-61 son simultáneas y deben ser satisfechas por M. Si ambas se grafican como funciones de y, entonces el valor de M está dado por el punto de intersección de las dos curvas, puesto que M debe pertenecer a ambas. En la figura B-7 se ilustra esto. Conforme T se incrementa, se incrementa la pendiente de la línea recta de (B-61), y se ve por la figura que el punto de intersección corresponderá a un valor pequeño de M.

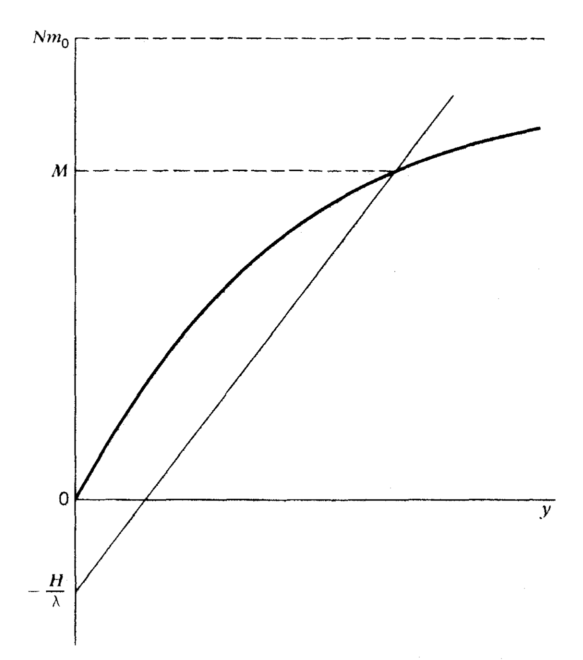


Figura B-7. Cálculo de la magnetización de acuerdo con la teoría de Weiss.

Si $H = 0$, es aún posible que las curvas se encuentren y den $M \neq 0$, como se muestra en la figura B-8; a la magnetización se le denomina entonces, por lo general, *magnetización espontánea* M_s. Conforme se incrementa T, el punto de intersección se mueve hacia abajo sobre la curva $L(y)$ de modo que $M_s(T)$ decrece. Se ve también que $M_s = 0$ cuando la pendiente de la línea recta es mayor o igual que la pendiente inicial de (B-59), la cual es $\frac{1}{3}Nm_0$ según (B-30). Si T_c es la temperatura límite, entonces $(kT_c/\lambda\mu_0 m_0) = \frac{1}{3}Nm_0$, por (B-61), por lo que

$$T_c = \frac{\lambda\mu_0 N m_0^2}{3k} \qquad \text{(B-62)}$$

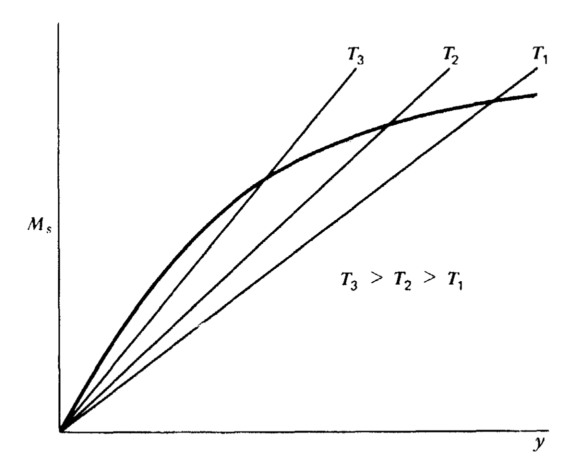


Figura B-8. Cálculo de la magnetización espontánea.

y

$$M_s = 0 \qquad \text{for } T \geqslant T_c \tag{B-63}$$

A T_c se le denomina *temperatura de Curie.* Los valores de M_s encontrados por el método de la figura B-8, se muestran en la figura B-9. El comportamiento total concuerda sorprendentemente bien con lo que se observa, sobre todo si se considera que se está efectuando un cálculo clásico en lugar de un cálculo más exacto basado en la mecánica cuántica.

Si $y << 1$, se puede emplear (B-30) en (B-59), y cuando se sustituye (B-60) en el resultado y se resuelve para M, se encuentra que

$$M = \frac{N\mu_0 m_0^2 H}{3k(T - T_c)} \tag{B-64}$$

empleando (B-62) también. Así, muy por encima de la temperatura de Curie la magnetización es proporcional a H; en otras palabras, el material tiene una susceptibilidad "paramagnética" dada por

$$\chi_m = \frac{N\mu_0 m_0^2}{3k(T - T_c)} \tag{B-65}$$

expresión que se conoce como *ley de Curie-Weiss* y que está también en buen acuerdo con el experimento.

Ahora se está en posibilidad de evaluar el parámetro λ. Para el hierro, $m_0 \simeq 2\mu_e$ y T_c = 1043 K. El valor de N, según se encuentra a partir del peso molecular A, la densidad de masa d del número de Avogadro N_A, es $N = N_A d/A \simeq 8.5 \times 10^{28}$ (metros)$^{-3}$. Insertando todo esto en (B-62) se encuentra que $\lambda \cong 4700$. Este es un número enorme cuya comprensión no cabe en un cálculo clásico, puesto que se vio en las consideraciones que condujeron a (B-38) que se debería esperar un valor de $\lambda \simeq 1$. Heisenberg demostró que estos valores grandes de λ son específicamente de origen mecánico-cuántico y electrostático; cuando los espines electrónicos están alineados paralela o antiparalelamente, la distribución de carga se altera en una forma tal que favorece las orientaciones paralelas, lo cual conducirá a una magnetización espontánea.

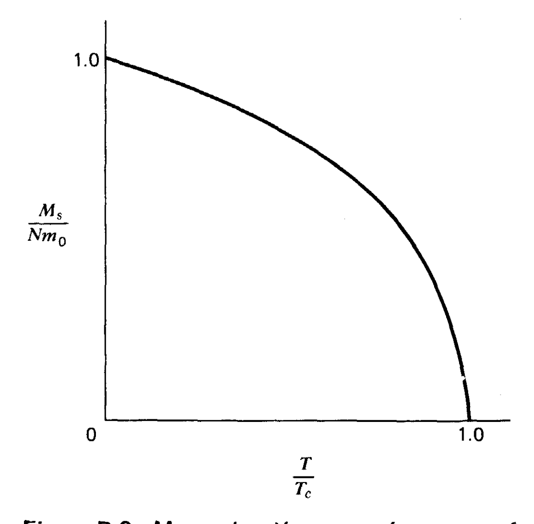


Figura B-9. Magnetización espontánea como función de la temperatura.

Se ha encontrado que los efectos de histéresis, que fueron analizados en la sección 20-7, están asociados con la existencia de *dominios*. En cada dominio se alinean los dipolos permanentes, pero las magnetizaciones resultantes de los dominios individuales no son todos paralelos entre sí. Cuando se aplica una fuerza externa, existe una combinación de rotación de dominios que se alinean con el campo, de un incremento en el tamaño de los dominios que ya eran paralelos al campo, y de una disminución en aquéllos que por lo general están orientados en otras direcciones. El resultado total es una curva de magnetización del tipo mostrado en la figura 20-19.

Se pueden analizar muchos materiales ferroeléctricos, que tienen una polarización eléctrica permanente, en términos de una teoría del tipo de la de Weiss, con un cambio de notación apropiado. Así, en lugar de (B-18) se podría escribir $\mathbf{E}_p = \mathbf{E} + (\lambda_e/\epsilon_0)\mathbf{p}$ y se encuentra que las expresiones análogas de (B-59), (B-61), (B-62) y (B-65) son

$$P = Np_0 L(y) \qquad \text{(B-66)}$$

$$P = \left(\frac{\epsilon_0 kT}{\lambda_e p_0}\right) y - \frac{\epsilon_0 E}{\lambda_e} \qquad \text{(B-67)}$$

$$T_c = \frac{\lambda_e N p_0^2}{3\epsilon_0 k} \qquad \text{(B-68)}$$

$$\chi_e = \frac{N p_0^2}{3\epsilon_0 k(T - T_c)} \qquad \text{(B-69)}$$

En realidad, la teoría de Weiss no funciona tan bien para materiales ferroeléctricos como para los ferromagnéticos; cuando parece ser razonablemente aplicable, los valores de parámetro λ_e por lo general resultan ser mucho *menores* que la unidad. Los materiales ferroeléctricos también presentan propiedades de histéresis y cierta avidencia sobre la existencia de dominios.

B-3 Respuesta a campos que varían en el tiempo

En la sección 24-8 se señaló que cuando se hacen comparaciones detalladas entre las predicciones de las ecuaciones de Maxwell y los resultados experimentales, se encuentra que es necesario tratar a los parámetros electromagnéticos μ, ϵ y σ como funciones de la frecuencia circular ω en lugar de como constantes simplemente. Se analizó también la conductividad desde un punto de vista microscópico y se encontró en (24-130) que σ era una función compleja de la frecuencia. La expresión de la conductividad implicó tanto la inercia de los portadores de carga como una fuerza resistiva mecánica proporcional a la velocidad. A esta dependencia general de los parámetros con respecto a la frecuencia se le denomina *dispersión*, y se desea ahora considerar sus orígenes con más detalle. El estudio se restringirá al caso de la respuesta de un medio a una onda plana que se está propagando dentro de él. Como ésta no es la posibilidad más general, será suficiente ilustrar los aspectos básicos implicados.

Como se recordará por (24-38) y (24-29), el caso más general de una onda plana propagándose en la dirección z implica una constante de propagación compleja

$$k = \alpha + i\beta \qquad \text{(B-70)}$$

por lo tanto,

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}=\mathbf{E}_0 e^{-\beta z} e^{i(\alpha z-\omega t)} \tag{B-71}$$

Así, la parte real de k determina la velocidad de fase, mientras que la parte imaginaria describe una atenuación de la onda. La relación básica entre k y las propiedades del medio se dio en (24-135) como

$$k^2=\omega^2\mu\left(\epsilon+i\frac{\sigma}{\omega}\right)=\frac{\omega^2\kappa_m}{c^2}\left(\kappa_e+\frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}\right) \tag{B-72}$$

donde se emplearon (10-53), (20-55) y (23-5). Se vio también en (24-56) y (24-57) que es posible describir esta situación en términos de un índice de refracción complejo, el cual se describe aquí como

$$\mathfrak{N}=\left(\frac{c}{\omega}\right)k=n+i\eta \tag{B-73}$$

donde n es el índice de refracción ordinario [escrito en (24-57) como n'] y donde η describirá la atenuación, por (B-70) y (B-71). Comparando (B-73) y (B-72) se ve que

$$n+i\eta=\left[\kappa_m\left(\kappa_e+\frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)\right]^{1/2} \tag{B-74}$$

Por sencillez, se supone que el material es no magnético y se hace $\kappa_m=1$. Si, además, es no conductor, $\sigma=0$ y (B-74) se reduce a

$$n+i\eta=\sqrt{\kappa_e} \tag{B-75}$$

Se continúa escribiendo $\mathfrak{N}$ como complejo aun cuando la única fuente de atenuación que se ha considerado hasta aquí ha sido la conductividad; como se verá en breve, un medio no conductor puede también producir atenuación a causa de la existencia de la amortiguación del movimiento de las cargas. Más adelante, en esta sección, se regresará al caso más general de $\sigma\neq 0$.

La forma de (B-75) indica lo que será este enfoque. Como en la sección B-1, se espera que los campos incidentes induzcan momentos dipolares eléctricos dado que las cargas serán desplazadas de sus posiciones de equilibrio. Siendo así, se puede encontrar la polarización y después la susceptibilidad χ_e a partir de (B-1); por último κ_e estará dada por $1+\chi_e$ y esto se puede sustituir en (B-75) para encontrar la respuesta total del medio.

A causa de la masa muy grande del núcleo en comparación con la del electrón, debe ser una buena aproximación suponer que los núcleos permanecen en reposo; en consecuencia, se necesita considerar sólo el comportamiento de los electrones. Por ello, a menudo este tratamiento de llama la *teoría electronica de la materia*. Si se considera que $\mathbf{r}$ es el *desplazamiento* del electrón con respecto a su posición de equilibrio, se puede suponer una fuerza mecánica de restitución, $\mathbf{F}_m$, como se hizo en (B-7); se le escribe como $\mathbf{F}_m=-K\mathbf{r}=-m_e\omega_0^2\mathbf{r}$, donde ω_0 es la frecuencia natural de oscilación de la carga. Como se hizo en (12-36) y (24-125), se supone también una fuerza friccional de amortiguación, de alguna forma proporcional a la velocidad, esto es, $\mathbf{F}_d=-\xi\mathbf{v}=-m_e\gamma\mathbf{v}$, donde γ se emplea ahora como una medida de la amortiguación. Finalmente, los campos que produce la onda originan una fuerza de Lorentz que está dada por (21-29) como $\mathbf{F}_l=-e(\mathbf{E}_p\ +$

vX**B**$_m$), donde **E**$_p$ y **B**$_m$ son los campos inductores resultantes de (B-18) y (B-38). Haciendo la masa por la aceleración igual a la fuerza neta, se obtiene la ecuación de movimiento

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = m_e\mathbf{a} = -m_e\omega_0^2\mathbf{r} - m_e\gamma\mathbf{v} - e(\mathbf{E}_p + \mathbf{v}\times\mathbf{B}_m) \tag{B-76}$$

Se considerarán sólo medios para los cuales n sea del orden de la unidad; en tales casos, se sabe por (24-34) que $|\mathbf{B}_m| \approx |\mathbf{E}_p|/c$, puesto que los campos no diferirán de los de la onda incidente. La razón de la fuerza magnética a la fuerza eléctrica será entonces, aproximadamente,

$$\frac{F_{\text{mag}}}{F_{\text{elec}}} \approx \frac{evB_m}{eE_p} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

y se puede simplificar aún más (B-76) despreciando el término **v**X**B**$_m$. El desplazamiento en régimen estacionario del electrón será entonces paralelo a **E**$_p$. El problema se vuelve entonces unidimensional y, si se hace que x sea el desplazamiento, se puede escribir (B-76) como

$$m_e\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x\right) = -eE_p = -eE_{p0}e^{i(kz-\omega t)} \tag{B-77}$$

para una onda propagándose en la dirección z. Ahora, la variación de kz sobre la molécula será del orden de $2\pi a/\lambda$, donde a es el radio de la molécula. Se supone ahora que $a << \lambda$; puesto que $a \approx 10^{-10}$ metros, esto se satisface aún en la región ultravioleta, donde se empieza a necesitar una descripción basada en la mecánica cuántica, de cualquier manera. En otras palabras el campo eléctrico será aproximadamente constante sobre el volumen de la molécula localizada en z_0. Si en la amplitud E_{p0} se incluye el factor constante e^{ikz_0}, todo lo que ahora es la variación temporal sinusoidal y (B-77) resulta ser

$$m_e\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x\right) = -eE_{p0}e^{-i\omega t} = -eE_p \tag{B-78}$$

a la cual se puede reconocer como la variación de movimiento de un oscilador armónico forzado y amortiguado.

La única solución de (B-78) de interés aquí es el desplazamiento en régimen estacionario, el cual se puede encontrar suponiendo una solución de la forma $x = x_0e^{-i\omega t}$, donde x_0 es una constante. Cuando se sustituye esto en (B-78) se obtiene

$$x = x_0e^{-i\omega t} = \frac{-(e/m_e)E_{p0}e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tag{B-79}$$

El correspondiente momento dipolar inducido en la dirección del campo se puede encontrar de la forma unidimensional de (B-3), recordando que aquí x es el desplazamiento, y resulta

$$p = -ex = p_0e^{-i\omega t} = \frac{(e^2/m_e)E_{p0}e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tag{B-80}$$

puesto que se está suponiendo que el núcleo permanece estacionario. Si hay n_0 electrones de este tipo en la molécula, su contribución total al momento dipolar será

$$n_0 p = \frac{n_0(e^2/m_e)E_p}{\omega_0{}^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tag{B-81}$$

puesto que $E_p = E_{p0}e^{-i\omega t}$. Este resultado puede generalizarse fácilmente a la situación en la cual hay más de un tipo de electrón, puesto que no se espera que estén todos ellos en situaciones idénticas. Así, si se hace que n_k sea el número de electrones en la molécula, los cuales están caracterizados por la frecuencia natural ω_k y la constante de amortiguación γ_k, se puede sumar (B-81) sobre todos los tipos para obtener el momento dipolar inducido total:

$$\langle p \rangle = E_p \sum_k \frac{n_k(e^2/m_e)}{\omega_k{}^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega} = \alpha E_p \tag{B-82}$$

donde α es la polarizabilidad, de acuerdo con la definición (B-9). Se ve que ahora α es tantc compleja como dependiente de la frecuencia. Antes de continuar, al comparar esto con el caso estático ($\omega = 0$) se encuentra de (B-82) que

$$\alpha(0) = \sum_k \frac{n_k e^2}{m_e \omega_k{}^2} = \sum_k \frac{n_k e^2}{K_k} = \sum_j \frac{e^2}{K_j}$$

donde, en el último paso, se fue de una suma sobre *k tipos* a una suma sobre *j de electrones individuales.* (El número total de electrones es $Z_t = \Sigma_k n_k$). Comparando este resultado con (B-9) se ve que son iguales si se recuerda que se está suponiendo que las constantes de fuerza nuclear son tan grandes que $1/K_i \simeq 0$.

La deducción de (B-21) a partir de (B-20) se aplica aún. por supuesto, y si se combinan (B-21), (B-82) y (B-75), se obtiene el resultado básico

$$\frac{(n+i\eta)^2 - 1}{(n+i\eta)^2 + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{N}{3\epsilon_0} \sum_k \frac{n_k(e^2/m_e)}{\omega_k{}^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega} \tag{B-83}$$

donde N es el número de moléculas por unidad de volumen. (Recuérdese que la suma es sobre una molécula única y por lo tanto es independiente de N.) Se podrían ahora encontrar n y η igualando separadamente las partes real e imaginaria de cada miembro de (B-83). Como comprobación cualitativa del resultado, se ve que si todas las $\gamma_k = 0$, el segundo miembro es real y $\eta = 0$; así, como se esperaba, son los términos de la amortiguación en las ecuaciones de movimiento los que producen la atenuación y la absorción de energía de la onda. Similarmente, $\eta = 0$ cuando $\omega = 0$; en consecuencia, no hay atenuación en el caso estático.

Como un caso especial, considérese un material perfectamente transparente para el cual $\eta = 0$. Entonces, para una *frecuencia fija* ω, (B-83) resulta ser

$$\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right)\frac{1}{N} = \frac{\alpha(\omega)}{3\epsilon_0} = \text{const.} \tag{B-84}$$

A este resultado se le conoce como la *ley de Lorenz-Lorentz* y describe cómo varía el índice de refracción con la densidad del material. Es un resultado sumamente preciso para muchos materiales, e incluso es aproximadamente correcto para el caso de un líquido que cambia a su fase de vapor. Se nota que en el caso estático ($\omega = 0$), donde se puede sustituir a n^2 por κ_e, (B-84) se reduce a la relación de Clausius-Mossotti (B-21). En vez de continuar con el resultado general (B-83), se vuelve a una situación algo más sencilla.

Para muchos casos, particularmente en gases, α resulta ser tan pequeña que $n \simeq 1$ y $\eta \simeq 0$. Consecuentemente, $|n + i\eta| \simeq 1$ y se puede aproximar el denominador en el primer miembro de (B-83) por 3. Entonces $(n + i\eta)^2 \simeq 1 + (N\alpha/\epsilon_0)$ y $n + i\eta \simeq [1 + N\alpha]$ $N\alpha/\epsilon_0)]^{1/2} \cong 1 + (N\alpha/2\epsilon_0)$, por lo que

$$n + i\eta = 1 + \frac{N}{2\epsilon_0} \sum_k \frac{n_k(e^2/m_e)}{\omega_k{}^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega} \tag{B-85}$$

Se pueden encontrar ahora n y η separadamente multiplicando numerador y denominador en la suma por $(\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega)$ e igualando las partes real e imaginaria en cada miembro; los resultados son

$$n = 1 + \frac{N}{2\epsilon_0} \sum_k \frac{n_k(e^2/m_e)(\omega_k{}^2 - \omega^2)}{(\omega_k{}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_k\omega)^2} \tag{B-86}$$

$$\eta = \frac{N}{2\epsilon_0} \sum_k \frac{n_k(e^2/m_e)\gamma_k\omega}{(\omega_k{}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_k\omega)^2} \tag{B-87}$$

Se puede ver la naturaleza general de la dependencia con la frecuencia más fácilmente, si se supone sólo un tipo de electrón con un conjunto de constantes n_0, ω_0^2 y γ; estos resultados entonces se reducen a

$$n - 1 = \frac{Nn_0(e^2/2m_e\epsilon_0)(\omega_0{}^2 - \omega^2)}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \tag{B-88}$$

$$\eta = \frac{Nn_0(e^2/2m_e\epsilon_0)\gamma\omega}{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \tag{B-89}$$

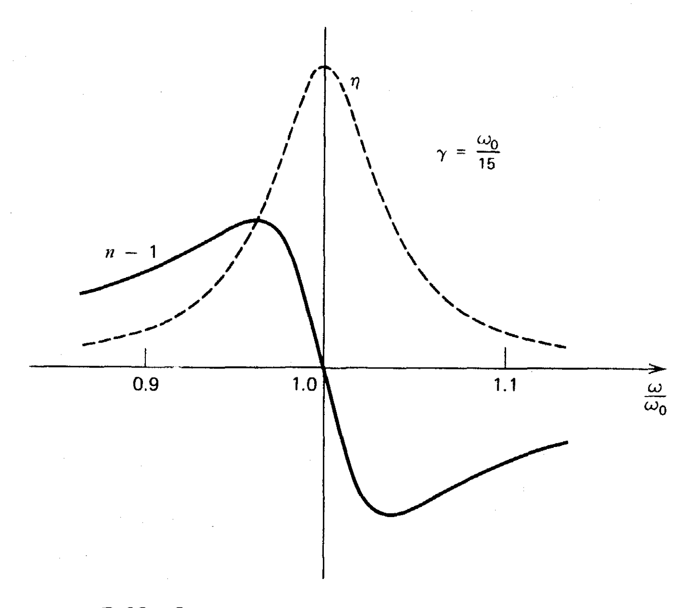


Figura B-10. Comportamiento de la partes real e imaginaria del índice de refracción, cerca de una frecuencia de resonancia.

los cuales se muestran como funciones de ω en la figura B-10. La región de frecuencia alrededor de ω_0, donde n y η están cambiando ambos rápidamente, recibe la denominación de *región de dispersión anómala.* En los casos generales (B-36) y (B-87), las curvas de n y η consistirán en una superposición de curvas como las mostradas con dispersión anómala cerca de cada una de las ω_k; éste es el tipo general de curva de dispersión que se ha encontrado para los gases. Ajustando curvas como éstas a los resultados esperimentales, se pueden evaluar las cantidades n_k, ω_k y γ_k.

Si se considera de nuevo (B-83) y se supone que $\eta \simeq 0$ por sencillez, se ve que en la situación más general se observará dispersión anómala en torno a las frecuencias ω_k, excepto por la cantidad $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ en vez de $(n - 1)$.

Ahora supóngase que el medio en cuestión contiene también electrones libres, por lo que también tendrá propiedades conductoras. Se ve por (B-74) que esto se puede manejar agregando simplemente $(i\sigma/\omega\epsilon_0)$ a κ_e. Así, si $(n + i\eta)_{nc}$ se refiere a los valores encontrados en el caso no conductor, se encuentra de (B-74), (B-75) y (B-83) que cuando $\kappa_m \simeq 1$

$$(n+i\eta)^2=(n+i\eta)_{nc}{}^2+\frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0}=\frac{1+(2N\alpha/3\epsilon_0)}{1-(N\alpha/3\epsilon_0)}+\frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0} \tag{B-90}$$

Un electrón que puede moverse libremente corresponde a uno no sujeto a una fuerza de restauración, por lo que $\omega_0^2 = 0$ para él. Así, su ecuación de movimiento según (B-78) será de la forma

$$m_e\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma_0\frac{dx}{dt}\right)=-eE_{p0}e^{-i\omega t}$$

Esta es justamente la ecuación (24-127) que se empleó previamente para encontrar la conductividad cuando $\xi = m_e\gamma_0$. En consecuencia, se puede emplear el valor de σ dado por (24-130):

$$\sigma=\sigma(\omega)=\frac{\sigma_0}{1-i\left(\sigma_0 m_e\omega/N_0e^2\right)} \tag{B-91}$$

donde N_0 se emplea ahora para el número de electrones libres por unidad de volumen y el valor estático de la conductividad σ_0 es

$$\sigma_0=\frac{N_0e^2}{\xi}=\frac{N_0e^2}{\gamma_0 m_e} \tag{B-92}$$

Sustituyendo (B-91) en (B-90) se obtiene

$$(n+i\eta)^2=\frac{1+(2N\alpha/3\epsilon_0)}{1-(N\alpha/3\epsilon_0)}+\frac{i(\sigma_0/\omega\epsilon_0)}{1-i\left(\sigma_0 m_e\omega/N_0e^2\right)} \tag{B-93}$$

como la expresión completa de la cual se encuentran n y η separadamente. [Recuérdese que α dada por la suma en (B-83) es compleja.]

Como consideraciones adicionales, será suficiente hacer restricción al caso en el que $|u| = |N\alpha/\epsilon_0| << 1$, por lo que el primer término del segundo miembro de (B-93) se puede aproximar por $[1 + (2u/3)]/[1 - (u/3)] \simeq [1 + (2u/3)][1 + (u/3)] \simeq 1 + u = 1 + (N\alpha/\epsilon_0)$. Entonces si se multiplican numerador y denominador de cada término en la suma de (B-83) por el complejo conjugado de su denominador, se hace una cosa similar al último

término del segundo miembro de (B-93), se factoriza el primer miembro de esta expresión, y después se igualan las partes real e imaginaria de cada miembro, se encuentra que

$$n^2-\eta^2=1+\frac{N}{\epsilon_0}\sum_k \frac{n_k(e^2/m_e)(\omega_k{}^2-\omega^2)}{(\omega_k{}^2-\omega^2)^2+(\gamma_k\omega)^2}-\frac{(\sigma_0^2 m_e/N_0\epsilon_0 e^2)}{1+(\sigma_0 m_e\omega/N_0e^2)^2} \tag{B-94}$$

$$2n\eta=\frac{N}{\epsilon_0}\sum_k \frac{n_k(e^2/m_e)\gamma_k\omega}{(\omega_k{}^2-\omega^2)^2+(\gamma_k\omega)^2}+\frac{(\sigma_0/\omega\epsilon_0)}{1+(\sigma_0 m_e\omega/N_0e^2)^2} \tag{B-95}$$

que pueden ahora resolverse para n y η en forma individual, si se desea. No se hará esto, pero debemos darnos por muy satisfechos con algunas observaciones generales acerca de estos resultados.

Considérese primero el caso de baja frecuencia, el cual se toma como correspondiente a $\sigma_0/\omega\epsilon_0 >> 1$, esto es, el "buen conductor" ($Q << 1$), el cual se analizó en detalle inmediatamente a continuación de (24-70). Aquí la frecuencia es mucho menor que cualquier frecuencia resonante natural de los electrones ligados y su contribución a (B-94) y (B-95) es despreciable. La contribución de la conductividad a (B-94) es también pequeña para ω pequeña, dado que el numerador es constante y pequeño; por otra parte, el término de conductividad en (B-95) es muy grande. Así, estas expresiones adoptan la forma $n^2 - \eta^2 = 1 + \delta$ donde δ es una cantidad muy pequeña, mientras que $2n\eta \simeq (\sigma_0/\omega\epsilon_0) >> 1$. Este puede ser el caso sólo si n y η son ambas grandes y aproximadamente iguales; así, $n \simeq \eta \simeq (\sigma_0/2\omega\epsilon_0)^{1/2}$. Entonces se ve de (B-73) y (B-70) que las partes real e imaginaria de la constante de propagación son aproximadamente iguales y están dadas por $\alpha \simeq \beta \simeq (\omega/c)n = (\frac{1}{2}\mu_0\sigma_0\omega)^{1/2}$, que es aproximadamente lo que se encontró antes en (24-75) para el caso correspondiente.

Conforme aumenta la frecuencia hacia la región infrarroja y porciones visibles del espectro, llega eventualmente a ser igual al menos a alguna de las frecuencias naturales de los electrones ligados. Entonces sus contribuciones resonantes resultan de importancia y comparables o mayores que la de los electrones libres, y se debe entonces tratar con las muy complicadas expresiones generales (B-94) y (B-95).

Ejercicios

B-1 La susceptibilidad del helio a una atmósfera y 140°C es $\chi_e = 6.84\times10^{-5}$. Encuéntrese la polarizabilidad α y empléese el resultado para estimar el radio de un átomo de dicho gas.

B-2 Para aire a 0°C y una atmósfera, $\kappa_e = 1.000590$. Empléese la relación de Clausius-Mossotti para encontrar κ_e a 100 atmósferas y a la misma temperatura. Encuéntrese la diferencia en porcentaje entre el resultado que se obtenga y el valor medido de 1.0548.

B-3 Intégrese la ecuación de movimiento $d\mathbf{l}/dt$ = torca, donde la torca se debe al campo eléctrico inducido dado en (B-43), y demuéstrese así que el momento diamagnético inducido está dado de nuevo por (B-46).

B-4 Se ha encontrado que $\chi_m = 2.2\times10^{-5}$ para el aluminio a 20°C. Supóngase que éste es originalmente paramagnético y encuéntrese el correspondiente momento dipolar permanente m_0. ¿Cuántos magnetones de Bohr es esto? [El aluminio tiene una densidad de 2.7 gramos/(centímetro)^3 y un peso atómico de 27 gramos/mol.]

B-5 Verifíquense de (B-66) y (B-69).

B-6 Demuestre que la teoría de Weiss del ferromagnetismo viola la tercera ley de la termodinámica, demostrando que $(dM_s/dT)_{T=0} \neq 0$.

B-7 La suceptibilidad del titanato de bario ($BaTiO_3$) tiene la forma $X_e = (1.7 \times 10^5)/(T-393)$ para T suficientemente grande. Empléese esto para estimar λ_e en este material.

B-8 Empezando con (B-54), demuéstrese que la ecuación de movimiento del dipolo magnético se puede escribir en la forma $(d\mathbf{m}/dt) = -(ge/2m_e)\mathbf{m}\times\mathbf{B}$. Ahora supóngase que $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$, donde B_0 es una constante. Resuélvase la ecuación de movimiento y demuéstrese que la solución describe una precesión de **m** en torno a z, esto es, **m** barre un cono de ángulo constante, cuyo eje coincide con el eje z. ¿Cuál es la frecuencia angular del movimiento? ¿Cuál es el sentido de rotación de la proyección de **m** sobre el plano xy cuando se le ve desde un punto sobre el eje z positivo?

B-9 El índice de refracción del agua a 15°C para una frecuencia óptica particular es 1.3337; su densidad es 0.9991 gramos/(centímetro)^3. Empléese también la ley de Lorenz-Lorentz para encontrar n para el vapor de agua a 0°C y una atmósfera, tratando al vapor de agua como un gas ideal. Encuéntrese en porcentaje la desviación del resultado obtenido en relación con el vapor medido de 1.000250.

B-10 Supóngase que $\gamma \ll \omega_0$ y empléese (B-88) y (B-89) para demostrar que en una región de dispersión anómala los valores máximo y mínimo de n ocurre a frecuencias donde η es la mitad de su valor máximo. Encuéntrese la relación entre γ y el ancho de línea $\Delta\omega$ de η, esto es, la diferencia de frecuencias entre ω_0 y la frecuencia donde η tiene la mitad de su valor máximo.

B-11 Puesto que el dipolo inducido en (B-80) está oscilando en el tiempo, radiará energía. Encuéntrese la rapidez total a la cual p está radiando, suponiendo un gas tal que puede considerarse E_{p0} como aproximadamente igual al campo eléctrico incidente. Demuéstrese que cuando $\omega \ll \omega_0$, la potencia radiada es proporcional a $1/\lambda^4$, donde λ es la longitud de onda incidente. Esto se llama *dispersión de Rayleigh* y se emplea para explicar el color azul del cielo.

Respuestas a los ejercicios impares

1-3 $5\hat{\mathbf{x}}-3\hat{\mathbf{y}}-\hat{\mathbf{z}}$; 32.3°, 120°, 99.7°

1-5 -14.4

1-9 $\left(\frac{x}{a^2}\hat{\mathbf{x}}+\frac{y}{b^2}\hat{\mathbf{y}}+\frac{z}{c^2}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-(1/2)}$

1-13 $\frac{1}{2}abc(a+b+c)$

1-15 $(2k)^{1/2}[(8/21)-(4k/5)]$

1-19 No; a/ρ; $(b/\rho)\hat{\mathbf{z}}$; $(x^2+y^2)^{-(1/2)}[(ax-by)\hat{\mathbf{x}}+(ay+bx)\hat{\mathbf{y}}]+c\hat{\mathbf{z}}$; $(a\,\mathrm{sen}\,\theta+c\cos\theta)\hat{\mathbf{r}}+(a\cos\theta-c\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}}+b\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

1-21 3

1-23 $-\pi r_0$

1-25 No

2-1 $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{[(x-a)\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}]}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}-\frac{[(x+a)\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}]}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}$

2-3 $-1.90(q^2/4\pi\epsilon_0a^2)(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}})$

2-7 $\hat{\mathbf{z}}(\lambda\rho a^3L)/[3\epsilon_0z_0(z_0+L)]$

2-9 $\hat{\mathbf{x}}\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0}\left[\left(1+\frac{L^2}{a^2}\right)^{1/2}-1\right]$

2-11 coulomb/(metro)^4; $\frac{1}{2}\pi a^4A$; $\hat{\mathbf{z}}\frac{qAz}{2\epsilon_0}\left[\frac{(a^2+2z^2)}{(a^2+z^2)^{1/2}}-2z\right]$

3-1 $(q/4\pi\epsilon_0)\{[x\hat{\mathbf{x}}+(y-a)\hat{\mathbf{y}}][x^2+(y-a)^2]^{(-3/2)}-[x\hat{\mathbf{x}}+(y+a)\hat{\mathbf{y}}][x^2+(y+a)^2]^{-(3/2)}$; $E_x=0$ cuando $x=0$ or $y=0$

3-3 $1.90(q/4\pi\epsilon_0a^2)(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}-\hat{\mathbf{z}})$

3-7 $(\lambda/2\pi\epsilon_0)[-a\hat{\mathbf{x}}+(c-b)\hat{\mathbf{y}}][a^2+(c-b)^2]^{-1}$

3-9 $-(\sigma/\epsilon_0)\hat{\mathbf{z}}$ para $-a<z<a$; 0 para $|z|>a$

3-11 $(\lambda/4\pi\epsilon_0\rho)[(\mathrm{sen}\,\alpha_2+\mathrm{sen}\,\alpha_1)\hat{\boldsymbol{\rho}}+(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\hat{\mathbf{z}}]$; $(\lambda L\hat{\boldsymbol{\rho}})/\left[2\pi\epsilon_0\rho(L^2+\rho^2)^{1/2}\right]$

3-13 $\rho_{ch}a^2\hat{\mathbf{x}}/2\epsilon_0x$ para $x>a$; $\rho_{ch}x\hat{\mathbf{x}}/2\epsilon_0$ para $x<a$

4-1 $\rho abc/\epsilon_0$ en ambos casos

4-3 $\lambda\hat{\boldsymbol{\rho}}/2\pi\epsilon_0\rho$, $(\rho<\rho_0)$; $(\lambda+2\pi\rho_0\sigma)\hat{\boldsymbol{\rho}}/2\pi\epsilon_0\rho$, $(\rho_0<\rho)$; $-\lambda/2\pi\rho_0$; yes, since $2\pi\rho_0\sigma$ es la carga por unidad de longitud en el cilindro

4-5 $2Ar^{3/2}\hat{\mathbf{r}}/7\epsilon_0$, $(r<a)$; $2Aa^{7/2}\hat{\mathbf{r}}/7\epsilon_0r^2$, $(a<r)$

4-7 $\rho_{ch}\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}/2\epsilon_0$, $(\rho<a)$; $\rho_{ch}a^2\hat{\boldsymbol{\rho}}/2\epsilon_0\rho$, $(a<\rho)$; sí, puesto que $\lambda=\pi a^2\rho_{ch}$

4-9 0, $(\rho<a)$; $Af(\rho)\hat{\boldsymbol{\rho}}/\epsilon_0\alpha^2\rho$, $(a<\rho<b)$ donde $f(\rho)=(e^{-\alpha a}-e^{-\alpha\rho})+\alpha(ae^{-\alpha a}-\rho e^{-\alpha\rho})$; $Af(b)\hat{\boldsymbol{\rho}}/\epsilon_0\alpha^2\rho$, $(b<\rho)$; $\alpha=0$ y $n=0$, sí

4-11 $4\epsilon_0E_0\rho^2/a^3$, $(0<\rho<a)$; 0, $(a<\rho)$

5-1 Sí, puesto que $\nabla\times\mathbf{E}=0$; $\phi=-xyz+x^2+\text{const.}$

5-3 $(q/4\pi\epsilon_0)\left\{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{-(1/2)}-[x^2+y^2+(z+a)^2]^{-(1/2)}\right\}$; $\phi(z=0)=0$; cada punto es equidistante de las cargas iguales y opuestas

5-5 $1.23(q/\epsilon_0 a)$

5-9 $\phi_o = Q/4\pi\epsilon_0 r$; $\phi_i = [Q/4(n+2)\pi\epsilon_0 a]\left[(n+3)-(r/a)^{n+2}\right]$

5-11 $\rho(b^3-a^3)/3\epsilon_0 r$, $(r>b)$; $(\rho/3\epsilon_0)\left[(3b^2/2)-\frac{1}{2}r^2-(a^3/r)\right]$, $(a<r<b)$; $\rho(b^2-a^2)/2\epsilon_0$, $(0<r<a)$

5-13 $(\lambda a\alpha/2\pi\epsilon_0)(a^2+z^2)^{-(1/2)}$: en virtud de ϕ encontrada sólo para el valor *único* de $x=0$

5-15 $-(\sigma/2\epsilon_0)|z|+C = -(\sigma/2\epsilon_0)\sqrt{z^2}+C$; planos paralelos a la lámina cargada

5-17 $-(\sigma/2\epsilon_0)(|z|-a)$; $\simeq 5a$

5-21 $(\lambda/\pi\epsilon_0)\ln[(b-a)/(b+a)]$

5-23 $-q^2/8\pi\epsilon_0 a$

6-1 Q en la superficie de radio c, $-Q$ para b, y Q para $a\cdot$ $Q/4\pi\epsilon_0 r$, $(c\leqslant r)$; $Q/4\pi\epsilon_0 c$, $(b\leqslant r\leqslant c)$; $(Q/4\pi\epsilon_0 rbc)[bc-r(c-b)]$, $(a\leqslant r\leqslant b)$; $(Q/4\pi\epsilon_0 abc)[bc-a(c-b)]$, $(0\leqslant r\leqslant a)$

6-3 7.08×10^{-4} farad

6-5 $c_{11}=-c_{12}=-c_{21}=4\pi\epsilon_0 ab/(b-a)$; $c_{22}=4\pi\epsilon_0(ab+bc-ca)/(b-a)$; $C=c_{11}$

6-9 $4\Delta\phi/b$

6-15 $2\pi\epsilon_0 L\left[\ln(c^2/ab)-(a+b)/c\right]^{-1}$

7-1 $-0.355(q^2/\epsilon_0 a)$

7-5 $\pi\sigma^2 a^3/4\epsilon_0$

7-7 2.25×10^{32} joule; 6.14×10^{-61} metro

7-9 $5/6$

7-11 $(q_l^2 L/4\pi\epsilon_0)\ln(b/a)$

7-15 1.81×10^{-4} kilogramo

7-17 $\frac{1}{2}\epsilon_0\{\Delta\phi/[a\ln(b/a)]\}^2$; $\hat{\rho}$; 0

8-3 $(p/4\pi\epsilon_0)(z^2-\frac{1}{4}l^2)^{-1}$; $z>5l$; $z>7.06l$

8-5 $Q=9q$; $\mathbf{p}=qa(4\hat{\mathbf{x}}+5\hat{\mathbf{y}}+14\hat{\mathbf{z}})$; $Q_{xx}=-11qa^2$, $Q_{yy}=-8qa^2$, $Q_{zz}=19qa^2$, $Q_{xy}=6qa^2$, $Q_{yz}=15qa^2$, $Q_{zx}=21qa^2$; at $(a/9)(4\hat{\mathbf{x}}+5\hat{\mathbf{y}}+14\hat{\mathbf{z}})$

8-7 $Q=\lambda L$; $\mathbf{p}=\frac{1}{2}\lambda L^2(\cos\alpha\hat{\mathbf{x}}+\operatorname{sen}\alpha\hat{\mathbf{y}})$; $Q_{xx}=(\frac{1}{3})\lambda L^3(3\cos^2\alpha-1)$, $Q_{yy}=(\frac{1}{3})\lambda L^3(3\operatorname{sen}^2\alpha-1)$, $Q_{zz}=-(\frac{1}{3})\lambda L^3$, $Q_{xy}=\lambda L^3\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$, $Q_{yz}=Q_{zx}=0$; $\phi_Q=(\lambda L^3/24\pi\epsilon_0 r^5)[3(x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha)^2-r^2]$

8-9 $Q=\rho abc$; $\mathbf{p}=\frac{1}{2}Q(a\hat{\mathbf{x}}+b\hat{\mathbf{y}}+c\hat{\mathbf{z}})=Q$(vector de posición del centro); $Q_{xx}=(\frac{1}{3})Q(2a^2-b^2-c^2)$, $Q_{yy}=(\frac{1}{3})Q(2b^2-c^2-a^2)$, $Q_{zz}=(\frac{1}{3})Q(2c^2-a^2-b^2)$, $Q_{xy}=(\frac{3}{4})Qab$, $Q_{yz}=(\frac{3}{4})Qbc$, $Q_{zx}=(\frac{3}{4})Qca$; $(3Qa^2\operatorname{sen}\theta/16\pi\epsilon_0 r^3)[\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\cos\theta(\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi)]$

8-11 $Q_{xx}-2(2a_x p_x-a_y p_y-a_z p_z)+(2a_x{}^2-a_y{}^2-a_z{}^2)Q$

8-13 No sustitúyase $\mathbf{r}$ por $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ en (8-84)

8-15 Con $\alpha=3qa^2/8\pi\epsilon_0$, $\phi_Q=\alpha(\rho^2\operatorname{sen}2\varphi)(\rho^2+z^2)^{-5/2}$; $E_\rho=\alpha\rho(3\rho^2-2z^2)(\operatorname{sen}2\varphi)(\rho^2+z^2)^{-7/2}$, $E_\varphi=-2\alpha\rho(\cos 2\varphi)(\rho^2+z^2)^{-5/2}$, $E_z=5\alpha z\rho^2(\operatorname{sen}2\varphi)(\rho^2+z^2)^{-7/2}$; $\rho^3=(\alpha/\phi_Q)\operatorname{sen}2\varphi$; $\rho^4=K(\cos 2\varphi)^3$

8-17 $-(q\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})/4\pi\epsilon_0 r^2$; $(q\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{r}})/4\pi\epsilon_0 r^2$; $(q/4\pi\epsilon_0 r^3)[\mathbf{p}-3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}]$

8-19 No; $\mathbf{F}_2=(3/4\pi\epsilon_0 R^4)\{[(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{p}_2)-5(\mathbf{p}_1\cdot\hat{\mathbf{R}})(\mathbf{p}_2\cdot\hat{\mathbf{R}})]\hat{\mathbf{R}}+(\mathbf{p}_2\cdot\hat{\mathbf{R}})\mathbf{p}_1+(\mathbf{p}_1\cdot\hat{\mathbf{R}})\mathbf{p}_2\}$; $3p_1p_2\hat{\mathbf{R}}/4\pi\epsilon_0 R^4$; $-3p_1p_2\hat{\mathbf{R}}/2\pi\epsilon_0 R^4$

8-21 $(3Q_1{}^a Q_2{}^a/64\pi\epsilon_0 r^9)(3r^4-30z^2r^2+35z^4)$

9-1 $\mathbf{E}_{1n}=2\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}+\hat{\mathbf{z}}$; $\mathbf{E}_{1t}=2\hat{\mathbf{x}}-4\hat{\mathbf{z}}$

9-3 Con $A=\sigma_0 z/\epsilon_0 a^2$, $\mathbf{E}_2=(\alpha+Ax)\hat{\mathbf{x}}+(\beta+Ay)\hat{\mathbf{y}}+(\gamma+Az)\hat{\mathbf{z}}$

9-5 La diferencia de potencial es independiente de la trayectoria; se sigue de (9-22)

10-1 1.2×10^{-4} coulomb/(metro)^2

10-3 $-\alpha P$, $P(1+\alpha t)$, $-P$, 0

10-5 $\phi_o = -Pa^3/3\epsilon_0 z^2$, $E_{zo} = -2Pa^3/3\epsilon_0 z^3$, $\phi_i = Pz/3\epsilon_0$, $E_{zi} = -P/3\epsilon_0$

10-7 $\rho_b = -\alpha(n+2)r^{n-1}$, $\sigma_b = \alpha a^n$; $\mathbf{E}_o = 0$, $\mathbf{E}_i = -\mathbf{P}/\epsilon_0$; $\phi_o = 0$, $\phi_i = [\alpha/\epsilon_0(n+1)](r^{n+1} - a^{n+1})$

10-9 $-\mathbf{P}/3\epsilon_0$

10-11 (a) $\rho_b = 0$, $\sigma_{b\,\text{base superior}} = -\sigma_{b\,\text{base inferior}} = P$; (b) $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$; $E = -(P/2\epsilon_0)\{2 + (z-L)[(z-L)^2 + a^2]^{-(1/2)} - (z+L)[(z+L)^2 + a^2]^{-(1/2)}\}$, $(0 \leqslant z < L)$; $E = (P/2\epsilon_0)\{-(z-L)[(z-L)^2 + a^2]^{-(1/2)} + (z+L)[(z+L)^2 + a^2]^{-(1/2)}\}$, $(z > L)$; (c) $E_{2n} - E_{1n} = P/\epsilon_0$; (d) $E(0) = -(P/\epsilon_0)\{1 - [1 + (a/L)^2]^{-(1/2)}\}$; (e) $|E|_{\text{máx}} = P/\epsilon_0$ para $a \gg L$; sí, puesto que es semejante al caso de dos láminas planas infinitas

10-13 (10-56) y (10-57)

10-15 $\rho_b = -[(\kappa_e - 1)\rho_f/\kappa_e] - (\mathbf{P}\cdot\nabla \ln \kappa_e)/(\kappa_e - 1)$; $\rho = (\rho_f/\kappa_e) - (\mathbf{P}\cdot\nabla \ln \kappa_e)/(\kappa_e - 1)$; si $\mathbf{P}$ y $\nabla\kappa_e$ son perpendiculares

10-17 $\mathbf{D} = q\hat{\mathbf{r}}/4\pi r^2$, en cualquier punto; en el interior: $\mathbf{E} = q\hat{\mathbf{r}}/4\pi\kappa_e\epsilon_0 r^2$, $\mathbf{P} = (\kappa_e - 1)q\hat{\mathbf{r}}/4\pi\kappa_e r^2$; en el exterior: $\mathbf{E} = q\hat{\mathbf{r}}/4\pi\epsilon_0 r^2$, $\mathbf{P} = 0$; $(\kappa_e - 1)q/\kappa_e$

10-19 $\mathbf{D} = \lambda_f\hat{\boldsymbol{\rho}}/2\pi\rho$, $\mathbf{E} = \lambda_f\hat{\boldsymbol{\rho}}/(2\pi\alpha\epsilon_0\rho^{n+1})$, $\rho_b = -n\lambda_f/(2\pi\alpha\rho^{n+2})$; $n = -1$; $\mathbf{D}$ sin alteración d, $\rho_b = \lambda_f/2\pi\alpha\rho$

10-21 $\mathbf{D} = \lambda_f\hat{\boldsymbol{\rho}}/2\pi\rho$, $\mathbf{E} = \lambda_f\hat{\boldsymbol{\rho}}[2\pi\epsilon_0\rho(\alpha + \beta z)]^{-1}$, $\mathbf{P} = (\alpha + \beta z - 1)\lambda_f\hat{\boldsymbol{\rho}}[2\pi\rho(\alpha + \beta z)]^{-1}$, $\rho_b = 0$, yes

10-23 $D = Q/A$, en cualquier punto; en el vacío, $E = Q/\epsilon_0 A$, $P = 0$; en el dieléctrico, $E = Q/\kappa_e\epsilon_0 A$, $P = (\kappa_e - 1)Q/\kappa_e A$; $C = \kappa_e\epsilon_0 A[\kappa_e(d-t) + t]^{-1}$

10-25 $[(\kappa_{e2} - \kappa_{e1})\epsilon_0 A/d][\ln(\kappa_{e2}/\kappa_{e1})]^{-1}$

10-27 $C = 2\pi\epsilon_0 L\left[\frac{1}{\kappa_{e1}}\ln\left(\frac{\rho_0}{a}\right) + \frac{1}{\kappa_{e2}}\ln\left(\frac{b}{\rho_0}\right)\right]^{-1}$

10-29 $4\pi\epsilon_0\left[\frac{1}{\kappa_{e1}a} - \frac{1}{\kappa_{e2}b} + \frac{1}{r_0}\left(\frac{1}{\kappa_{e2}} - \frac{1}{\kappa_{e1}}\right)\right]^{-1}$

10-31 $\mathbf{D} = \rho_0\mathbf{r}/3$; $\mathbf{E} = \rho_0\mathbf{r}/3\kappa_e\epsilon_0$; $2\pi\rho_0{}^2a^5/45\kappa_e\epsilon_0$; $-4\pi(\kappa_e - 1)a^3\rho_0/3\kappa_e$; $\phi_o = \rho_0 a^3/3\epsilon_0 r$, $\phi_i = \left(\frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}\right)\left[1 + \frac{1}{2\kappa_e}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\right]$; $(2\kappa_e + 1)\rho_0 a^2/6\kappa_e\epsilon_0$

10-33 $\Delta\phi = (\kappa_e + 1)\Delta\phi_0/2\kappa_e$; $Q = \epsilon_0(\kappa_e + 1)L^2\Delta\phi_0/2d$, $E = (\kappa_e + 1)\Delta\phi_0/2\kappa_e d$

10-35 $(\epsilon_0 L/2d)(\kappa_e - 1)t(\Delta\phi)^2[\kappa_e(d-t) + t]^{-1}$

11-3 q at $(-a, -b, 0)$, $-q$ at $(-a, b, 0)$ and $(a, -b, 0)$; $(q/4\pi\epsilon_0)\{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{-(1/2)} - [(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{-(1/2)} + [(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{-(1/2)} - [(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{-(1/2)}\}$;
$(q/4\pi\epsilon_0)[(y-b)\{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{-3/2} - [(x+a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{-3/2}\} + (y+b)\{[(x+a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{-3/2} - [(x-a)^2 + (y+b)^2 + z^2]^{-3/2}\}]$; $E_y(0, y, z) = 0$;
$\sigma_f(x, 0, z) = -(qb/2\pi)\{[(x-a)^2 + b^2 + z^2]^{-3/2} - [(x+a)^2 + b^2 + z^2]^{-3/2}\}$; opuesto a q

11-5 $-3p^2\hat{\mathbf{x}}/64\pi\epsilon_0 d^4$

11-9 $(4\pi\epsilon_0)^{-1}[(q/d) + (Q/a)]$; $(q\hat{\mathbf{z}}/4\pi\epsilon_0)[(Q/d^2) - q(a/d)^3(2d^2 - a^2)(d^2 - a^2)^{-2}]$

11-11 $-\lambda a/\pi(a^2 + \rho^2)$; $-\lambda$; $-\lambda^2\hat{\mathbf{x}}/4\pi\epsilon_0 a$

11-13 $2\pi\epsilon_0/[\cosh^{-1}(h/A)]$; $-\pi\epsilon_0(\Delta\phi)^2[\cosh^{-1}(h/A)]^{-2}(h^2 - A^2)^{-(1/2)}$

11-15 $-(2\epsilon_0\phi_0/L)[\text{senh}(\pi y/L)]^{-1}$

11-17 $\phi = 2\phi_0 \sum_{n\text{ impar}} \left(\frac{2}{n\pi}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\text{senh}\left[\frac{n\pi}{2}\left(\frac{2x}{a} - 1\right)\right]\left[\text{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]^{-1}$; $E_y = 0$,
$E_x = -4\left(\frac{\phi_0}{a}\right)\sum_{n\text{ impar}} (-1)^{(n-1)/2}\left[\text{senh}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]^{-1} = -1.669\left(\frac{\phi_0}{a}\right)$

11-19 $X''+Y''+Z''=\alpha+\beta+\gamma=0$; $X(x)=\frac{1}{2}\alpha x^2+Cx+C'$; campo constante mas uno variando en forma lineal con x

11-21 $ra^2/(r^3+2a^3)=K\operatorname{sen}^2\theta$

11-23 Con $R_1=(r^2+b^2-2rb\cos\theta)^{1/2}$, $R_2=\left[(br/a)^2+a^2-2rb\cos\theta\right]^{1/2}$;

$\phi=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$; $E_r=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{(r-b\cos\theta)}{R_1{}^3}-\frac{\left[(b^2r/a^2)-b\cos\theta\right]}{R_2{}^3}\right\}$,

$E_\theta=\frac{qb\operatorname{sen}\theta}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1{}^3}-\frac{1}{R_2{}^3}\right)$; $E_r(0,\theta)=-(q\cos\theta/4\pi\epsilon_0b^2a^3)(a^3-b^3)$, $E_\theta(0,\theta)=$ $(q\operatorname{sen}\theta/4\pi\epsilon_0b^2a^3)(a^3-b^3)$; $\sigma_f(\theta)=-(qa/4\pi)\left[1-(b^2/a^2)\right][a^2+b^2-2ab\cos\theta]^{-3/2}$; $-q$

11-25 $\phi=-E_0\left[1-(a^2/\rho^2)\right]\rho\cos\varphi$; $\sigma_f=2\epsilon_0E_0\cos\varphi$

11-27 $\frac{4\phi_0}{\pi}\sum_{m\ \text{impar}}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\left(\frac{\rho}{a}\right)^m\cos m\varphi$; $-(4\phi_0/\pi a)\hat{\mathbf{x}}$

11-29 $(r>a)$: $\left(\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\right)\left[\left(\frac{a}{r}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3P_2(\cos\theta)+\frac{3}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^5P_4(\cos\theta)-\cdots\right]$; $(r<a)$: $\left(\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\right)\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2P_2(\cos\theta)+\frac{3}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^4P_4(\cos\theta)-\cdots\right]$

11-31 $\phi=\phi_0+(z/d)\{\phi_d-\phi_0+(\rho_0d^2/12\epsilon_0)\left[1-(z/d)^3\right]\}$; $\sigma(0)=-(\epsilon_0/d)(\phi_d-\phi_0)-(\rho_0d/12)$; $\sigma(d)=(\epsilon_0/d)(\phi_d-\phi_0)-\frac{1}{4}\rho_0d$

12-1 Ampere/(metro)^5; $-63A$; $-12\pi Aa^5/5$, decreciente

12-3 $(3Q\omega r\operatorname{sen}\theta/4\pi a^3)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$; $Q\omega/2\pi$

12-5 $-(\sigma\phi_0/a)\hat{\mathbf{z}}$

12-7 IR/l

12-9 $[\sigma_1(d-x)\phi_1+\sigma_2x\phi_2]/[\sigma_1(d-x)+\sigma_2x]$; $(\sigma_1\epsilon_2-\sigma_2\epsilon_1)(\phi_1-\phi_2)/[\sigma_1(d-x)+\sigma_2x]$

12-11 $\pi\sigma d\Delta\phi/\cosh^{-1}(D/2A)$

12-17 1.51×10^{-4} metro/segundo

13-5 $-\frac{1}{2}\mu_0IK'\hat{\mathbf{z}}$

13-7 $-\hat{\mathbf{y}}\frac{\mu_0II'a^2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi}{d^2+a^2\operatorname{sen}^2\varphi}=-\hat{\mathbf{y}}\mu_0II'\left[1-\frac{d}{(d^2+a^2)^{1/2}}\right]$

13-9 $\mu_0I^2(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})/4\pi a$

14-1 $(\mu_0/\pi\rho)[-I\operatorname{sen}\alpha\hat{\mathbf{y}}+(I\cos\alpha-I')\hat{\mathbf{z}}]$

14-3 $(\mu_0/4\pi)\{I_1[-(y-y_1)\hat{\mathbf{x}}+(x-x_1)\hat{\mathbf{y}}]\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]^{-1}$ $+I_2[-(y-y_2)\hat{\mathbf{x}}+(x-x_2)\hat{\mathbf{y}}]\left[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2\right]^{-1}\}$

14-5 $\mu_0nI'\{1-(2/\pi)\operatorname{arc\,sen}[a^2/(L^2+a^2)]\}$; μ_0nI'

14-7 $(\mu_0I'a/2\pi)(a^2+z^2)^{-3/2}(z\operatorname{sen}\alpha\hat{\mathbf{x}}+a\alpha\hat{\mathbf{z}})$

14-9 $\mu_0K'\hat{\mathbf{x}}$, $(0<z<d)$; 0, en cualquier otra parte

14-11 $\mu_0\sigma\omega\hat{\mathbf{z}}[(z^2+\frac{1}{2}a^2)(z^2+a^2)^{-(1/2)}-|z|]$; $\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega a\hat{\mathbf{z}}$

14-13 $\frac{2}{5}\mu_0P\omega a\hat{\mathbf{z}}$; 0

14-15 $qv\mu_0I'(b-a)/4ab$, horizontal y a la derecha

15-1 $2\pi[1-z(z^2+a^2)^{-(1/2)}]$

15-5 Una corriente NI en línea recta infinitamente larga, perpendicular al plano del toroide y que pasa por el centro 0.

15-7 $B_\varphi=\mu_0I\rho/2\pi a^2$, $(0<\rho<a)$; $\mu_0I/2\pi\rho$, $(a<\rho<b)$; $(\mu_0I/2\pi\rho)[(c^2-\rho^2)/(c^2-b^2)]$, $(b<\rho<c)$; 0, $(c<\rho)$

15-9 $\frac{1}{2}\mu_0\rho_c \mathbf{v}\times\boldsymbol{\rho}$, $(0<\rho<a)$; $\frac{1}{2}\mu_0\rho_c(a/\rho)^2\mathbf{v}\times\boldsymbol{\rho}$, $(a<\rho)$

16-3 $f(x,y,z) = -(\alpha z/y^2) - (\beta z/x^2) + g(x,y)$; $\mu_0\mathbf{J} = \hat{\mathbf{x}}[(2\alpha z/y^3) + (\partial g/\partial y)] - \hat{\mathbf{y}}[(2\beta z/x^3) + (\partial g/\partial x)] + \hat{\mathbf{z}}[(2\alpha x/y^3) - (2\beta y/x^3)]$; $\nabla\cdot\mathbf{J}=0$

16-5 $\chi(a\to b) = -xyB$; $\chi(a\to c) = -\frac{1}{2}xyB$; $\chi(b\to c) = \frac{1}{2}xyB$

16-7 $B_\rho(\rho,z)\simeq(3\mu_0 Ia^2z\rho/2)(a^2+z^2)^{-5/2}$; $B_z(\rho,z)\simeq(\mu_0 Ia^2/2)(a^2+z^2)^{-3/2}\{1+[3\rho^2(a^2-4z^2)(a^2+z^2)^{-2}]\}$

16-9 $4\pi A/\mu_0 I = \hat{\mathbf{x}}\ln[(\alpha+a+x)(\beta-a-x)/(\delta+a-x)(\gamma-a+x)] + \hat{\mathbf{y}}\ln[(\gamma+a+y)(\alpha-a-y)/(\beta+a-y)(\delta-a+y)]$ donde $\alpha^2=(a+x)^2+(a+y)^2$, $\beta^2=(a+x)^2+(a-y)^2$, $\gamma^2=(a-x)^2+(a+y)^2$, $\delta^2=(a-x)^2+(a-y)^2$; 0

16-11 $A_z = (\mu_0 I/4\pi)[1-(\rho^2/a^2)+2\ln(\rho_0/a)]$, $(\rho<a)$; $(\mu_0 I/2\pi)\ln(\rho_0/\rho)$, $(\rho>a)$; $A_z(0) = (\mu_0 I/4\pi)[1+2\ln(\rho_0/a)]$

16-13 $A_z = A_0 - (\mu_0 I\rho^2/4\pi a^2)$, $(0<\rho<a)$; $A_0-(\mu_0 I/4\pi)[1+2\ln(\rho/a)]$, $(a<\rho<b)$; $A_0-(\mu_0 I/4\pi)[1+2\ln(b/a)] + [\mu_0 I/4\pi(c^2-b^2)][\rho^2-b^2-2c^2\ln(\rho/b)]$, $(b<\rho<c)$; $A_0-(\mu_0 I/2\pi)[\ln(b/a)-c^2(c^2-b^2)^{-1}\ln(c/b)]$, $(c<\rho)$; $A_0 = (\mu_0 I/2\pi)\{\ln(b/a)-[1-(b/c)^2]^{-1}\ln(c/b)\}$

16-15 Cero

17-3 $\lambda I_0 e^{-\lambda t}(\mu_0 b/2\pi)\ln[1+(a/d)]$; en el sentido de las manecillas del reloj

17-5 $\omega B_0 ab\,\mathrm{sen}(2\omega t+\varphi_0+\alpha)$; no

17-7 $\mathbf{P}=(\kappa_e-1)\epsilon_0\omega B\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}$; $Q_b = 2\pi(\kappa_e-1)\epsilon_0\omega Ba^2 l$

17-9 4.71 volts

17-11 (a) $l/\sigma ab$; (b) $vB_d l$; (c) $v\sigma abB_d$; (d) 5 ohms, 8.25×10^{-4} volts, 1.65×10^{-4} amperes

17-13 $3\epsilon_0[(\kappa_e-1)VvB]^2/2\pi R^4$; de atracción

17-15 $\frac{1}{2}\sigma\omega B_0\rho\,\mathrm{sen}(\omega t+\alpha)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

17-17 1.42×10^{-4} henrys

17-19 $(\mu_0 b/2\pi)\ln[(a+d)(d+D)/d(a+d+D)]$

17-21 $(\mu_0 N^2 a/2\pi)\ln[(2b+a)/(2b-a)]$

17-23 $LC=\mu_0\epsilon_0 l^2$; $L=(\mu_0 l/\pi)\cosh^{-1}(D/2A)$

18-5 $i=i_0e^{-t/\tau}$ donde $\tau=L/R$

18-7 $(\mu_0 l/16\pi)(b^2-a^2)^{-2}[(b^2-a^2)(b^2-3a^2)+4a^4\ln(b/a)]$

18-9 $b<1.28a$

18-11 $\mathbf{F}_{mj} = \sum_{k\neq j} I_j I_k \nabla_j M_{jk}$

18-13 $\hat{\mathbf{x}}\mu_0 II'[1-b(b^2-a^2)^{-(1/2)}]$

18-15 $-\hat{\mathbf{z}}(3\pi\mu_0 a^2b^2I_jI_k/2c^4)$

18-17 $-\frac{1}{2}\mu_0 II'nSa^2\{[a^2+(\frac{1}{2}l-\delta)^2]^{-3/2}-[a^2+(\frac{1}{2}l+\delta)^2]^{-3/2}\}$

18-19 0.504 tesla

19-1 $I\pi a^2\hat{\mathbf{z}}$

19-3 $\frac{1}{4}Qa^2\omega$

19-7 $\pi\mu_0 a^2b^2/4c^3$

19-11 $\tan\alpha_2 = -\frac{1}{2}\tan\alpha_1$

19-13 $IabB\,\mathrm{sen}\varphi\hat{\mathbf{z}}$

20-1 182 amperes/metro

20-3 $\mathbf{J}_m=(2M/a)\hat{\mathbf{z}}$; $\mathbf{K}_m$: 0, $(x=0)$; $-M\hat{\mathbf{z}}$, $(x=a)$; 0, $(y=0)$; $-M\hat{\mathbf{z}}$, $(y=a)$; $-(M/a)(x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}})$, $(z=0)$; $(M/a)(x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}})$, $(z=a)$

20-5 α en amperes/(metro)^3, β en amperes metro; $\mathbf{J}_m=0$; $\mathbf{K}_m=(\alpha a^2\cos^2\theta+\beta)\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

20-7 $B_z = \frac{1}{2}\mu_0 M\{(z+\frac{1}{2}l)[a^2+(z+\frac{1}{2}l)^2]^{-1/2} - (z-\frac{1}{2}l)[a^2+(z-\frac{1}{2}l)^2]^{-1/2}\}, H_z = (B_z/\mu_0) - M$; para $l \ll a$: $B_{z0} \simeq \frac{1}{2}\mu_0 Mla^2(a^2+z^2)^{-3/2}, B_{zi} \simeq \mu_0 Ml/2a \simeq 0, H_{zi} \simeq -M[1-(l/2a)] \simeq -M$

20-9 $\mathbf{J}_m = 0, \mathbf{K}_m = 0; \mathbf{B}_i = 0, \mathbf{H}_i = -\mathbf{M}, \mathbf{H}_0(a) = 0$

20-13 $\rho_m = 0, \sigma_{m\,\text{parte superior}} = M, \sigma_{m\,\text{parte inferior}} = -M; \mathbf{H}_i = -\mathbf{M}, \mathbf{H}_0 = 0$; 1; sí

20-15 $\phi_m = 0, H_z = 0, (0 < z < a); \phi_m = (M/3z^2)(z^3 - a^3), H_z = -(M/3z^3)(z^3 + 2a^3), (a < z < b)$; $\phi_m = (M/3z^2)(b^3 - a^3), H_z = (2M/3z^3)(b^3 - a^3), (b < z)$

20-17 $\chi_m = \chi_{m,\,\text{masa}}\, d; \chi_m = \chi_{m,\,\text{molar}}(d/A)$

20-19 (b) $\delta \simeq \frac{1}{2}(\chi_{m2} - \chi_{m1})\,\text{sen}\,2\theta_1, 6.3 \times 10^{-4}$ grados; (c): (i) $-42.1°$, (ii) $44.9°$

20-21 En el exterior: $H_r = H_0\cos\theta\{1 + [(\kappa_m - 1)/(\kappa_m + 2)](2a^3/r^3)\}, H_\theta = -H_0\,\text{sen}\,\theta\{1 - [(\kappa_m - 1)/(\kappa_m + 2)](a^3/r^3)\}, H_\varphi = 0$; en el interior: $\mathbf{H} = [3/(\kappa_m + 2)]\mathbf{H}_0$

20-23 $2I/(\kappa_m + 1); [(\kappa_m - 1)/(\kappa_m + 1)](\mu_0 I^2/4\pi d)$; de atracción

20-25 $H_{\varphi 2} = I/2\pi\rho, B_{\varphi 2} = \kappa\mu_0 I/2\pi a, L_2 = \kappa\mu_0(b-a)l/2\pi a$

20-27 $\chi_m = 2dgh/\mu_0 H_0^2$

20-29 1.30 tesla; 1.44×10^6 amperes/weber; 0.374 ampere; $H_0 = 1.03 \times 10^6$ amperes/metro, $H_i = 247$ amperes/metro; 0.689

20-31 $(\mu - \mu_0)B_0^2 S/2\mu\mu_0$; 134 newtons; 6.63 atmósferas

21-1 $-\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathcal{E}\,\omega d_1\rho\cos\omega t(d_0 + d_1\,\text{sen}\,\omega t)^{-2}\hat{\varphi}$; 0

21-3 $\nabla\cdot\mathbf{E} = (\rho_f - \nabla\cdot\mathbf{P})/\epsilon_0, \nabla\times\mathbf{E} = -\mu_0[(\partial\mathbf{H}/\partial t) + (\partial\mathbf{M}/\partial t)], \nabla\cdot\mathbf{H} = -\nabla\cdot\mathbf{M}, \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \epsilon_0(\partial\mathbf{E}/\partial t) + (\partial\mathbf{P}/\partial t)$; $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f, \nabla\times\mathbf{D} = -\epsilon_0(\partial\mathbf{B}/\partial t) + \nabla\times\mathbf{P}, \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0[\mathbf{J}_f + (\partial\mathbf{D}/\partial t) + \nabla\times\mathbf{M}]$; $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f, \nabla\times\mathbf{D} = -\mu_0\epsilon_0[(\partial\mathbf{H}/\partial t) + (\partial\mathbf{M}/\partial t)] + \nabla\times\mathbf{P}, \nabla\cdot\mathbf{H} = -\nabla\cdot\mathbf{M}, \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J}_f + (\partial\mathbf{D}/\partial t)$

21-7 $\nabla\cdot\mathbf{E} = (\rho_f - \mathbf{E}\cdot\nabla\epsilon)/\epsilon, \nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t, \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \nabla\times\mathbf{B} = \mu[\mathbf{J}_f' + \sigma\mathbf{E} + \epsilon(\partial\mathbf{E}/\partial t)] + (\nabla\mu\times\mathbf{B})/\mu$

21-9 $\mathbf{S} = -(qI/2\epsilon_0\pi^2 a^3)\hat{\rho}; dU/dt = qId/\epsilon_0\pi a^2 = d(q^2/2C)/dt$

21-11 Yes

22-3 $\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{\epsilon}\mathbf{A}\cdot\nabla\epsilon\right) + \frac{1}{\epsilon}(\nabla\phi)\cdot(\nabla\epsilon) = -\frac{\rho_f}{\epsilon}; \nabla^2\mathbf{A} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \mu\sigma\nabla\phi - \mu\epsilon\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{\mu}(\nabla\mu)\times(\nabla\times\mathbf{A}) = -\mu\mathbf{J}_f'$

22-5 $\nabla^2\phi = -\rho_f(\mathbf{r},t)/\epsilon; \nabla^2\mathbf{A} - \mu\epsilon(\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2) = -\mu\mathbf{J}_f + \mu\epsilon\nabla(\partial\phi/\partial t)$

22-7 $\mathbf{E} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}_e) - \mu_0\epsilon_0(\partial^2\boldsymbol{\pi}_e/\partial t^2) = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\pi}_e) - (\mathbf{P}/\epsilon_0), \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\nabla\times(\partial\boldsymbol{\pi}_e/\partial t)$

23-1 [statcoulomb] = $(\text{gramo})^{1/2}(\text{centímetro})^{3/2}(\text{segundo})^{-1}$; [abampere] = $(\text{gramo})^{1/2}(\text{centímetro})^{1/2}(\text{segundo})^{-1}$

23-5 $C = A/4\pi d$

24-1 $\partial^2\psi/\partial\xi\partial\eta = 0$

24-5 $\mathcal{E} = \pi a^2 NkE_0\cos\theta\,\text{sen}\,\omega t$; por lo que $\mathbf{B} \simeq \text{const.} = \mathbf{B}(z=0)$

24-7 Listados en orden Q, v (metros/segundo), δ(metro), E/cB, Ω(radián). Para $\nu = 10^2$ hertz: 1.39×10^{-9}, 1.58×10^4, 25.2, 3.73×10^{-5}, $\pi/4 = 0.785$; para 10^7: 1.39×10^{-4}, 5.00×10^6, 7.96×10^{-2}, 1.18×10^{-2}, 0.785 para 10^{10}: 0.139, 1.48×10^8, 2.70×10^{-3}, 0.371, 0.716; for 10^{15}: 1.39×10^4, 3×10^8, 1.33×10^{-3}, $1.00 - 1.29 \times 10^{-9}$, 3.60×10^{-5}; la observación diaria demuestra que la luz penetra muchos metros en el agua del mar; se empleó el valor estático para σ

24-9 $E_0 = 1005$ volts/metro, $B_0 = 3.35 \times 10^{-6}$ tesla

24-11 $[1 + (1/Q^2)]^{1/2}$; $1 + (1/2Q^2), (Q \gg 1)$; $(1/Q)\left(1 + \frac{1}{2}Q^2\right), (Q \ll 1)$

24-13 $\hat{\mathbf{z}}(E_\alpha^2 + E_\beta^2)/2Z$

24-15 $\langle u_e \rangle = \sum_k \frac{1}{2}\epsilon\mathbf{E}_{0k}^2$

24-17 $\lambda = 10^{-2}$ metros, $\nu = 3 \times 10^{10}$ hertz, $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = 45°$

24-19 $\mathbf{E}_- = E_0(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})e^{i(kz - \omega t + \vartheta)}$

24-21 (a) 8.97×10^9 hertz, (b) 8.97×10^5 hertz

24-23 Sí:s

24-27 En el orden pedido: $\frac{1}{4}\epsilon|\mathbf{E}_0|^2$, $\frac{1}{4}(k^2/\mu\omega^2)|\mathbf{E}_0|^2$, $1-(\omega_P/\omega)^2$, $\frac{1}{2}\epsilon|\mathbf{E}_0|^2[1-(\omega_P{}^2/2\omega^2)]$, $\frac{1}{2}\{(\epsilon/\mu)[1-(\omega_P/\omega)^2]\}^{\frac{1}{2}}|\mathbf{E}_0|^2\hat{\mathbf{k}}$, $v_U = (\mu\epsilon)^{-1/2}[1-(\omega_P/\omega)^2]^{1/2}[1-(\omega_P{}^2/2\omega^2)]^{-1}$

24-29 (a) $Q = 2\pi(\tau/T)$; (b) $2\pi\delta/\lambda = (1+Q^2)^{1/2} + Q$

25-5 $(E_t/E_i)_\perp = 2Z_2\cos\theta_i[Z_2\cos\theta_i + i(Z_1K/k_2)]^{-1}$; $(E_t/E_i)_\parallel = 2Z_2\cos\theta_i[Z_1\cos\theta_i + i(Z_2K/k_2)]^{-1}$; $(Z_1/Z_2)^2$; elíptica

25-7 (b) $\theta_i = 21.2°$ or $40.7°$; (c) $n_1 = 2.41 n_2 = 3.62$, $\theta_i = 32.8°$

25-9 (a) $a_t = a(\cos\theta_t/\cos\theta_i)$, $b_t = b$; (b) $P_i = |\langle \mathbf{S}_i\rangle|ab$, $P_t = |\langle \mathbf{S}_t\rangle|a_t b_t$; (c) $T' = T$

25-11 $E_{0t}/E_{0i} \simeq 2\pi(\mu_2/\mu_1)(\delta_2/\lambda_1)(1-i)$; E_t se adelanta en $45°$

25-13 $T = \mathrm{Re}(E_{0t}H_{0t}{}^*)/\mathrm{Re}(E_{0i}H_{0i}{}^*) = 4\pi(\mu_2/\mu_1)(\delta_2/\lambda_1)$

25-15 (c) $d\theta_P/ds = n_P{}^{-1}|dn_P/dz| \neq 0$; (d) $n_P(z)/n_P(0) = an_a\,\mathrm{sen}\theta_i[z + an_a\,\mathrm{sen}\theta_i]^{-1}$

25-17 $P_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{3}\langle u\rangle_{\mathrm{tot}}$

26-1 $\mathfrak{E}_\tau = (ik_g/k_c{}^2)\nabla\mathcal{E}_z$, $\mathfrak{H}_\tau = (\hat{\mathbf{z}}\times\mathfrak{E}_\tau)/Z_m$, $Z_m = (k_g/k_0)Z = (\lambda_0/\lambda_g)Z$

26-3 $v_G = v[1-(\omega_c/\omega)^2]^{1/2} < v$. Como en el Ejercicio 24-26 $k \to k_g$, $v \to v_g$, y $(\mu\epsilon)^{-1} \to v^2$

26-5 $(\lambda/2) < a < (\lambda/\sqrt{2})$

26-7 (a) $\langle u\rangle = \frac{1}{4}\mu|H_0|^2[2(\omega a/\pi v)^2\,\mathrm{sen}^2(\pi x/a) + \cos(2\pi x/a)]$; (b) $\langle\mathbf{S}\rangle = \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{2}\mu\omega k_g(a/\pi)^2|H_0|^2\,\mathrm{sen}^2(\pi x/a)$; (c) $\langle\langle u\rangle\rangle = \frac{1}{4}\mu(a\omega/\pi v)^2|H_0|^2$; $\langle\langle\mathbf{S}\rangle\rangle = \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{4}\omega\mu k_g(a/\pi)^2|H_0|^2$; (d) $v_U = v^2/v_g = v_G$

26-9 $\frac{1}{4}\mu_0 H_0{}^2(\omega a/\pi c)^2\,\mathrm{sen}^2(\pi x/a)\hat{\mathbf{y}}$

26-11 Con $P = k_g z - \omega t$: $H_z = 0$, $E_x = -E_0(k_g/k_c^2)(m\pi/a)\cos(m\pi x/a)\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\sin P$, $E_y = -E_0(k_g/k_c^2)(n\pi/b)\,\mathrm{sen}(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)\,\mathrm{sen}P$, $E_z = E_0\,\mathrm{sen}(m\pi x/a)\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\cos P$, $H_x = E_0(\omega\epsilon/k_c^2)(n\pi/b)\,\mathrm{sen}(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)\,\mathrm{sen}P$, $H_y = -E_0(\omega\epsilon/k_c^2)(m\pi/a)\cos(m\pi x/a)\,\mathrm{sen}(n\pi y/b)\,\mathrm{sen}P$

26-13 $\mathbf{A} = -(i/\omega)\mathbf{E}$, por lo que con $P = k_g z - \omega t$: $A_x = -(\mu/k_c{}^2)(n\pi/b)H_0\cos(m\pi x/a)\mathrm{sen}(n\pi y/b)e^{iP}$, $A_y = (\mu/k_c{}^2)(m\pi/a)H_0\mathrm{sen}(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b)e^{iP}$, $A_z = 0$

26-15 $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\psi_0}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\psi_0}{\partial\varphi^2} + k_c{}^2\psi_0 = 0$; $J_m(k_c a) = 0$

26-17 $\sigma_f = \epsilon\Delta\phi_0[a\ln(b/a)]^{-1}\cos\omega[(z/v) - t]$

26-21 $E_x = E_y = 0$, $E_z = E_3\,\mathrm{sen}(\pi x/a)\,\mathrm{sen}(\pi y/a)e^{-i\omega t}$, $H_x = -i(\pi E_3/\omega\mu a)\sin(\pi x/a)\cos(\pi y/a)e^{-i\omega t}$, $H_y = i(\pi E_3/\omega\mu a)\cos(\pi x/a)\,\mathrm{sen}(\pi y/a)e^{-i\omega t}$, $H_z = 0$; $\langle S\rangle = 0$; $U = \frac{1}{8}a^3\epsilon|E_3|^2$

27-1 Todos los campos son cero para $t < (\rho/c)$. Para $t \geqslant (\rho/c)$, y con $F = [1-(\rho/ct)^2]^{1/2}$: $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}}(\mu_0 I/4\pi)\ln[(1+F)/(1-F)]$, $\mathbf{B} = \hat{\varphi}(\mu_0 IF/2\pi\rho)$, $\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{z}}(\mu_0 I/2\pi tF)$, $\mathbf{S} = \hat{\rho}(\mu_0 I^2/4\pi^2\rho t)$

27-3 0.03 volts/meter

27-5 Con $P = kr - \omega t$:

$$\mathbf{E} = \frac{k^3 p_0}{4\pi\epsilon_0}\left\{\hat{\mathbf{r}}\cos\theta\left[\frac{2\,\mathrm{sen}P}{(kr)^2} + \frac{2\cos P}{(kr)^3}\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{sen}\theta\left[\left(-\frac{1}{kr} + \frac{1}{k^3r^3}\right)\cos P + \frac{\mathrm{sen}P}{(kr)^2}\right]\right\}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 k^2\omega p_0}{4\pi}\hat{\varphi}\sin\theta\left[\frac{\cos P}{kr} - \frac{\mathrm{sen}\,P}{(kr)^2}\right],$$

$$\mathbf{S} = \frac{k^5\omega p_0{}^2}{16\pi^2\epsilon_0}\left\{\hat{\mathbf{r}}\,\mathrm{sen}^2\theta\left[\frac{\cos^2 P}{(kr)^2} - \frac{\cos 2P}{2(kr)^4} + \left(-\frac{1}{k^3r^3} + \frac{1}{k^5r^5}\right)\sin 2P\right] + \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta\left[\left(-\frac{1}{k^3r^3} + \frac{1}{k^5r^5}\right)\sin 2P - \frac{2\cos 2P}{(kr)^4}\right]\right\}$$

27-13 $\mathbf{B}_R = (i\mu_0\omega^3 m_0 b/4\pi c^3 r)\operatorname{sen}2\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\mathbf{E}_R = -(i\mu_0\omega^3 m_0 b/4\pi c^2 r)\operatorname{sen}2\theta e^{i(kr-\omega t)}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$

27-15 Con $\mathbf{E}_0 = (i\mu_0 c|I_0|/\pi r)e^{i[kr-\omega t+\frac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_1)]}\hat{\mathbf{z}}$: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos[ka\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_1)]$, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0\cos(\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}\varphi)$, $\mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_0\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi\operatorname{sen}\varphi)$

28-3 15.7×10^{-6} segundos; 4.66×10^3 metros

28-5 Sí

28-7 Con $\eta = 1 + (Vv_x'/c^2)$: $a_x = a_x'/\gamma\eta^3$, $a_y = [a_y' - (V/c^2\eta)v_y'a_x']/\gamma^2\eta^2$, $a_z = [a_z' - (V/c^2\eta)v_z'a_x']/\gamma^2\eta^2$

28-17 Con $\epsilon = 1 - (\beta v_x/c)$: $f_x' = f_x - (V/c^2\epsilon)(v_y f_y + v_z f_z)$, $f_y' = f_y/\gamma\epsilon$, $f_z' = f_z/\gamma\epsilon$, $(dW'/dt') = [(dW/dt) - Vf_x]/\epsilon$

28-19 $(PE)_0 = M_0 c^2\{[1-(v_0^2/c^2)]^{-(1/2)} - 1\}$, $W_S = M_{0S}c^2[1-(V^2/c^2)]^{-(1/2)}$, $P_S = M_{0S}V[1-(V^2/c^2)]^{-(1/2)}$, donde $M_{0S} = M_0/[1-(v_0^2/c^2)]^{1/2} = M_0 + [(PE)_0/c^2]$ = (masa inercial en reposo)+ (masa equivalente de energía potencial inicial)

28-27 $\mathbf{F}_{\text{sobre}2} = (\gamma_1 q_1 q_2/4\pi)[\gamma_1^2 R_x^2 + R_y^2 + R_z^2]^{-3/2}\times\{(\mathbf{R}/\epsilon_0) + \mu_0\mathbf{v}_2\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{R})\}$ donde $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\gamma_1 = [1-(v_1^2/c^2)]^{-(1/2)}$

28-29 En el exterior: $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = 0$; en el interior: $\mathbf{B} = \gamma\mu_0 n'I'\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{E} = -\gamma V\mu_0 n'I'\hat{\mathbf{z}}$; no

28-31 $(q^2/6\pi\epsilon_0 c^3)[1-(v^2/c^2)]^{-3}\{[\mathbf{a}]^2 - ([\mathbf{v}]\times[\mathbf{a}])^2/c^2\}$

A-1 $y = (qE/2m_0 v_0^2)x^2$; $d = qED^2/2m_0 v_0^2$; $\tan\alpha = qED/m_0 v_0^2$

A-3 $T = \frac{1}{2}q\Delta\phi[\ln(b/a)]^{-1}$

A-5 $m_0 = qB^2D^2/8\Delta\phi$

A-7 $\Delta l = 4\pi(m_0 v_0/qB)\operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\Delta\theta$; $\Delta l/l_0 = 2\tan\theta_0\operatorname{sen}\Delta\theta$; $\Delta\theta \leqslant 8.15°$

A-11 $x = (\pi^2/72)(m_0/q)(E/B^2)$, $y = 0.134(m_0 v_0/qB)$

A-13 Con $A = (qE/m_0 c)[1-(v_0^2/c^2)]^{(1/2)}$: $z = 0$, $y = (c/A)\{[1+(At)^2]^{1/2} - 1\}$, $x = (v_0/A)\ln\{At + [1+(At)^2]^{1/2}\} = (v_0/A)\operatorname{senh}^{-1}(At)$

B-1 $\alpha = 3.42\times 10^{-41}$ (metro)^3; $a = 6.75\times 10^{-11}$ metro

B-7 2.3×10^{-3}

B-9 1.000240; 0.001 %

B-11 $(\mu_0/12\pi c)(e^2/m_e)^2\omega^4|E_{p0}|^2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]^{-1}$

Indice

A

B

C

D

E

F

G

H

Q

R

S

T

U

V

W

Z

—ooo—